

# COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 16 au 21 JUIN 75

---



UN ALGORITHME DE SQUELETTISATION OPERANT PAR TESTS LOCAUX SUR DES  
SUITES DE VOISINAGES SUCCESSIFS.

Serge CASTAN - André NABONNE

Laboratoire C. E. R. F. I. A. - Université Paul Sabatier - 31077 TOULOUSE CEDEX

---

## RESUME

Dans les problèmes d'analyse et de description d'images il est souvent utile de pouvoir décrire les propriétés géométriques et/ou topologiques d'une forme par l'intermédiaire d'un sous-ensemble de cette forme appelé "squelette".

Nous proposons un algorithme, opérant à partir d'une métrique, et qui utilise des propriétés locales de connexité associées à cette métrique. Cet algorithme désigne les points du squelette en séquentiel ou en parallèle en effectuant des tests de connexité sur des voisinages successifs d'"ordre" croissant.

L'intérêt de cet algorithme est de respecter la connexité et de conserver l'information.

## SUMMARY

In image analysis and description problems it is often useful to be able to describe the geometrical and/or topological properties of a pattern by means of a subset of this pattern called "skeleton".

We consider an algorithm operating from a metric and using local connectivity properties associated with this metric. This algorithm indicates the points of the skeleton in sequential or parallel processing testing the connectivity on increasing orders of successive neighborhood.

The interest of this algorithm lies in the respect of connectivity and the preservation of information.



### 1. INTRODUCTION

Dans un problème de reconnaissance de formes, il est généralement nécessaire d'extraire les paramètres pertinents décrivant la forme, avant d'effectuer les différents traitements devant aboutir finalement à la classification. Alors qu'il existe des méthodes de classification générales, pouvant s'appliquer à différents domaines, le choix et l'extraction des paramètres significatifs est spécifique à chaque problème.

Dans cet article, nous nous intéresserons aux traitements des formes visuelles, et plus particulièrement aux images discrétisées.

Avant de rechercher les différents paramètres que l'on peut extraire d'une image, tels que : boucles fermées, boucles ouvertes, orientation de l'ouverture, angles, points caractéristiques, mesures de longueur et d'épaisseur de segments, etc... il est souvent intéressant d'une part de réduire l'information à traiter en ordinateur, et d'autre part quelques fois nécessaire d'avoir une nouvelle représentation de la forme sur laquelle on peut alors obtenir les paramètres significatifs.

Cette nouvelle représentation de la forme peut être un sous-ensemble de cette forme appelé squelette. Après avoir rappelé les propriétés des images discrétisées, et les différentes méthodes de squelettisation, nous proposons un algorithme opérant à partir d'une métrique, et qui utilise des propriétés locales de connectivité associées à cette métrique.

### 2. IMAGES DIGITALES - SQUELETTES

#### 1. Image digitale

On appelle "fonction image" (11) une fonction à valeur réelle de deux variables réelles, qui a la valeur zéro à l'extérieur d'un certain domaine fini, et une valeur comprise entre 0 et M ( $M > 0$ ) à l'intérieur de ce domaine.

La fonction image associée à une image physique a en un point donné une valeur appelée "niveau de gris" ou "brillance" de l'image en ce point. Cette valeur dépend de la quantité de lumière réfléchie ou transmise par l'image physique en ce point.

On appelle image digitale, le résultat de l'échantillonnage de cette fonction image.

Il existe différents types de maillage de discrétisation, nous utiliserons dans la suite un maillage rectangulaire. Une image digitale sera alors représentée par un tableau à deux dimensions ( $a_{i,j}$ ) dont la valeur au point  $a_{i,j}$  représente la valeur moyenne de la fonction image sur la région correspondante du plan.

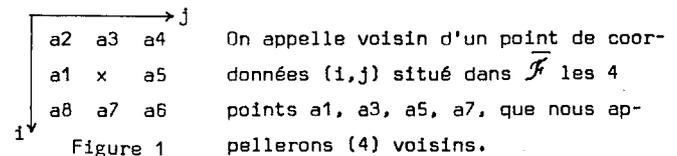
On appelle image digitale binaire, une image dans la-

quelle  $a_{i,j}$  ne prend que les valeurs 0 ou 1, et on peut toujours se ramener à ce cas par l'utilisation d'un seuil approprié.

Désignons par  $\mathcal{F}$  l'ensemble des 1 de l'image, que nous appelons forme, et par  $\overline{\mathcal{F}}$  l'ensemble des zéros.

#### 2. Connexité dans les images digitales binaires

On appelle voisin d'un point de coordonnées  $(i,j)$  situé dans  $\mathcal{F}$ , les 8 points  $a_1, \dots, a_8$  (figure 1) que nous appellerons (8) voisins.



Remarque - On montre (11), (12) qu'il faut effectivement deux définitions différentes de voisins pour  $\mathcal{F}$  et  $\overline{\mathcal{F}}$  pour éviter certains paradoxes tels que boucle fermée n'ayant pas d'intérieur, formule d'Euler non vérifiée, etc...

Définition - Deux points appartenant à E sous-ensemble de  $\mathcal{F}$  (resp.  $\overline{\mathcal{F}}$ ) sont dits connectés dans E ssi il existe un ensemble de points appelé "chemin"  $(i_0, j_0) \dots (i_n, j_n)$  tels que  $(i_0, j_0) = P_1, (i_n, j_n) = P_2, (i_r, j_r)$  situé dans E et  $(i_r, j_r)$  (8) voisin (resp. (4) voisin) ou confondu avec  $(i_{r-1}, j_{r-1})$ , ceci pour tout r tel que  $1 \leq r \leq n$ .

La relation "connectés dans E" est reflexive, symétrique et transitive, c'est donc une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence de cette relation sont appelées "composantes connexes de E".

Un sous-ensemble E de  $\mathcal{F}$  ou de  $\overline{\mathcal{F}}$  qui n'a qu'une composante connexe est dit connexe.

#### 3. Méthodes de squelettisation

On appelle squelette d'une forme  $\mathcal{F}$ , la structure la plus simple possible permettant de décrire les propriétés géométriques et/ou topologiques de la forme  $\mathcal{F}$ .

De nombreuses méthodes de squelettisation ont été proposées par différents auteurs (2), (5). On peut les regrouper en deux familles :

- Les méthodes par pelage (Thinning)
- Les méthodes opérant à partir d'une métrique
  - a) Méthodes par pelage (1), (3), (4), (7), (13).

On désigne par "pelage" d'une forme, un traitement itératif consistant à enlever à chaque étape (c'est-à-dire mettre à zéro) les points de la frontière de la forme, exceptés ceux qui appartiennent à l'axe médian final (médial axis). Ces points sont déterminés par des opérations locales portant sur ses voisins.

Le principal avantage de ces méthodes est de fournir un squelette topologiquement identique à la forme (en particulier conservation de la connectivité)



UN ALGORITHME DE SQUELETTISATION OPERANT PAR TESTS LOCAUX SUR DES SUITES DE VOISINAGES SUCCESSIFS

Mais ces méthodes ne permettent pas de reconstruire la forme initiale.

b) Méthodes opérant à partir d'une métrique (6), (8), (9), (10).

Les points du squelette sont obtenus à partir de considérations métriques. On peut par exemple rechercher les maxima locaux d'une "transformation distance". Ces méthodes permettent de reconstruire la forme initiale mais ne respectent pas la connexité.

3. ALGORITHME DE SQUELETTISATION

Cet algorithme opère à partir de voisinages associés à une métrique, et utilise des propriétés locales de connexité associées à ces voisinages.

Nous montrons que cette méthode réunit les propriétés respectives des deux méthodes précédentes : conserve la connexité et permet de reconstruire la forme.

3.1. Choix de la métrique

Nous utilisons une métrique telle que la distance des deux points de coordonnées (i,j) et (k,l) soit donnée par :

$$d[(i,j),(k,l)] = \text{Max} \{ |i-k|, |j-l| \}$$

3.2. Voisinage d'un point

3.2.1. Nous appelons "voisinage réel" d'ordre 2m-1 du point P, de coordonnées (k,l) l'ensemble :

$$V_{2m-1}(P) = \{ a \in (a_{i,j}) \mid d(P,a) \leq m-1 \} \quad \forall m = 1,2,3,\dots$$

$V_{2m-1}(P)$  est représenté par un carré de côté 2m-1 centré sur P.

Ex.  $V_3(P)$  figure 2

x	x	x
x	⊗ <sup>P</sup>	x
x	x	x

Figure 2

3.2.2. Nous appelons "voisinage virtuel" d'ordre 2m du point P, de coordonnées (k,l), l'ensemble :

$$V_{2m}(P) = \{ a \in (a_{i,j}) \mid d(P_V,a) \leq m - \frac{1}{2} \} \quad \forall m = 1,2,3,\dots$$

où  $P_V$  de coordonnées  $(k + \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2})$  désigne un point virtuel.

Pour m = 0 nous prenons  $V_0(P) = \emptyset$ .

$V_{2m}(P)$  est représenté par un carré de côté 2m centré sur le point virtuel  $P_V$ .

Ex.  $V_4(P)$  figure 3

x	x	x	x
x	⊗ <sup>P</sup>	x	x
x	x	⊙ <sup>P<sub>V</sub></sup>	x
x	x	x	x

Figure 3

3.3. Ordre d'un point

Nous dirons que P est d'"ordre n" si l'on a :

$$V_n(P) \subset \mathcal{F} \text{ et } V_{n+1}(P) \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$$

n est unique car  $V_n(P) \subset V_{n+1}(P)$  pour tout  $n \geq 1$ .

- Côté de  $V_n(P)$  :

P étant d'ordre n avec  $n \geq 2$ , on appelle côté de  $V_n(P)$  (figure 4) les ensembles  $c_1, c_2, c_3, c_4$  contenus dans un voisinage  $V_n(P)$  tels que :

$$\cup_{k=1,4} C_k = [V_n(P) - V_{n-2}(P)]$$

$$\text{avec : } C_{2k'-1} = \{ (i_k, j_k), (i_k+1, j_k), \dots, (i_k, j_k+n-1) \}$$

$$C_{2k} = \{ (i_k, j_k), (i_k, j_k+1), \dots, (i_k, j_k+n-1) \}$$

et  $k' = 1,2$

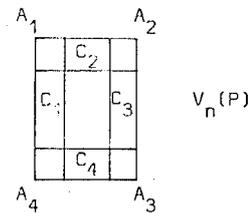


Figure 4

$C_{2k'-1}$  (resp.  $C_{2k}$ ) définissent des côtés opposés.

- Un point de  $(\mathcal{F} \cap (V_{n+2}(P) - V_n(P)))$  sera dit "situé sur le côté  $C_i$ " s'il a un point de  $C_i$  comme (4) voisin; pour  $n=1$ , le point  $a_{2i-1}$  (figure 1) est dit "situé sur le côté  $C_i$ ".

Les points  $A_i = C_i \cap C_{i+1}$  pour  $i=1,2,3,4$  (modulo 4) sont appelés angles de  $V_n(P)$ .

Un point de  $(\mathcal{F} \cap (V_{n+2}(P) - V_n(P)))$  sera dit "situé sur l'angle  $A_i$ " s'il n'a aucun point de  $V_n(P)$  comme (4) voisin et s'il a  $A_i$  comme (8) voisin.

3.4. Algorithme

Soit une forme connexe  $\mathcal{F}$ , considérons que son squelette  $\mathcal{S}(\mathcal{F})$  est l'ensemble des points P tels que P étant d'ordre n, l'ensemble :  $F = [V_{n+2}(P) - V_n(P)]$

Vérifie l'une des propriétés suivantes :

- $F \cap \mathcal{F}$  est non connexe
- $F \cap \mathcal{F}$  est connexe, mais il contient deux points situés sur 2 côtés opposés de  $V_n(P)$  (points extrémités du squelette).

3.5. Propriétés du squelette

Pour démontrer les propriétés du squelette, nous définissons un ensemble  $P(\mathcal{F})$  associé à cette forme (annexe 1), et que nous montrons que cet ensemble est connexe et contenu dans  $\mathcal{S}(\mathcal{F})$ .

Nous en déduisons (annexe 2) :

- La connexité de  $\mathcal{S}(\mathcal{F})$
- La possibilité de reconstruire la forme  $\mathcal{F}$  à partir de  $\mathcal{S}(\mathcal{F})$ .

3.6. Programmation

L'algorithme peut opérer en séquentiel ou en parallèle (10).

UN ALGORITHME DE SQUELETTISATION OPERANT PAR TESTS LOCAUX SUR DES SUITES DE VOISINAGES SUCCESSIFS

- Fonctionnement séquentiel : la séquence de test des points de l'image est calculée (utilisation de la propriété de connexité du squelette)
- Fonctionnement en parallèle : les points du squelette peuvent aussi être désignés simultanément (machine spécialisée, ou simulation séquentielle; dans ce cas la séquence de tests est pré-assignée (balayage TV par exemple)).

Dans la figure 5 est représenté un organigramme de l'algorithme.

5. CONCLUSION

Cet algorithme a donné entière satisfaction dans un problème d'analyse automatique d'images binaires de ligne (plan de réseaux par exemple) dans lequel les deux propriétés de notre algorithme (conservation de la connexité et possibilité de reconstruction (mesure d'épaisseur et de longueur des lignes)) étaient indispensables.

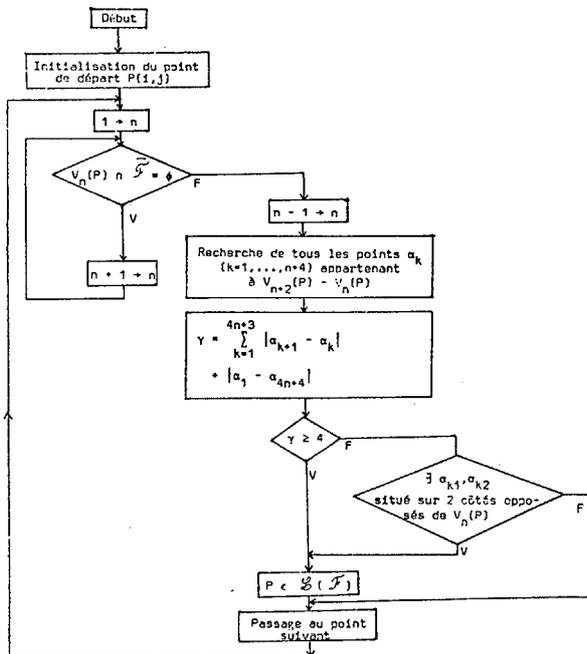


Figure 5 : Organigramme de l'algorithme

ANNEXE 1 : Définition de  $\mathcal{P}(F)$

$\mathcal{P}(F)$  est obtenu par un traitement itératif opérant à partir de  $\mathcal{F}_0 = F$ , (forme connexe).

A l'itération  $r$  ( $r = 0, 1, 2, \dots$ ) on a une forme  $\mathcal{F}_{(r)}$  que l'on décompose en l'union des 3 ensembles  $G_{(r)}$ ,

$H_{(r)}$ ,  $X_{(r)}$  suivants :

-  $G_{(r)} = \{P \in \mathcal{F}_{(r)} \mid P \text{ d'ordre } n \geq 3\}$

-  $H_{(r)} = \{P \text{ de } \mathcal{F}_{(r)} \text{ d'ordre } 1 \mid P \in \mathcal{Y}(\mathcal{F}_{(r)})\}$

$U \{P \text{ de } \mathcal{F}_{(r)} \text{ d'ordre } 2 \mid [(V_4(P) - V_2(P)) \cap \overline{\mathcal{F}_{(r)}}] \text{ contient deux points situés sur deux côtés opposés de } V_2(P) \text{ ou } [(V_3(P) - V_1(P)) \cap \overline{\mathcal{F}_{(r)}}] \text{ est non connexe.}$

Règle : Un point  $q$  de  $[(V_4(P) - V_2(P)) \cap \overline{\mathcal{F}_{(r)}}]$  ( $p$  étant d'ordre 2) situé sur un des angles  $A_i = A_1, A_2, A_4$  et dont les 2 voisins dans  $[V_4(P) - V_2(P)]$  sont dans  $\mathcal{F}_{(r)}$  est considéré situé à la fois sur les 2 côtés de  $V_2(P)$  ayant  $A_i$  comme angle.

Si  $q$  est situé sur l'angle  $A_3$ , il est considéré situé sur un seul des deux côtés  $C_3$  ou  $C_4$  et on choisira si possible le côté tel que l'on ait  $P \in H_{(r)}$ .

-  $X_{(r)} = \{P \in \mathcal{F}_{(r)} \text{ d'ordre } n \leq 2 \mid P \notin H_{(r)}\}$

On note  $Y_{(r)} = H_{(r)} \cup G_{(r)}$ .

L'itération est effectuée en faisant  $Y_{(r)} \rightarrow \mathcal{F}_{(r+1)}$

et on note  $\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(F)$  avec 1 tel que l'on ait :

$\mathcal{F}_{(1)} = \mathcal{F}_{(1+1)} \iff X_1 = \phi$

Propriétés de  $\mathcal{P}(F)$

$\mathcal{P}(F)$  constitue lui aussi un squelette de la forme, obtenu par pelage. On montre par une méthode proche de celle de Stefanelli et Rosenfeld (13) que l'algorithme permettant d'obtenir cet ensemble respecte la connexité de la forme initiale.

$\mathcal{P}(F)$  n'est jamais vide, et on montre qu'il est partie de  $\mathcal{Y}(F)$  à partir de la propriété suivante :

$\forall r = 0, 1, 2, \dots, 1-1$  et  $\forall P \in \mathcal{F}_{(r)}$  d'ordre  $n \geq 3$ ,  $P \notin \mathcal{Y}(\mathcal{F}_{(r)})$

$\Rightarrow P \in \mathcal{Y}(\mathcal{F}_{(r+1)})$  et  $P$  est d'ordre  $n-2$  dans  $\mathcal{F}_{(r+1)}$

Si l'on a  $n \leq 2$ ,  $P \notin \mathcal{Y}(\mathcal{F}_{(r)}) \Rightarrow P \in X_{(r)} \Rightarrow$

$P \in \mathcal{P}(F)$

ANNEXE 2 : Connexité du squelette  $\mathcal{Y}(F)$

Pour tous les cas possibles, on montre que si l'on a un point  $P$  d'ordre  $n \geq 3$  dans  $\mathcal{F}_{(r)}$  tel que  $P \in \mathcal{Y}(\mathcal{F}_{(r)})$  on a :

- soit  $P \in \mathcal{Y}(\mathcal{F}_{(r+1)})$  et  $P$  d'ordre  $n'$  dans  $\mathcal{F}_{(r+1)}$  avec  $n' < n$



UN ALGORITHME DE SQUELETTISATION OPERANT PAR TESTS LOCAUX SUR DES  
SUITES DE VOISINAGES SUCCESSIFS

- soit  $P \in \mathcal{Y}(\mathcal{F}_{(r+1)})$ ;  $P$  est alors connecté dans  $\mathcal{Y}(\mathcal{F}_{(0)})$  à un point  $Q$  de  $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ .

Si l'on a un point  $P$  d'ordre  $n \leq 2$  tel que

$P \in \mathcal{Y}(\mathcal{F}_{(r)})$ , on montre que

- soit  $P \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$

- soit il existe  $Q(8)$  voisin de  $P$  tel que  $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$

On en déduit que pour tout point  $P$  tel que  $P \in \mathcal{Y}(\mathcal{F})$

on a :

- soit  $P \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$

- soit  $P$  connecté dans  $\mathcal{Y}(\mathcal{F})$  à un point  $Q$  de  $\mathcal{P}(\mathcal{F})$

D'après les 2 propriétés (Annexe 1)

-  $\mathcal{P}(\mathcal{F})$  connexe

-  $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{Y}(\mathcal{F})$

il vient que  $\mathcal{Y}(\mathcal{F})$  est connexe.

Reconstruction de  $\mathcal{F}$  à partir de  $\mathcal{Y}(\mathcal{F})$

Soit un point  $P$  d'ordre  $n_P$  dans  $\mathcal{F}_{(0)}$  tel que

$P \in \mathcal{Y}(\mathcal{F}_{(0)})$ ;  $\exists r \leq l-1$  tel que  $P \in X_{(r)}$  (Annexe 1);

on montre qu'il existe un point  $Q$  d'ordre  $n_Q$  dans  $\mathcal{F}_{(0)}$

tel que  $Q$  appartient à  $\mathcal{F}_{(r+1)}$  ou à  $\mathcal{Y}(\mathcal{F}_{(0)})$  et tel

que l'on ait  $V_{n_P}(P) \subset V_{n_Q}(Q)$ .

On en déduit que l'on a à l'itération  $r$  :

$$\mathcal{F}_{(0)} = \left[ \begin{array}{c} U \\ P \in \mathcal{F}_{(r)} \\ V_{n_P}(P) \end{array} \right] \cup \left[ \begin{array}{c} U \\ P \in \mathcal{Y}(\mathcal{F}_{(0)}) \\ P \in \mathcal{P}(\mathcal{F}_{(0)}) \\ V_{n_P}(P) \end{array} \right]$$

et ceci pour tout  $r = 1, 2, \dots, l$

D'où l'on a :

$$\mathcal{F}_{(0)} = \bigcup_{P \in \mathcal{Y}(\mathcal{F}_{(0)})} V_{n_P}(P)$$

BIBLIOGRAPHIE

- (1) C. ARCELLI, L. CORDELLA and S. LEVIALDI  
"A grassfire transformation for binary digital pictures" 2<sup>d</sup> Int. Joint Conf. on Pattern Recognition, Copenhagen (Août 74)
- (2) H. BLUM  
"A transformation for extracting new descriptors of shape" Symp. on Models for the perception of speech and visual form MIT Press (Novembre 64)
- (3) R. COFER and J. TOU  
"Preprocessing for pictorial Pattern Recognition" Artificial Intelligence, AGARD Conférence proceedings, London (71)
- (4) C. HILDEITCH  
"Linear skeletons from square cupboards" Machine Intelligence 4, American Elsevier, New York (69)
- (5) J. KOTELLY  
"A mathematical model of Blum's theory of pattern recognition" Air Force Cambridge Res. Lab. Res.

Rep. 63-164 (Avril 63)

(6) U. MONTANARI

"A method for obtaining skeletons using a quasi euclidean distance" JACM 15,4 (Octobre 68)

(7) U. MONTANARI

"Continuous skeletons from digitized images" JACM 16,4 (Octobre 69)

(8) U. MONTANARI

"A grey weighted skeleton" Information and Control 17 (70)

(9) J. PFALTZ and A. ROSENFELD

"Computer représentation of planar regions by their skeletons" Com. ACM 10 (Février 67)

(10) A. ROSENFELD and J. PFALTZ

"Sequential operations in digital picture processing" JACM 13 (Octobre 66)

(11) A. ROSENFELD

"Picture processing by computer" Academic Press (69)

(12) A. ROSENFELD

"Connectivity in digital pictures" JACM 17 (Janvier 70)

(13) R. STEFANELLI and A. ROSENFELD

"Some parallel thinning algorithms for digital pictures" JACM 18,2 (Avril 71).