

# COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 16 au 21 JUIN 75



ESTIMATION DES MOUVEMENTS DE DEUX MOBILES  
DANS UN PLAN A PARTIR DE MESURES BRUTEES  
ET ECHANTILLONNEES

B. BARBAGELATA

C. BOZZO

Laboratoire d'Automatique  
GESSy - C.U. de Toulon

GESTA-CAPCA  
DCAN de TOULON

## RESUME

Particularisant le problème général de recherche de la trajectoire d'un mobile sur lequel on ne dispose que d'informations de position incomplètes et bruitées et dont les évolutions, inconnues a priori présentent un caractère aléatoire, cette étude repose sur les faits que le mobile inconnu évolue dans un plan et que l'observation s'effectue à partir d'un autre mobile de même classe, c'est-à-dire ayant des évolutions de même nature.

La résolution du problème nécessite donc une modélisation stochastique discrète du processus et la détermination d'une trajectoire estimée par un filtre en temps discret de Kalman Bucy.

En analysant les hypothèses intervenant dans les caractérisations des mouvements, des bruits et des observations, on élabore d'abord une modélisation non linéaire du processus, pour des évolutions en  $x$  et en  $y$  corrélées dans le plan absolu.

L'estimation en temps réel du vecteur d'état - donc de la trajectoire - par un filtre non linéaire discret, tronqué à l'ordre 2 est rendue opérationnelle par l'établissement d'une relation bijective entre le plan Azimut-Distance, quadrillé en mailles élémentaires et les surfaces représentatives des composantes du gain du filtre dans l'espace (Gain, Azimut, Distance).

Pour chaque position prédite du mobile, l'appel des valeurs précalculées correspondantes du gain permet une diminution du temps de calcul dans le déroulement en temps réel de la procédure de recherche.

Cette procédure est appliquée aux configurations des mouvements de deux navires, dans l'hypothèse d'un mouvement linéaire pour le mobile inconnu.

## SUMMARY

This paper particularizes the general problem of researching the trajectory of a moving body, a priori unknown, whose evolutions bring up a stochastic description, from incomplete and noisy position informations.

It is based upon the fact that the body moves upon a plan and that the measurement data are taken from a same class moving body i.e with same kind of evolutions.

The solution of the problem requires consequently a discrete time stochastic model for the process and the determination of an estimate trajectory by a discrete Kalman Bucy filter.

After going into the assumptions on motions, noises and measures, a non-linear stochastic model, with correlated motions en  $x$  and  $y$  is determined. The quasi optimal estimation in real time of the state vector is resolved by applying a non-linear truncated second order filter and is simplified by studying the relation between the partitioned relative plane and the surfaces of the gain components in the space (Gain, Bearing, Range).

For each predicted position of the moving body the appeal of precomputed values of gain permits a reduction on the computing time.

These method is applied to the configurations of two ships, one of them having a linear trajectory.



ESTIMATION DES MOUVEMENTS DE DEUX MOBILES  
DANS UN PLAN A PARTIR DE MESURES BRUTEES  
ET ECHANTILLONNEES

1. - INTRODUCTION - PROBLEMES DE MODELISATION

1.1 - Choix du Vecteur d'Etat

La synthèse des filtres exige tout d'abord de disposer d'un modèle du processus considéré.

Ce modèle est de la forme :

$$(1) \dot{X}(t) = F X(t) + G u(t) \quad X(0) = X_0$$

L'équation de mesure étant de la forme (discrète) :

$$(2) Z_k = h(X_k) + u_k \quad \text{avec} \quad X_k = X(t_k)$$

En effet les équations de la dynamique sont par nature continues, alors que les observations sont effectuées à des instants discrets  $t_k$  puisque l'on utilise pour le filtrage un calculateur numérique.

L'équation (1) doit donc être discrétisée. La période de discrétisation  $T_e$  peut être différente de la période  $T = t_k - t_{k-1}$  d'échantillonnage des mesures. Les mesures peuvent d'ailleurs ne pas être effectuées à des instants réguliers (échantillonnage non synchrone).

Des considérations liées

- à la résolution des équations du filtre non linéaire linéarisé

- au problème d'extrapolation

conduisent à prendre pour vecteur d'état  $X(t)$ , un vecteur de coordonnées cartésiennes avec par exemple

$$(3) X^T = [x, \dot{x}, y, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y}]$$

En effet il est plus aisé d'écrire des équations d'extrapolation en coordonnées cartésiennes qu'en polaires. D'autre part la mesure étant effectuée en coordonnées polaires,  $Z_k$  est toujours un vecteur de la forme :

$$(4) Z_k = \begin{bmatrix} A \\ D \\ A \\ D \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ k \end{bmatrix}$$

Si l'on prend pour vecteur d'état  $X_k$  une fonctionnelle linéaire de  $Z_k$ , l'équation de mesure sera linéaire mais l'équation d'état sera non linéaire : en effet, les mouvements les plus simples conduisent à des équations non linéaires en polaires. Des considérations liées à la linéarisation des équations d'évolution des covariances montrent d'ailleurs que ce choix du vecteur d'état est plus défavorable que le choix d'un  $X(t)$  cartésien (problèmes de précision défini-positivité des matrices, etc ...).

Nous considérerons dans ce qui suit un vecteur d'état cartésien, et nous traiterons donc le problème du filtrage et de l'estimation dans des axes absolus.

1.2 - Equations de la dynamique

La position du mobile de référence  $L \{x_l(t), y_l(t)\}$  est une fonction connue du temps  $t$  dans un système de coordonnées géographiques  $[ox, oy]$  local. La position du mobile inconnu  $B \{x(t), y(t)\}$  est la solution au temps  $t$  pour  $t \in [0, T]$  du système d'équations différentielles.

$$(5) \vec{v}_n \begin{cases} \frac{d^n x}{dt^n} = a_x(t) \\ \frac{d^n y}{dt^n} = a_y(t) \end{cases}$$

avec les conditions initiales  $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \left| \begin{cases} \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \\ \dot{y}(0) = \dot{y}_0 \end{cases} \right.$  etc

qui définissent le vecteur d'état initial pour  $B$  (position, vitesse, accélération ...)

a) Description de la trajectoire du mobile poursuivi

On fait l'hypothèse que le vecteur  $\vec{v}_n$  est une fonction du temps inconnue de moyenne nulle. Nous allons considérer à titre d'exemple le cas où  $n = 2$  (accélération  $\vec{v}_2 \equiv \vec{\Gamma}$ ). Les raisonnements effectués présenteront un caractère général.

On pose :

$$(6) \begin{cases} \dot{a}_x(t) = u_1(t) \\ \dot{a}_y(t) = u_2(t) \end{cases}$$

$u_1(t)$  et  $u_2(t)$  étant des processus gaussiens markoviens centrés

$$(7) \begin{cases} E [u_i(t)] = 0 & (i = 1, 2) \\ E [u_i(t) u_j(s)] = Q_{ij} \delta(t-s) & (i, j = 1, 2) \end{cases}$$

La matrice  $Q$  ainsi définie est la matrice de covariance du processus  $u(t)$  avec :

$$U^T(t) = [u_1(t), u_2(t)]$$

Suivant que  $Q$  est ou non diagonalisée, on admet ou non qu'il existe une "corrélacion" entre les évolutions du mobile  $B$  suivant les deux axes. Il est évident que le cas où l'on considère l'hypothèse de corrélacion est le plus intéressant, et nous adopterons donc cette hypothèse dans ce qui suit, le cas des coordonnées décorréliées étant traité comme un cas particulier.



ESTIMATION DES MOUVEMENTS DE DEUX MOBILES  
DANS UN PLAN A PARTIR DE MESURES BRUTEES  
ET ECHANTILLONNEES

On peut noter dès maintenant que chaque type de trajectoire correspondra à une valeur ou un ensemble de valeurs du terme de l'antidiagonale de Q (qui est symétrique). Le filtre doit donc être adaptatif ; dans le cas contraire, il est réglé pour une certaine classe de trajectoires. Les corrélations pour ces trajectoires types peuvent être facilement obtenues par le calcul ou en simulation.

b) Processus à accélérations décrites par des mouvements stationnaires browniens

Les processus  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$  les plus simples sont obtenus quand on choisit pour  $\dot{a}_x$  et  $\dot{a}_y$  des bruits blancs gaussiens de moyenne nulle.

On peut alors facilement montrer que les composantes  $a_x(t)$  et  $a_y(t)$  sont des processus de Wiener de moyenne nulle : l'accélération (ici  $n = 2$ ) est donc un processus de Wiener vectoriel centré dont la matrice de covariance est :

$$Q \min(t, \tau)$$

c) Processus à accélérations corrélées

On peut également faire l'hypothèse que  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$  sont des processus gaussiens Markoviens décrits par leurs fonctions de corrélation  $\varphi_{u_1 u_1}, \varphi_{u_2 u_2}$  et  $\varphi_{u_1 u_2}$ .

Si l'on fait par exemple l'hypothèse que le processus vectoriel  $U(t)$  est stationnaire centré, on sait qu'il est possible de déterminer une infinité de réalisations markoviennes de ce processus :

$$(8) \quad \begin{cases} \dot{\xi} = F_{\xi} \xi + w_{\xi} \\ u = H_{\xi} \xi + v_{\xi} \end{cases}$$

où  $\begin{bmatrix} w_{\xi} \\ v_{\xi} \end{bmatrix}$  est un bruit blanc de covariance

$$E \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{\xi}(t) \\ v_{\xi}(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} w_{\xi}^T(s) & v_{\xi}^T(s) \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{\xi} & S_{\xi} \\ S_{\xi}^T & R_{\xi} \end{bmatrix} \delta(t-s)$$

avec  $F_{\xi}$  matrice asymptotiquement stable  
(F, L) paire complètement commandable } avec  $Q=LL^T$   
(H, F) paire complètement observable

$$(9) \quad \varphi_{uu}(\tau) = E | u(t+\tau) u^T(t) |$$

$$= H_{\xi} e^{F_{\xi} \tau} T_{\xi} \varepsilon(\tau) + T_{\xi}^T e^{-F_{\xi} \tau} H_{\xi}^T \varepsilon(-\tau) + R_{\xi} \delta(\tau)$$

avec  $T_3 = \varphi_{\xi\xi}(0) H_{\xi}^T + S$  (10)

$$\text{et } \varepsilon(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } \tau = 0 \\ 1 & \text{si } \tau > 0 \end{cases}$$

L'ensemble des réalisations markoviennes du processus  $u(t)$  de fonction  $\varphi_{uu}(\tau)$  donnée est caractérisé par les équations (8) et l'ensemble des matrices  $\varphi_{\xi\xi}, Q$  (symétriques) et  $S$  telles que :

$$F_{\xi} \varphi_{\xi\xi} + \varphi_{\xi\xi} F_{\xi}^T = -Q_{\xi} = L_{\xi} L_{\xi}^T$$

$$T_{\xi} - \varphi_{\xi\xi} H_{\xi}^T = S_{\xi} = L_{\xi} J_{\xi}^T \quad R_{\xi} = J_{\xi} J_{\xi}^T$$

$$\begin{vmatrix} Q_{\xi} & S_{\xi} \\ S_{\xi}^T & R_{\xi} \end{vmatrix} \geq 0 \quad \varphi_{\xi\xi} \geq 0$$

Le spectre de  $u(t)$  est alors de la forme :

$$\varphi_{uu}(p) = H_{\xi} (pI - F_{\xi})^{-1} T_{\xi} + T_{\xi}^T (-pI - F_{\xi}^T)^{-1} H_{\xi}^T + R_{\xi}$$

Il peut s'écrire sous la forme (factorisation faible)

$$\varphi_{uu}(p) \equiv \begin{bmatrix} J_{\xi} + H_{\xi} (pI - F_{\xi})^{-1} L_{\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{\xi}^T + L_{\xi}^T (-pI - F_{\xi}^T)^{-1} H_{\xi}^T \end{bmatrix}$$

$J_{\xi} + H_{\xi} (pI - F_{\xi})^{-1} L_{\xi}$  est le filtre formateur associé au processus  $u(t)$ . Si l'entrée de ce filtre est un vecteur de bruit blanc la sortie est le processus  $u(t)$  considéré. On est donc ramené au cas précédent.

A titre d'exemple nous traiterons, pour une coordonnée seulement, le cas où  $a_x(t)$  et  $a_y(t)$  sont des processus dont les fonctions de corrélation sont de la forme :

$$\varphi_{u_i u_i}(\tau) = \sigma_{Q_i}^2 e^{-\alpha_i |\tau|}$$

Problème posé par la caractérisation choisie pour les évolutions du mobile poursuivi

Nous nous placerons par exemple en axes absolus (Cf. 1.3) et en coordonnées cartésiennes.

Le modèle adopté pour  $n = 2$  exige que l'accélération  $\Gamma$  soit un processus vectoriel stationnaire de moyenne nulle. Ceci n'est manifestement pas vérifié en coordonnées polaires même pour des mouvements très simples des mobiles L et B : trajectoires rectilignes décrites à vitesse constante. C'est une raison complémentaire pour éliminer la description des équations de dynamique en coordonnées polaires.

En coordonnées cartésiennes cette hypothèse n'est vérifiée que pour certaines classes de mouvement. Elle peut être vérifiée sur un horizon d'observation important, mais ne l'est souvent pas sur un horizon plus limité (mobile en accélération ou en décélération). On est donc conduit :

- à adopter un vecteur d'état tel que ces hypothèses soient vérifiées pour la classe de trajectoires concer-

ESTIMATION DES MOUVEMENTS DE DEUX MOBILES  
DANS UN PLAN A PARTIR DE MESURES BRUTEES  
ET ECHANTILLONNEES

née). Nous en donnerons des exemples, mais il faut noter que ceci conduit souvent à introduire de nouvelles non linéarités

- à augmenter l'ordre  $n$  de manière que  $\vec{V}_n$  réponde effectivement aux hypothèses de la caractérisation

- à rendre les filtres adaptatifs

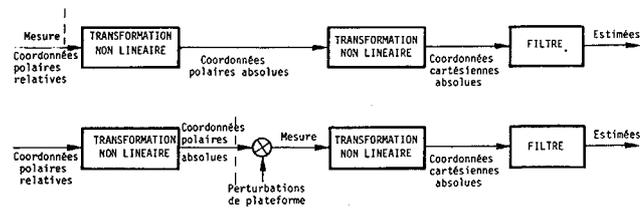
- à écrire une équation d'évolution de la dynamique de la forme :

$$\dot{X} = f(X, u)$$

Dans chacune de ces quatre éventualités on complique très notablement l'opération de synthèse des filtres.

1.3 - Plateforme de référence - Filtrage en axes absolus ou relatifs

Le filtrage peut être effectué en axes absolus ou en axes relatifs. Dans le cas des axes absolus nous considérerons une plateforme stabilisée et un repère orthonormé {axe des  $z \equiv$  verticale ; axe des  $x \equiv$  Est ; axe des  $y \equiv$  Nord}. Les mesures sont effectuées en coordonnées polaires relatives et il existe donc des perturbations de mouvement de plateforme (Roulis, Tangage, lacet, pilonnement, cavalement, embardée) qui conduisent à effectuer des changements de coordonnées et introduisent une non linéarité supplémentaire au niveau de la mesure. Une solution approchée pourra consister à envisager les mouvements de plateforme comme une perturbation entachant les coordonnées polaires absolues considérées fictivement comme étant la mesure :



Le problème est naturellement beaucoup plus simple dans le plan.

Si le filtrage est effectué en axes relatifs on évite bien entendu cette difficulté. Par contre la description de la dynamique est délicate à effectuer dans un repère cartésien ou surtout dans le repère polaire considéré (qu'il est assez naturel d'utiliser). Le filtre peut donc être linéaire, mais en fait la description des évolutions du mobile poursuivi n'est que très imparfaite. Il faut d'autre part estimer ou mesurer les vitesses et accélérations d'entraînement,

ce qui peut conduire à des capteurs précis et onéreux (gyromètres par exemple) ou à des filtres complémentaires.

1.4 - Equation de mesure

Nous avons fait l'hypothèse simplificatrice d'un bruit  $v_k$  additif. En fait le bruit :

- peut ne pas être additif

- est la discrétisation d'un bruit de mesure blanc ou coloré mais continu

- peut ne pas être stationnaire

- peut contenir des termes introduits en raison d'une simplification de la modélisation des équations de dynamique (Cf. 1.3) ou de mesure.

Dans une chaîne de poursuite, qui est en général un asservissement en boucle fermée, l'origine du bruit réside dans le senseur qui détecte un écart. Même si le bruit au niveau du senseur est Gaussien Markovien, les nombreuses non-linéarités de la chaîne de poursuite font qu'il ne l'est certainement plus au niveau des mesures des coordonnées polaires du mobile poursuivi. D'autre part, les processus physiques mis en jeu pour mesurer les angles et la distance étant complètement différents, la "structure" des bruits est elle même différente. Enfin les bruits ne sont pas en général stationnaires et varient avec le rapport signal/bruit et donc avec la distance etc ...

On prendra en général un modèle de bruit additif simple, blanc ou coloré, déterminé à partir de mesures effectuées en poursuite ou en simulation sur le modèle de connaissance de la boucle de poursuite considérée. L'approximation effectuée sera Gaussienne Markovienne.

Dans certains cas (déplacement du point brillant Radar par exemple), il peut être nécessaire de tenir compte d'un biais dans la mesure et de l'identifier. Si ce biais n'est pas constant il faut alors en donner une description probabiliste et le filtre doit être adaptatif.

1.5 - Etude du problème plan - Problème général et cas particuliers

Le problème sera dit général quand on dispose de mesures des deux coordonnées polaires. Le vecteur de mesure est de la forme :

$$Z_k = \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix}_k$$



ESTIMATION DES MOUVEMENTS DE DEUX MOBILES  
DANS UN PLAN A PARTIR DE MESURES BRUTEES  
ET ECHANTILLONNEES

1.51 - Deux cas particuliers importants de ce problème sont :

a) Le cas où l'on ne dispose pas d'une mesure de D en permanence : perte de distance, goniométrie, poursuite optique. La mesure est alors scalaire et le filtre doit être initialisé et réinitialisé avec une estimée de D.

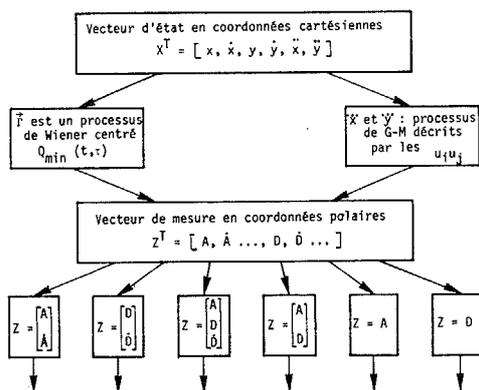
b) Le cas où l'on ne dispose pas de mesure angulaire en permanence : croisement, mémoire angulaire, poursuite à site calé (pour les problèmes tridimensionnels).

Les problèmes a et b sont indéterminés pour certaines trajectoires des mobiles L et B. L'estimation de la valeur initiale a alors une très grande importance. La convergence de la méthode de filtrage doit également toujours être assurée. Les problèmes de réinitialisation sont en général complexes.

1.52 - Une deuxième espèce de cas particulier est constituée par les problèmes où l'on dispose des mesures de A et D et  $\dot{D}$  (Doppler par exemple) et plus rarement de  $\dot{A}$ . Les informations sont alors redondantes et permettent des initialisations et des détections d'évolutions plus efficaces. Là aussi les problèmes a et b peuvent se poser.

1.6 - Conclusion

Le schéma ci-dessous résume les choix possibles pour la modélisation et les différents vecteurs de mesure.



Parmi ces différents cas, nous avons traité plus particulièrement celui où l'on ne dispose que d'une mesure d'azimut, en élaborant les caractéristiques d'un filtre non linéaire tronqué.

2. - MODELISATION STOCHASTIQUE DU PROBLEME

Dans les hypothèses retenues en 1.1 et 1.2 le modèle mathématique du problème est :

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 \\ x_2 &= x_5 \\ x_3 &= x_4 \\ x_4 &= x_6 \\ x_5 &= u_1(t) \\ x_6 &= u_2(t) \end{aligned}$$

l'équation d'état du mouvement de B est de la forme :

$$(2.1) \quad \dot{X} = F X + G u(t) \quad , \quad x(0) = X_0$$

avec

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\dot{x}_5 = u_1(t) \quad \dot{x}_6 = u_2(t)$$

ou encore sous forme d'équation différentielle de ITO

$$(2.2) \quad dX_t = F X_t dt + G d\beta_t \quad t > t_0$$

avec  $\beta(t), t > t_0$  processus vectoriel de Wiener ;  
 $E [ d\beta_t d\beta_t^T ] = Q(t) dt$

Le processus de Markov discret délivrant un signal  $X_k$  possédant les mêmes propriétés statistiques que  $X(t_k)$  est obtenu par intégration de l'équation différentielle vectorielle de ITO (1.11), sur l'intervalle  $[t_k, t_{k+1}]$

On obtient, en posant  $X_k = X_{t_k} = X(t_k)$

$$(2.3) \quad X_{k+1} = \phi(t_{k+1}, t_k) X(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \phi(t_{k+1}, \theta) G(\theta) d\beta_\theta$$

$\phi(t_0, t)$ , matrice de transition du système de ITO est définie dans le cas stationnaire par  $\phi = e^{FT}$  avec  $T = t_{k+1} - t_k$  période d'échantillonnage.

En remarquant que  $F^n = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \end{bmatrix}$  ( $n = 3, 4, 5 \dots$ ) le développement en série de cette exponentielle de matrice donne :

$$(2.4) \quad \phi = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 & T^2/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T & 0 & T^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



ESTIMATION DES MOUVEMENTS DE DEUX MOBILES  
DANS UN PLAN A PARTIR DE MESURES BRUTEES  
ET ECHANTILLONNEES

Le bruit sur la dynamique est défini par :

$$\epsilon_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \phi(t_{k+1}, \theta) G(\theta) d\beta_\theta$$

On peut montrer facilement que  $\epsilon_k$  est une séquence gaussienne blanche à moyenne nulle dont la matrice de covariance  $Q_k$  est donnée par :

$$Q_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \phi(t_{k+1}, \theta) G Q(\theta) G^T \phi^T(t_{k+1}, \theta) d\theta$$

$$(2.5) \quad Q_k = \int_0^T e^{F\theta} G Q G^T e^{F^T\theta} d\theta \quad \text{avec } Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{bmatrix}$$

et par calcul direct  $\phi$ , la matrice  $F$  n'étant pas stable.

$$Q_k = \begin{bmatrix} q_1 \frac{T^5}{20} & q_1 \frac{T^4}{8} & q_2 \frac{T^5}{20} & q_2 \frac{T^4}{8} & q_1 \frac{T^3}{6} & q_2 \frac{T^3}{6} \\ q_1 \frac{T^4}{8} & q_1 \frac{T^3}{3} & q_2 \frac{T^4}{8} & q_2 \frac{T^3}{3} & q_1 \frac{T^2}{2} & q_2 \frac{T^2}{2} \\ q_3 \frac{T^5}{20} & q_3 \frac{T^4}{8} & q_4 \frac{T^5}{20} & q_4 \frac{T^4}{8} & q_3 \frac{T^3}{6} & q_4 \frac{T^3}{6} \\ q_3 \frac{T^4}{8} & q_3 \frac{T^3}{3} & q_4 \frac{T^4}{8} & q_4 \frac{T^3}{3} & q_3 \frac{T^2}{2} & q_4 \frac{T^2}{2} \\ q_1 \frac{T^3}{6} & q_1 \frac{T^2}{2} & q_2 \frac{T^3}{6} & q_2 \frac{T^2}{2} & q_1 T & q_2 T \\ q_3 \frac{T^3}{6} & q_3 \frac{T^2}{2} & q_4 \frac{T^3}{6} & q_4 \frac{T^2}{2} & q_3 T & q_4 T \end{bmatrix}$$

L'équation de mesure discrète est de la forme:

$$Z_k = h(X_k) + v_k \quad \text{avec } X_k = X(t_k)$$

$$(2.6) \quad h(X) = h(x, y, x_\rho, y_\rho) = \text{Arctg} \frac{x - x_\rho}{y - y_\rho}$$

et  $v_k$  est une séquence gaussienne blanche à moyenne nulle :  $v_k \sim N(0, R_k)$   
( $R_k$  est ici un scalaire)

3. - DETERMINATION DU FILTRE NON LINEAIRE TRONQUE

Le modèle discret étant établi, il s'agit maintenant d'établir un filtre discret de type Kalman-Bucy dont la structure non linéaire est imposée par la forme de l'équation de mesure du modèle.

Dans l'intervalle  $((k-1)T, kT)$  le modèle est linéaire. On peut écrire immédiatement les équations du filtre entre deux instants d'échantillonnage, compte tenu des hypothèses sur les séquences  $\{X_o\}$  et  $\{\epsilon_k\}$

$$\hat{X}_{k,k-1} = E [X_k | Y_{k-1}]$$

$$P_{k,k-1} = E \left\{ \left[ \phi X_{k-1} + \epsilon_{k-1} \right] \left[ \phi X_{k-1} + \epsilon_{k-1} \right]^T | Y_{k-1} \right\}$$

Soit (avec les notations classiques du filtrage de Kalman-Bucy) :

$$(3.1) \quad \hat{X}_{k,k-1} = \phi \hat{X}_{k-1, k-1}$$

$$(3.2) \quad P_{k,k-1} = \phi P_{k-1, k-1} \phi^T + Q_{k-1}$$

avec  $\hat{X}_{k,k-1}$  estimée du vecteur  $X$  à l'instant  $t_k = kT$  connaissant l'état jusqu'à  $t_{k-1}$  (prédiction)

$\hat{X}_{k-1, k-1}$  estimée de  $X$  à  $t_{k-1}$  connaissant l'état jusqu'à  $t_{k-1}$

$P_{k,k-1}$  matrice de covariance à  $t_k$  de l'erreur sur le vecteur prédit

$P_{k-1, k-1}$  matrice de covariance à  $t_{k-1}$  de l'erreur sur le vecteur estimée à  $t_{k-1}$

avec  $Y_{k-1} = \{Z_\rho, 1 \leq \rho \leq k-1\}$

Le modèle devient non linéaire à l'instant d'observation et il est nécessaire d'étudier la densité de probabilité conditionnelle.

La solution du problème de filtrage non linéaire est connue dès lors que l'on connaît la moyenne conditionnelle, qui est l'estimée à minimum de variance, et la matrice de covariance, qui rend compte de l'erreur d'estimation.

Leurs équations d'évolution dépendent de tous les moments de la densité conditionnelle. Cette densité, non représentable par un ensemble fini de paramètres est solution d'une équation aux différences de type fonctionnelle intégrale qu'il est impossible de résoudre pratiquement. Aussi est-il nécessaire d'envisager une approximation de cette densité conditionnelle.

Notre étude fait l'hypothèse d'une paramétrisation de la densité conditionnelle à partir de ses moments, en négligeant les moments centrés à partir de l'ordre 3. Cette approximation, valable si la densité est pratiquement symétrique et a une faible variance nous permet de développer un filtre non linéaire tronqué à l'ordre deux.

Si l'on admet la règle de Bayes, l'équation aux différences pour la densité conditionnelle, s'écrit à l'instant d'observation.

$$(3.3) \quad p [X_k | Y_k] = \frac{p(Z_k | X_k) p(X_k | Y_{k-1})}{p(Z_k | Y_{k-1})}$$

avec  $Y_k = \{Z_\rho, \rho = 1, k\}$

comme :

$$p(Z_k | X_k) = p(Z_k | X_k, Y_{k-1})$$



ESTIMATION DES MOUVEMENTS DE DEUX MOBILES  
DANS UN PLAN A PARTIR DE MESURES BRUTEES  
ET ECHANTILLONNEES

$$\text{et } p(Z_k | X_k, Y_{k-1}) p(X_k | Y_{k-1}) = p(X_k, Z_k | Y_{k-1})$$

(3.3) devient :

$$p(X_k, Z_k | Y_{k-1}) = p(X_k | Y_k) p(Z_k | Y_{k-1})$$

Introduisons deux fonctions auxiliaires

$s(X_k)$  et  $u(Z_k)$ .

L'évolution des moments à l'instant d'observation est caractérisée par :

$$(3.4) \quad E \left[ s(X_k) u(Z_k) | Y_{k-1} \right] = E \left[ E \left[ s(X_k) | Y_k \right] u(Z_k) | Y_{k-1} \right]$$

Cette équation qui lie les moments à une observation et après une observation permet, en explicitant les fonctions  $s(\cdot)$  et  $u(\cdot)$  le calcul des formules du filtre à une observation.

Posons :  $\hat{X}_{k,k} = A + B(Z_k - \hat{Z}_{k,k-1})$  et  $P_{k,k} = C$

et déterminons A, B, C par le jeu des fonctions auxiliaires.

Si  $s(X_k) = X_k$  et  $u(Z_k) = 1$

(3.4) devient :

$$\hat{X}_{k,k-1} = E \left[ \hat{X}_{k,k} | Y_{k-1} \right]$$

si  $s = X_k$  et  $u = Z_k - \hat{Z}_{k,k} = h - h(\hat{X}_{k,k} + v_k)$

(3.4) devient :

$$E \left[ X_k (Z_k - \hat{Z}_{k,k-1}) | Y_{k-1} \right] = E \left[ \hat{X}_{k,k} (Z_k - \hat{Z}_{k,k-1}) | Y_{k-1} \right]$$

Si  $s = \begin{bmatrix} X_k - \hat{X}_{k,k} \\ X_k - \hat{X}_{k,k} \end{bmatrix}^T$  et  $u = 1$

(3.4) devient :

$$E \left\{ \begin{bmatrix} X_k - \hat{X}_{k,k} \\ X_k - \hat{X}_{k,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_k - \hat{X}_{k,k} \\ X_k - \hat{X}_{k,k} \end{bmatrix}^T | Y_{k-1} \right\} = E \left[ P_{k,k} | Y_{k-1} \right]$$

Compte-tenu des expressions posées a priori pour  $X_{k,k}$  et  $P_{k,k}$  il vient :

$$A = \hat{X}_{k,k-1}$$

$$B = \left[ (\hat{X}h)^T - \hat{X} \hat{h}^T \right] \left[ (h-\hat{h}) (h-\hat{h})^T + R \right]^{-1}$$

$$C = P_{k,k-1} - \left[ (\hat{X}h)^T - \hat{X} \hat{h}^T \right] \left\{ \left[ (h-\hat{h}) (h-\hat{h})^T \right] + R \right\}^{-1} \begin{bmatrix} (\hat{h} X^T) - \hat{h} \hat{X}^T \end{bmatrix}$$

avec  $\hat{\varphi} = [\hat{\varphi}]^T = E [\varphi(X_k) | Y_{k-1}]$

La fonction de mesure  $h$  étant évaluée à l'instant  $t_k$ .

Les difficultés de calcul des espérances mathématiques, dues à la non-linéarité de la fonction de mesure scalaire à argument vectoriel  $h(X)$  nous ont

amené à remplacer  $h(X)$  par son développement en série au voisinage de la moyenne conditionnelle, arrêté à l'ordre 2. (3.5).

$$h(X) = h(\hat{X}) + h_X^T(\hat{X})(X-\hat{X}) + \frac{1}{2} h_{XX}(\hat{X}) : (X-\hat{X})(X-\hat{X})^T$$

en posant : (3.6)

$$h_X(X) = \left[ \frac{\partial h}{\partial X_i} \right]_{i=1,6} ; h_{XX}(X) = \left[ \frac{\partial^2 h}{\partial X_i \partial X_j} \right] \quad (i, j = 1, 6)$$

$$h_{XX}(\hat{X}) : (X-\hat{X})(X-\hat{X})^T = (X-\hat{X})^T h_{XX}(\hat{X})(X-\hat{X})$$

$$= \text{trace de } \left[ h_{XX}(\hat{X}) \left[ (X-\hat{X})(X-\hat{X})^T \right] \right] \quad (3.7)$$

Tous calculs d'espérance effectués, le filtre non linéaire discret, tronqué à l'ordre 2 a pour équations, à un instant d'observation

(3.8)

$$\hat{X}_{k,k} = \hat{X}_{k,k-1} + K_{k,k-1} \left[ Z_k - h(\hat{X}_{k,k-1}) - \frac{1}{2} |P:h_{XX}|_{k,k-1}^2 \right]$$

$$P_{k,k} = P_{k,k-1} - K_{k,k-1} H_{k,k-1} P_{k,k-1} \quad (3.9)$$

(3.10)

$$Y_{k,k-1} = H_{k,k-1} P_{k,k-1} H_{k,k-1}^T + R_k - \frac{1}{4} [P:h_{XX}]_{k,k-1}^2$$

$$K_{k,k-1} = P_{k,k-1} H_{k,k-1}^T \left[ Y_{k,k-1} \right]^{-1} \quad (3.11)$$

avec  $H_{k,k-1} = h_X^T(\hat{X}_{k,k-1})$

$$[P:h_{XX}]_{k,k-1} = P_{k,k-1} : h_{XX}(\hat{X}_{k,k-1}) \quad (3.12)$$

$$= \sum_{i,j=1}^6 (P_{k,k-1})_{ij} \left[ h_{XX}(\hat{X}_{k,k-1}) \right]_{i,j}$$

On peut linéariser ce filtre, le cas échéant, en négligeant le terme quadratique du développement en série de la fonction de mesure non linéaire.

$$\hat{X}_{k,k} = \hat{X}_{k,k-1} + K_{k,k-1} \left[ Z_k - h(\hat{X}_{k,k-1}) \right] \quad (3.13)$$

$$P_{k,k} = P_{k,k-1} - K_{k,k-1} H_{k,k-1} P_{k,k-1} \quad (3.14)$$

$$K_{k,k-1} = P_{k,k-1} H_{k,k-1}^T Y_{k,k-1}^{-1} \quad (3.15)$$

$$Y_{k,k-1} = H_{k,k-1} P_{k,k-1} H_{k,k-1}^T + R \quad (3.16)$$

Pour appliquer le filtre (3.8) à (3.12) au modèle défini en 2, il faut déterminer les éléments de ses équations.

De la fonction de mesure :

$$h(X) = \text{Arctg} \left[ (X_1 - x_2) / (X_3 - y_2) \right]$$

on déduit, en posant :

ESTIMATION DES MOUVEMENTS DE DEUX MOBILES  
DANS UN PLAN A PARTIR DE MESURES BRUTEES  
ET ECHANTILLONNEES

(3.17)  $r = [(X_1 - x_\ell)^2 + (X_3 - y_\ell)^2]^{1/2}$  distance des deux mobiles.

$$(3.18) \quad H(X) = [r^{-2}(X_3 - y_\ell), 0, -r^{-2}(X_1 - x_\ell), 0, 0, 0]$$

(3.19)

$$\psi(X) = h_{XX:P} = 2 r^{-4} \left\{ (X_1 - x_\ell) (X_3 - y_\ell) (P_{33} - P_{11}) + [(X_1 - x_\ell)^2 - (X_3 - y_\ell)^2] P_{13} \right\}$$

Si  $\hat{Z}$  représente l'azimut sans bruit de mesure,  $\hat{Z} = h(X)$ , (3.18) et (3.19) s'écrivent encore :

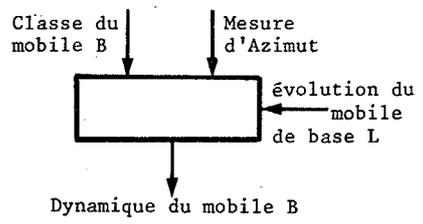
$$(3.20) \quad H(X) = H(r, \hat{Z}) = [r^{-1} \cos \hat{Z}, 0, -r^{-1} \sin \hat{Z}, 0, 0, 0]$$

(3.21)

$$\psi(X) = \psi(r, \hat{Z}) = -r^{-2} [\sin 2 \hat{Z} (P_{11} - P_{33}) + 2 P_{13} \cos 2 \hat{Z}]$$

4. - ALGORITHME DE RECHERCHE DE TRAJECTOIRE

Il s'agit de déterminer à chaque instant, selon le schéma :



d'une part la position et le vecteur vitesse du mobile B dans un repère absolu et d'autre part l'azimut et distance par rapport au mobile L dont on connaît les évolutions de façon idéale.

L'algorithme doit permettre un calcul en temps réel et la valeur choisie pour la période de discrétisation et de masse - 1 seconde - donne un ordre de grandeur du temps de calcul maximal admissible.

L'exploitation du filtre élaboré en 3 fournit la base de l'algorithme.

Une estimation du vecteur d'état  $X_k$  - qui caractérise la dynamique du mobile B est donnée par (3.8) aux instants d'échantillonnage et par (3.1) entre ces instants. On déduit de cette estimation les positions et vitesses de B.

Le pseudo gain K (3.11) est choisi non évolutif : sa valeur asymptotique est recalculée pour chaque observation, connaissant une valeur prédite du vecteur d'état (3.1), par (3.9) (3.10) (3.2).

Une justification quantitative de l'estimation est donnée par la matrice de covariance d'erreur (3.10).

L'implantation directe de cet algorithme sur un ordinateur est d'un intérêt pratique faible, compte tenu du volume et du temps de calcul qu'il met en oeuvre.

En effet, l'obtention, à chaque instant d'observation du gain asymptotique  $K_{k,k-1}$  alourdit considérablement le calcul. Si l'on suppose que :

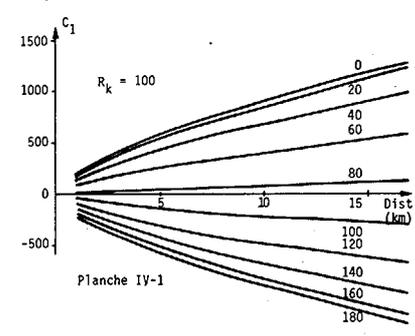
- l'espace relatif, paramétré en azimut Z et en distance r est représentable par un ensemble de domaines élémentaires (ou mailles) de grandeur donnée.

- le gain reste constant dans tout domaine de variation de (Z, r) inclus dans une maille de la partition du plan (r, Z),

on peut établir une correspondance entre l'espace relatif et l'ensemble des valeurs possibles du gain. Si  $r \in [1, 20 \text{ km}]$ ,  $Z \in [0, 180^\circ]$ , la maille étant un rectangle de côtés :  $\Delta r = 1 \text{ km}$ ,  $\Delta Z = 20^\circ$  il y aura 200 valeurs du gain soit 1 200 nombres à mémoriser.

Ces valeurs  $K(r_i, Z_j)$  du gain sont pré-calculées - (3.2), (3.9) à 3.12) - par un programme indépendant et rangées dans une mémoire à accès direct.

La planche (IV.1) représente une des sections de la surface  $S = S(C_i, r, Z) - C_i$  étant la ième composante du gain - par les plans  $Z = \text{constante}$ . Elles permettent une approche qualitative de la sensibilité du filtre en fonction des paramètres r et Z. De plus elles sont assez facilement représentables par des fonctions analytiques simples continues, ce qui permettrait de réduire le volume de mémoire utilisé.



La lecture du gain, en cours d'estimation, nécessite une normalisation de la distance et de l'azimut prédit, dont dépendent H et  $\psi$  (3.20) (3.21).

$$r_{\text{norm}} = 1\,000 \times \text{Partie Entière} (r/1\,000)$$

$$Z_{\text{norm}} = 20 \times \text{Partie Entière} (Z/20)$$

L'initialisation retenue pour le vecteur d'état nécessite 3 mesures d'azimut et une de distance

$$X_0 = X(3T) = [D \sin(\Sigma Z/3), D \cos(\Sigma Z/3), V_x, V_y, 0, 0]$$

$$\text{et } P_{0,0} = C [I]$$



ESTIMATION DES MOUVEMENTS DE DEUX MOBILES  
DANS UN PLAN A PARTIR DE MESURES BRUTEES  
ET ECHANTILLONNEES

L'organigramme de l'algorithme de recherche de trajectoire est représenté sur la planche IV.2.

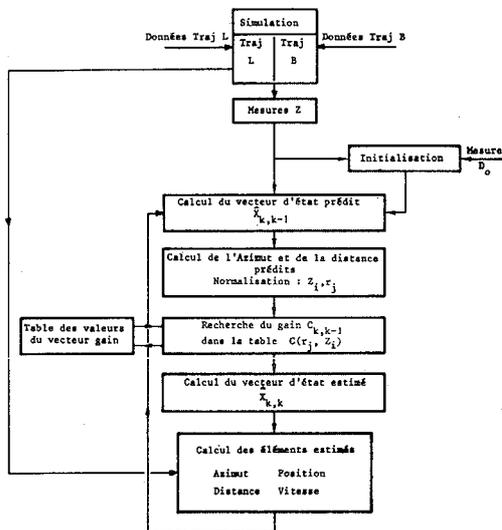


PLANCHE IV.2

5. - EXPERIMENTATION

L'algorithme, expérimenté en simulation sur ordinateur CII IRIS 50 sur un certain nombre de configurations de trajectoires a donné des résultats matérialisés sur les planches suivantes.

Pour un certain nombre de trajectoires du mobile qui effectue les mesures, l'algorithme diverge au bout d'un temps qui varie de 400 à 600 et 900 secondes

Une étude supplémentaire pourrait donc être envisagée qui traiterait de la réinitialisation de l'algorithme en fonction de l'évolution du processus d'innovation  $z - \hat{z}$ .

6. - CONCLUSION

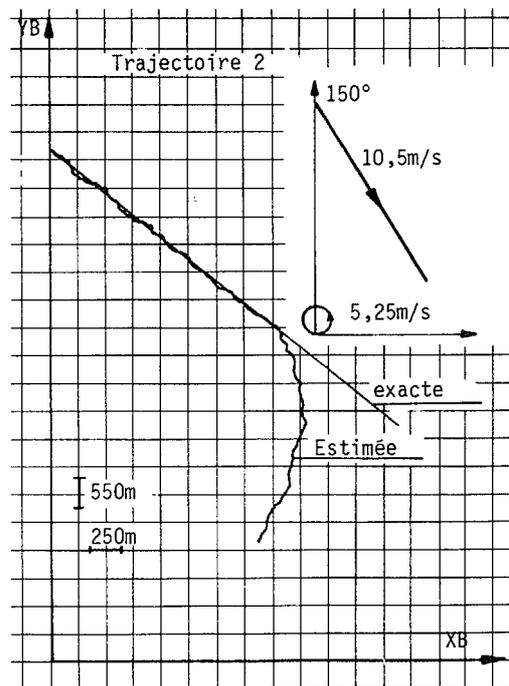
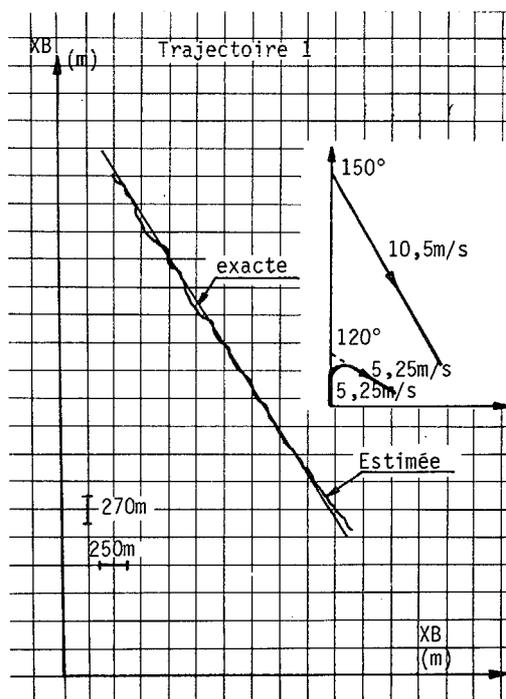
La caractérisation de la trajectoire d'un mobile est un problème très important de navigation, aérienne, spatiale ou maritime.

En navigation maritime de surface, donc dans un repère à deux dimensions, il s'agit, à partir de mesures, en général angulaires et plus rarement de distance, de reconstituer ou de prédire les mouvements d'un navire.

Une des difficultés essentielles du problème consiste en la modélisation des évolutions des deux mobiles et des bruits de mesures. Un modèle stochastique à accélérations corrélées a été analysé et exploité et il semble conduire à des résultats très intéressants tant sur le plan théorique qu'au niveau des performances de filtrage.

L'utilisation d'une forme simplifiée du filtre non linéaire a permis l'estimation directe des éléments de la trajectoire et une analyse du comportement de ce filtre a montré comment diminuer de façon appréciable le temps de calcul "on-line".

Ces méthodes ont été appliquées avec succès en simulation sur calculateur numérique IRIS 50 et des programmes ont permis d'une part de créer des données numériques réalistes, d'autre part de vérifier les résultats obtenus, sur un très grand nombre de cas concrets.



ESTIMATION DES MOUVEMENTS DE DEUX MOBILES  
DANS UN PLAN A PARTIR DE MESURES BRUTEES  
ET ECHANTILLONNEES

---

BIBLIOGRAPHIE

C. BOZZO ; W. LEGRAND - Modélisation et identification des systèmes linéaires stochastiques - Quatrième colloque sur le traitement du signal et ses applications NICE 1973

R.W. BASS ; V.D. NORUM - Non linear filtering and target motion analysis : A practical implementation - Proceedings of third Symposium on non linear estimation theory and its applications - San Diego 1972

R.S. BUCY ; P.D. JOSEPH - Filtering for stochastic process with application to guidance - John Wiley and Co - New-York

R.H. JAZWINSKI - Stochastic Process and Filtering Theory - Academic Press - New-York

C. BOZZO - Cours d'Automatique DEA - Nice 1972

B. BARBAGELATA - Caractérisation des mouvements de deux mobiles dans un plan à partir de mesures relatives bruitées et échantillonnées - Application de méthodes de filtrage optimal - Thèse de 3<sup>ème</sup> cycle - Marseille - 1974.