

COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 16 au 21 JUIN 75



Application de méthodes récursives de filtrage non-linéaire à l'estimation de la phase d'un signal sinusoïdal fortement bruité.

M. LAMBLA Jean-Luc.

IRIA-LABORIA, Domaine de Voluceau-Rocquencourt, 78150 LE CHESNAY. / ENSTA, Bd Victor, 75015 PARIS.

RESUME

On présente le principe d'un dispositif interférométrique destiné à établir une carte des sources de rayonnement électromagnétique du ciel à partir de signaux radioastronomiques captés par deux antennes. Le problème revient à celui de l'estimation de la phase d'un signal sinusoïdal fortement bruité, la phase étant elle-même soumise à de faibles fluctuations autour d'une valeur moyenne constante.

Le traitement proposé est basé sur une approximation de la solution du problème de filtrage non-linéaire optimal. La densité de probabilité de la phase du signal sinusoïdal connaissant les observations passées est, après normalisation, solution d'une équation aux dérivées partielles de type parabolique linéaire. La résolution numérique de cette équation est faite à l'aide d'une approximation mixte éléments finis - différences finies, qui conduit à un système linéaire tridiagonal.

Des tests de simulation et de comparaison avec le filtre de Kalman-Bucy étendu ont été effectués sur ordinateur IRIS 80. Les résultats permettent de conclure qu'en présence de bruit important, la supériorité du filtre non-linéaire est incontestable, en raison de sa grande stabilité et des fortes divergences présentées par le filtre de Kalman-Bucy étendu, et qu'en bruit faible, le filtre de Kalman-Bucy étendu, de par sa simplicité et sa précision, est préférable au filtre non-linéaire.

SUMMARY

The interferometric device presented here has for object to draw a map of the electromagnetic sources in the sky, from radioastronomic signals collected by two aeriials. The main problem is to estimate the phasis of a sinusoïdal signal in presence of a powerful noise : the phasis fluctuates lightly near a constant mean value.

The processing, used here, is based on an approximation in resolving the non-linear optimal filtering problem. The probability density of the sinusoïdal signal phasis, according to the past observations, is, after normalisation, the solution of a linear parabolic type partial differential equation. This equation is resolved numerically by a composite method, finite element - finite difference, which leads to a tridiagonal linear system.

Simulation tests have been carried out on a CII IRIS 80 Computer in order to compare this method with the extended Kalman-Bucy filter. The results allow us to conclude that with an important noise, the non-linear filter is undoubtedly more performing, because of its great stability and of the frequent divergences of extended Kalman-Bucy filter ; otherwise, with a weak noise, the extended Kalman-Bucy filter will be choosen because of its simplicity and its accuracy.

Application de méthodes récursives de filtrage non-linéaire à l'estimation de la phase d'un signal sinusoïdal fortement bruité.

INTRODUCTION

Cet article décrit une méthode récursive de filtrage généralisant les traitements de type Kalman-Bucy à des processus bruités, non-linéaires, non-stationnaires. La méthode est appliquée à des signaux de radioastronomie obtenus par interférométrie à l'observatoire de Meudon.

I - PROBLEME D'INTERFEROMETRIE A DEUX ANTENNES.

Les procédés d'interférométrie des ondes millimétriques sont utilisés actuellement en astronomie en vue de l'établissement d'une carte des sources de rayonnement électromagnétique du ciel. L'information recueillie est résumée par une fonction appelée "distribution de brillance du ciel". L'estimation de cette fonction est rendue difficile en raison de la faible puissance de certaines sources par rapport aux bruits électromagnétiques ambiants.

1. Etude du dispositif interférométrique en négligeant l'influence des bruits.

1.1. Description du dispositif (fig.1)

On dispose de deux antennes A_1 et A_2 avec lesquelles on capte des signaux radioastronomiques $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$. Ces antennes sont réglées sur une fréquence Ω et un retard τ est placé à la sortie de l'antenne A_2 . Les signaux observés dans l'intervalle de temps $[0, T]$ sont :

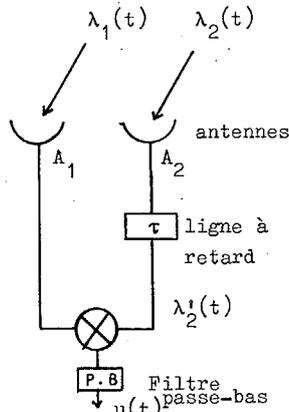


Figure 1.

On fait passer $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2'(t)$ dans un multiplieur, puis dans un filtre passe-bas, et on obtient le signal :

$$u(t) = \frac{A}{2} \cos[-\Omega\tau + \varphi_2(t) - \varphi_1(t)].$$

1.2. Hypothèses sur $\varphi_2(t) - \varphi_1(t)$ et choix du retard τ .

Les signaux $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$ étant supposés provenir de la même source, la différence de phase $\varphi_2(t) - \varphi_1(t)$ correspond à la différence de marche de l'onde observée entre les deux antennes, qui ne dépend que de la géométrie du système et de la direction de la source émissive. Compte tenu de la rotation de la terre, cette différence de marche est supposée proportionnelle au temps, soit :

$$\varphi_2(t) - \varphi_1(t) = \Psi_0 + \omega_0 t.$$

En pratique, la fréquence $\omega_0/2\pi$ varie de 0 à 15 Hz. Le signal $u(t)$ a donc la forme suivante :

$$u(t) = \frac{A}{2} \cos[\omega_0 t - \Omega\tau + \Psi_0].$$

En prenant pour τ une fonction linéaire du temps, $\tau = \alpha t$, le signal $u(t)$ devient :

$$(1) \quad u(t) = a \cos(\omega t + \Psi_0), \text{ avec } \omega = \omega_0 - \Omega\alpha \text{ et } a = \frac{A}{2}.$$

On dispose donc à présent d'un signal sinusoïdal $u(t)$ dont on peut faire varier la fréquence en jouant sur le paramètre α . On remarquera que $u(t)$ devient une fonction constante de temps lorsque : $\alpha = \omega_0/\Omega$.

2. Prise en compte des perturbations.

En pratique, les phases $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$ sont soumises à de faibles fluctuations que nous modéliserons sous la forme :

$$\varphi_2(t) - \varphi_1(t) = \Psi_0 + \omega_0 t + \varphi(t),$$

où $\varphi(t)$ est une fonction aléatoire de moyenne nulle sur l'intervalle d'observation.

D'autre part, au signal observé à la sortie du filtre passe-bas s'ajoutent des perturbations dues au trajet de l'onde entre la source et les antennes. On observera donc à la sortie du filtre le signal :

$$(2) \quad y(t) = a \cos[\omega t + \Psi_0 + \varphi(t)] + b(t),$$

où $b(t)$ peut être considéré comme un bruit blanc gaussien stationnaire sur $[0, T]$. Le niveau de ce bruit est très élevé : le rapport de la densité spectrale de puissance du bruit à la puissance moyenne du signal peut atteindre 15 dB.

3. Problème de l'interférométrie et solutions couramment employées.

3.1. Disposant du signal $y(t)$ décrit par la relation (2) où l'on peut choisir la pulsation ω , et les statistiques des bruits $\varphi(t)$ et $b(t)$ étant connues, on veut estimer "au mieux" les valeurs de a et Ψ_0 . La transformée de Fourier de la fonction $a(\cos \Psi_0 + i \sin \Psi_0)$ permet d'obtenir la "distribution de brillance du ciel".

Il faut, d'autre part, pouvoir résoudre le problème en temps réel pour asservir la direction d'observation des antennes aux résultats des mesures, et d'observer les points les plus intéressants du ciel.

3.2. Méthode des moyennes temporelles.

On dédouble le dispositif à la sortie des antennes et on règle les retards pour obtenir une quadrature de phase. L'intégration sur $[0, T]$ des deux signaux obtenus permet d'obtenir des estimations de $a \cos \Psi_0$ et



Application de méthodes récursives de filtrage non-linéaire à l'estimation de la phase d'un signal sinusoïdal fortement bruité.

a sin Ψ_0 , d'où les estimations \hat{a} et $\hat{\Psi}_0$ de a et Ψ_0 . Les résultats obtenus par cette méthode ne sont acceptables que si le niveau des bruits d'observation est faible.

3.3. Méthode de filtrage linéaire de Kalman-Bucy étendue (filtre KBE). [4]

Cette méthode permet, après estimation grossière de a, d'obtenir une approximation de Ψ_0 par linéarisation du cosinus.

On remarque que cette approximation $\hat{\Psi}_0$ obtenue par filtre KBE est peu sensible aux erreurs commises sur la valeur de a. Ceci permet de scinder le problème en trois parties :

- approximation grossière \tilde{a} de a.
- approximation $\hat{\Psi}_0$ de Ψ_0 par filtre KBE, avec \tilde{a} comme valeur de a.
- approximation \hat{a} de a, avec $\hat{\Psi}_0$ comme valeur de Ψ_0 .

On peut de plus boucler plusieurs fois les deux dernières étapes de cette méthode.

Les résultats obtenus sont meilleurs que ceux de la méthode des moyennes, mais, ce filtre n'est plus utilisable pour ce problème lorsque le rapport signal/bruit est inférieur à 0 dB, comme le montreront les résultats numériques de la dernière section.

4. Un algorithme de filtrage non-linéaire (filtre NL).

Conservant le schéma en trois étapes ci-dessus, on y remplace le filtre KBE par un filtre NL.

4.1. Formulation générale du problème de filtrage non-linéaire. [1]

Soit le processus réel $x(t)$ solution de l'équation dynamique stochastique :

$$(3) \quad \dot{x}(t) = f(x,t) + g(x,t) b_1(t),$$

où $f(x,t)$ et $g(x,t)$ sont des fonctions de deux variables réelles et $b_1(t)$ un bruit blanc unitaire. $x(t)$ est observé par le processus $y(t)$ décrit par :

$$(4) \quad y(t) = h(x,t) + r(t) b_2(t),$$

où $b_1(x,t)$ et $r(t)$ sont des fonctions réelles et $b_2(t)$ un second bruit blanc unitaire indépendant de $b_1(t)$. Soit $p(x,t)$ la densité de probabilité à l'instant t de la valeur de $x(t)$, connaissant les observations passées y . On note $p_0(x)$ la densité de probabilité initiale de $x(0)$. Alors $p(x,t)$ est solution du système (5), (6), (7) :

$$(5) \quad p(x,t) = \frac{\tilde{p}(x,t)}{\int_R \tilde{p}(x,t) dx},$$

$$(6) \quad p(x,0) = p_0(x),$$

$$(7) \quad \frac{\partial \tilde{p}(x,t)}{\partial t} + A(t)\tilde{p}(x,t) = \frac{h(x,t) y(t)}{r^2(t)} \tilde{p}(x,t),$$

où $A(t)$ est l'opérateur de Kolmogorov associé au système (3) :

$$A(t)\tilde{p}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} [f(x,t)\tilde{p}(x,t)] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [g^2(x,t)\tilde{p}(x,t)].$$

L'estimation au sens des moindres carrés de $x(t)$ est alors donnée par l'espérance de x pour la densité $p(x,t)$:

$$\hat{x}(t) = \int_R x p(x,t) dx.$$

4.2. Application à l'estimation de la phase instantanée.

On pose : $x(t) = \Psi_0 + \varphi(t)$.

$x(t)$ est un processus de type (3) comme solution de l'équation :

$$(8) \quad \dot{x}(t) = g b_1(t),$$

g étant une constante.

On observe le signal :

$$(9) \quad y(t) = a \cos[\omega t + x(t)] + r b_2(t), \quad r \text{ étant une constante.}$$

Soit $p(x,t)$ la densité de probabilité conditionnelle de $x(t)$ connaissant les observations passées de y : $p(x,t)$ est solution du système (10), (11), (12) :

$$(10) \quad p(x,t) = \frac{\tilde{p}(x,t)}{\int_{-\Pi}^{+\Pi} \tilde{p}(x,t) dx},$$

$$(11) \quad \tilde{p}(x,0) = p_0(x),$$

$$(12) \quad \frac{\partial \tilde{p}(x,t)}{\partial t} - \frac{g^2}{2} \frac{\partial^2 \tilde{p}(x,t)}{\partial x^2} = \frac{a}{r^2} \cos(\omega t + x) y(t) \tilde{p}(x,t).$$

avec $x \in [-\Pi, +\Pi]$ et $t \in [0, T]$.

On prendra généralement pour $p_0(x)$ la densité de probabilité uniforme sur $[-\Pi, +\Pi]$.

Application de méthodes récursives de filtrage non-linéaire à l'estimation de la phase d'un signal sinusoïdal fortement bruité.

4.3. Estimée de $x(t)$ à partir de $p(x,t)$. [5]

Pour l'estimation d'une phase, c'est-à-dire d'un point sur le cercle unité, le critère des moindres carrés n'est plus justifié. Il est préférable de choisir soit le critère des moindres carrés modulo 2π , soit l'espérance de $[1 - \cos(x - \hat{x})]$. C'est ce dernier critère que nous prendrons. L'estimée est alors donnée par :

$$(15) \hat{x}(t) = \text{Arctg} \frac{E[\sin x(t)]}{E[\cos x(t)]},$$

avec : (14) $E[\cos(\hat{x} - x)] > 0$, relation permettant de lever l'indétermination modulo π de l'Arctg.

$E(.)$ représente l'espérance pour la densité de probabilité $p(x,t)$:

$$E(.) = \int_{-\pi}^{+\pi} (.) p(x,t) dx.$$

4.4. Remarque.

On pourrait utiliser la méthode ci-dessus pour estimer conjointement x et a , considérés comme composantes d'un processus vectoriel de type (3). Cette méthode a été programmée, mais la quantité de calculs qu'elle implique la rend lourde et peu précise numériquement.

II - SIMULATION NUMERIQUE DU PROCESSUS ET DU FILTRE NL.

Programmé sur ordinateur, le filtre NL a été testé sur un processus simulé numériquement. La programmation du filtre est basée sur une approximation numérique de la solution $\tilde{p}(x,t)$ de l'équation (12), par une méthode mixte de différences finies sur le temps t et d'éléments finis sur la phase x .

1. Simulation du processus.

Un pas de temps Δt étant choisi, le processus décrit par les équations (8), (9) est approximé par le processus discret x_k, y_k , décrit par le schéma explicite du 1er ordre suivant :

$$(15) x_{k+1} = x_k + g \Delta t \frac{b_1(k)}{\sqrt{\Delta t}},$$

$$(16) y_{k+1} = a \cos(\omega t_{k+1} + x_{k+1}) + \frac{r b_2(k+1)}{\sqrt{\Delta t}},$$

où $t_k = k \Delta t$, et $b_1(k)$ et $b_2(k)$ sont des bruits blancs gaussiens discrets unitaires et indépendants.

2. Résolution de l'équation d'évolution de $\tilde{p}(x,t)$. [2]

L'équation (12) décrivant l'évolution de la fonction $\tilde{p}(x,t)$ est de type parabolique linéaire. Ce type d'équation est résolu classiquement lorsque la solution

cherchée est à support compact dans R . Pour tenir compte du caractère cyclique de la phase x , nous résolvons l'équation sur $[-\pi, +\pi]$ avec une condition de Neuman en $-\pi$ et $+\pi$.

2.1. Discrétisation temporelle.

Un pas de temps Δt étant choisi, la fonction $\tilde{p}(x, n \Delta t)$ est approximée par $\tilde{p}^n(x)$ solution de :

$$(17) p^{n+1}(x) - \frac{g^2}{2} \Delta t \frac{d^2 \tilde{p}^{n+1}(x)}{dx^2} = \tilde{p}^n(x) + \frac{a \Delta t}{r^2} y^{n+1} \cos(\omega t_n + x) \tilde{p}^n(x),$$

où $t_n = n \Delta t$ et $p^0(x) = p_0(x)$ fonction donnée.

Ce schéma est de type implicite. Une telle approximation converge vers la solution $\tilde{p}(x,t)$ de (12) lorsque Δt tend vers 0.

2.2. Discrétisation spatiale : méthode des éléments finis.

On divise l'intervalle $[-\pi, +\pi]$ en l intervalles de longueur $h = 2\pi/l$.

On pose : $x_i = -\pi + (i-1)h, i = 1, 2, \dots, l+1$.

Puis on applique la méthode classique des éléments finis avec une base de fonctions en triangle, égales à 1 sur l'un des x_i et nulle sur les autres. Pour refermer le cercle, on lie les points $-\pi$ et $+\pi$ par une condition de Neuman. La résolution numérique de (12) revient alors à la résolution du système linéaire :

$$(18) A \tilde{P}^{n+1} = D^n \tilde{P}^n$$

où $\tilde{P}^n = [\tilde{p}_1^n, \tilde{p}_2^n, \dots, \tilde{p}_l^n]^T$, avec \tilde{p}_i^n approximant $\tilde{p}(x_i, n \Delta t)$,

et :

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 & \dots & 0 & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & & & 0 \\ 0 & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & 0 \\ 0 & & \beta & \alpha & \beta & \\ \beta & 0 & \dots & 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix} \text{ et } D^n = \begin{bmatrix} \delta_1 & \epsilon_1 & 0 & \dots & 0 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \delta_2 & \epsilon_2 & & & 0 \\ 0 & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & 0 \\ 0 & & \gamma_{l-1} & \delta_{l-1} & \epsilon_{l-1} & \\ \epsilon_1 & 0 & \dots & 0 & \gamma_1 & \delta_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{avec : } \alpha = \frac{2}{3} h + \frac{g^2 \Delta t}{h}, \quad \beta = \frac{h}{6} - \frac{g^2 \Delta t}{2h},$$

$$\gamma_i = \frac{h}{6} + \frac{a}{r^2} \Delta t y^{n+1} \frac{h}{12} (c_{i-1}^n + c_i^n),$$

$$\delta_i = \frac{2}{3} h + \frac{a}{r^2} \Delta t y^{n+1} \frac{h}{12} (c_{i-1}^n + 6c_i^n + c_{i+1}^n),$$

$$\epsilon_i = \frac{h}{6} + \frac{a}{r^2} \Delta t y^{n+1} \frac{h}{12} (c_i^n + c_{i+1}^n),$$

$$\text{et } c_i^n = \cos(\omega t_n + x_i).$$

On résout le système linéaire (18) par une méthode de Gauss en tenant compte de la structure tridiagonale



Application de méthodes récursives de filtrage non-linéaire à l'estimation
de la phase d'un signal sinusoïdal fortement bruité.

cyclique de la matrice A.

III - RESULTATS DE LA SIMULATION.

Des essais comparatifs des filtres NL et KBE ont été effectués sur ordinateur IRIS-80. Le bruit dynamique a été pris très faible ($g = 10^{-4}$) en raison du problème d'interférométrie traité. Des tests statistiques ont été effectués en fonction du niveau de bruit d'observation, du pas de discrétisation spatiale, et du pas de discrétisation temporelle. Les résultats présentés ont été obtenus par statistique sur 500 échantillons par niveau de bruit.

Remarque : Définition du rapport signal sur bruit :
nous prendrons dans toute la suite comme définition du rapport signal sur bruit la quantité :

$$R = \frac{\text{puissance moyenne du signal}}{\text{densité spectrale du bruit}} = \frac{a^2}{2r^2}$$

1. Résultats concernant la mise en oeuvre du filtre NL : choix des pas de discrétisations spatiale et temporelle.

1.1. Régime transitoire et régime permanent (cf. fig 6)
 x_0 étant la valeur autour de laquelle la phase x fluctue faiblement, la réponse du filtre NL, c'est-à-dire la courbe $\hat{x}(t)$ a toujours grossièrement la structure présentée sur la figure 6 (annexe).

On y distingue un régime transitoire de durée TT , et un régime permanent dans l'intervalle (TT, TM) , TM étant la durée totale du filtrage. On appelle erreur permanente e_p , l'erreur quadratique moyenne en régime permanent.

1.2. Influence du pas de discrétisation spatiale.

Pour un niveau de bruit donné, l'influence du pas de discrétisation spatiale est représentable par la courbe de l'erreur permanente e_p en fonction du nombre de points en espace NPT. Quel que soit le niveau du bruit, cette courbe a l'allure de la figure 2.

Le temps de calcul étant proportionnel à NPT, on a intérêt à prendre la valeur NPT opt au début du palier de la courbe $e_p(NPT)$. Les tests montrent que NPT opt ne dépend que du rapport signal à bruit R. On choisira donc un pas de discrétisation spatiale à l'aide de la courbe NPT opt (R) représentée par la figure 3.

On remarque que le nombre de points d'espace requis diminue lorsque le bruit d'observation augmente.

1.3. Influence du pas de discrétisation temporelle.

Les essais montrent que l'influence du pas de discrétisation temporelle est analogue à celle du pas de

discrétisation spatiale. Quel que soit le niveau de bruit, 20 points par période semble être une bonne discrétisation. En dessous de 20 points, le filtre est trop imprécis, et au dessus de 20 points, on ne gagne que très peu en précision.

2. Résultats globaux en fonction du niveau de bruit d'observation.

Le principal résultat est la stabilité du filtre NL en bruit fort, par opposition au filtre KBE qui diverge fréquemment dès que le bruit devient important.

2.1. Bruit faible, $R > 3$ dB.

Lorsque la discrétisation spatiale est trop grossière on observe pour le filtre NL de fortes oscillations haute fréquence autour de la bonne valeur x_0 de la phase (cf. fig.7). Pour remédier à cela, on est amené à prendre une discrétisation spatiale très fine (100 points par période) ; mais le temps de calcul machine est alors très élevé : 50 fois celui du filtre KBE. On pourrait également remédier à cet inconvénient en plaçant à la sortie du filtre NL un filtre passe-bas. Le filtre KBE est lui très stable en bruit faible, et précis. Il est donc préférable, dans ce cas, de choisir le filtre KBE qui donne une bonne précision, une bonne stabilité et un temps de calcul machine faible par rapport à celui du filtre NL.

2.2. Bruit moyen, $0 < R < 3$ dB (cf. fig.8).

Le filtre KBE présente souvent des divergences et ne sort pas de son régime transitoire. Le pourcentage de divergence est de 10 à 15 % des essais effectués. Lorsque le filtre KBE converge, les deux filtres ont une précision équivalente (fig.8). Notons d'autre part, que le temps de calcul du filtre NL est de l'ordre de 7 à 10 fois celui du filtre KBE. Le choix de l'un des deux filtres est donc ici moins évident en raison de l'opposition temps de calcul - risque de divergences.

2.3. Bruit fort, $R < 0$ dB (cf. fig.9).

Le filtre KBE devient ici inutilisable en raison du risque très important de divergence (60% pour $R = -15$ dB). Le filtre NL est stable et son temps de calcul est toujours 7 à 10 fois celui du filtre KBE. Le filtre NL sera donc choisi incontestablement dans le cas de bruit fort.

2.4. Précision du filtre NL.

La précision obtenue par le filtre NL est mesurable par la variance moyenne de l'erreur permanente pour un niveau de bruit donné, que nous estimons par :



Application de méthodes récursives de filtrage non-linéaire à l'estimation de la phase d'un signal sinusoïdal fortement bruité.

$$V = \text{Moyenne sur l'ensemble des échantillons à bruit donné de } \int_{TT}^{TM} [x(t) - \hat{x}(t)]^2 dt.$$

La courbe $V(R)$ est représentée par la figure 4. Remarquons qu'il est difficile de bien définir le régime transitoire du filtre. Ici nous avons pris une définition sévère de TT ; il reste donc encore une partie de transitoire dans (TT, TM) d'où une mesure pessimiste de V . Notons également qu'en bruit fort, les divergences détériorent la précision moyenne du filtre KBE.

2.5. Durée des transitoires.

La durée moyenne TT du régime transitoire donne l'ordre de grandeur du temps que met le filtre à accrocher la bonne valeur. Ce temps est mesuré en périodes temporelles $2\pi/\omega$. Il varie avec le niveau de bruit suivant la courbe de la figure 5.

CONCLUSION

L'étude présentée permet de trouver le domaine d'utilisation du filtre NL pour l'estimation optimale de la phase d'un signal sinusoïdal bruité. Elle prouve la nette supériorité de cette solution, en bruit fort, sur les solutions moins élaborées.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] LEVIEUX F. "Filtrage Non-Linéaire et Analyse Fonctionnelle", Rapport Laboria n° 57. (1974).
- [2] LIONS J.L. "Analyse Numérique", Cours de l'Ecole Polytechnique.
- [3] ZAKAI M. "On the optimal filtering of diffusion processes. Z Wahrscheinlichkeits theorie, Vol.11 (1969).
- [4] KALMAN - BUCY. "New result in linear filtering and prediction theory", Trans. ASME, Journal of Basic Eng. ser. D, Vol.83 (1961).
- [5] BUCY - MALLINCKRODT. "An Optimal Phase Demodulator", Stochastics, Vol.1, pp. 3-23 (1973).
- [6] LAMBLA J.L. "Rapport Laboria" (à paraître 1975).

ANNEXE : figures 2 à 9.

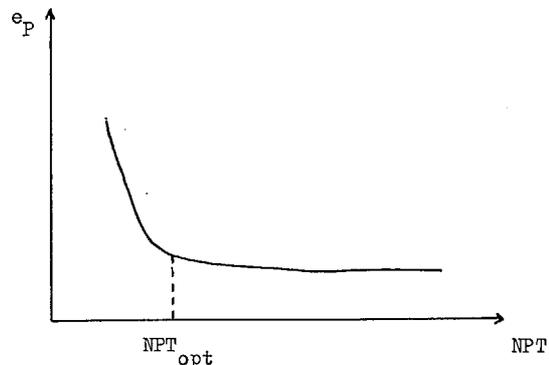


Fig.2 : Allure de la courbe $e_p(NPT)$ à niveau de bruit donné.

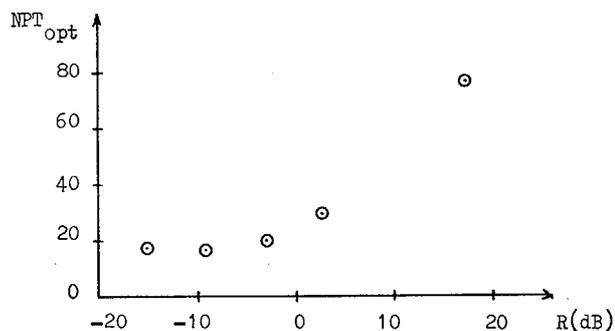


Fig.3 : NPT_{opt} en fonction du rapport signal à bruit R .

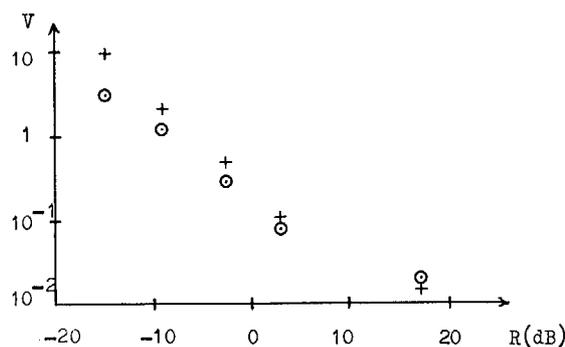


Fig.4 : Précision des filtres
 ○ Filtre NL + Filtre KBE

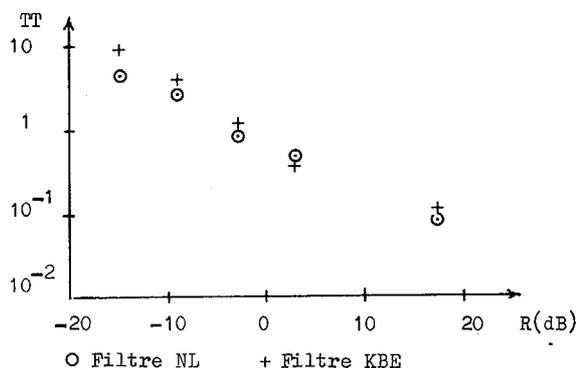


Fig.5 : Durée des transitoires
 ○ Filtre NL + Filtre KBE



Application de méthodes récursives de filtrage non-linéaire à l'estimation
de la phase d'un signal sinusoïdal fortement bruité.

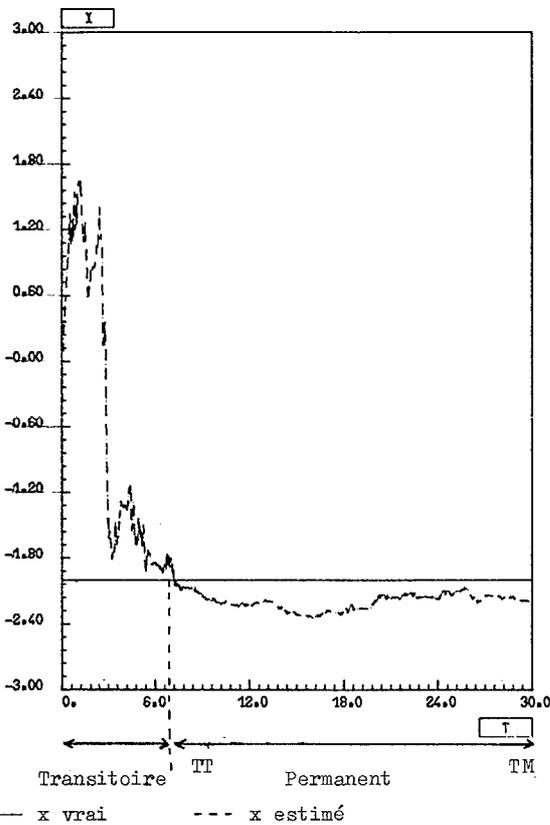


Fig.6 : Régimes transitoire et permanent

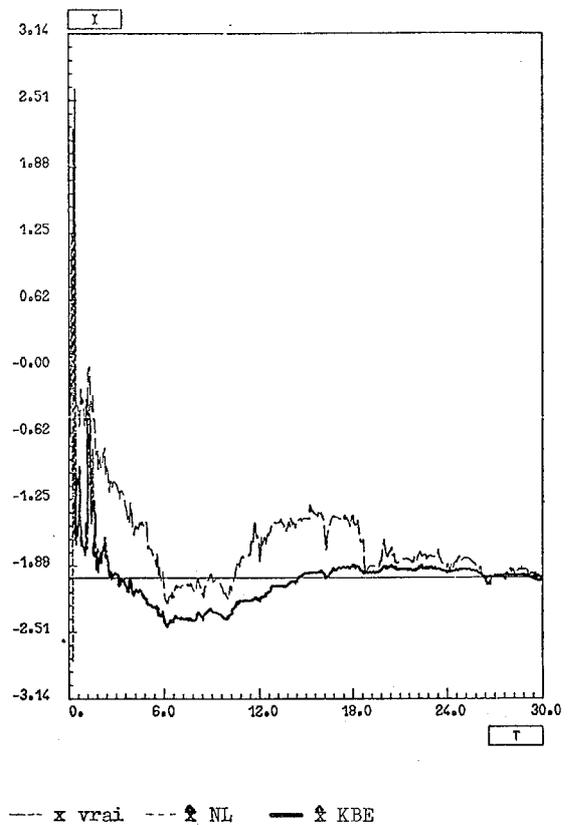


Fig.8 : Exemple de filtrage en bruit moyen.

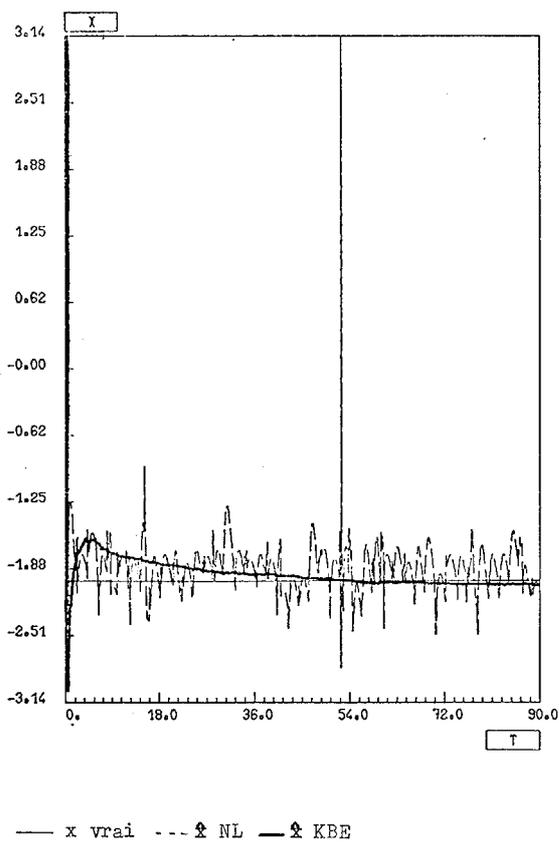


Fig.7 : Oscillations du filtre NL en bruit faible.

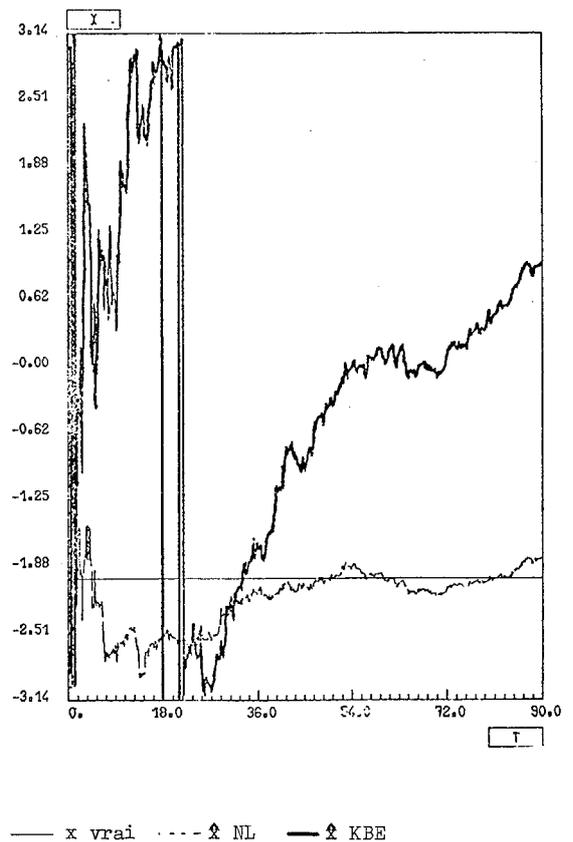


Fig.9 : Divergence du filtre KBE en bruit fort.