74/1

COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL
ET SES APPLICATIONS

NICE du 16 au 21 JUIN 75

DETECTION EN PRESENCE DE REVERBERATION

Geneviève JOURDAIN et Jacques MUNIER

Centre d'Etude des Phénomènes Aléatoires et Géophysiques - B.P. 15 - 38040 GRENOBLE CEDEX

RESUME

La question traitée entre dans le cadre des problèmes de détection d'un signal connu en présence de bruit additif gaussien non-centré et non-stationnaire. Le cas considéré est celui dans lequel ce que l'on convient d'appeler bruit est en partie dû à la réverbération, se trouve donc lié au signal d'émission et peut même comporter une partie certaine.

On établit la structure du récepteur optimal en tenant compte des propriétés statistiques du milieu réverbérant, telles qu'on peut les définir selon un modèle développé antérieurement ; on calcule ses performances et on les compare à celles d'un récepteur classique conçu pour un bruit additif stationnaire.

On examine en outre l'influence de la forme du signal d'émission, ainsi que les simplifications intervenant dans des cas particuliers ou conduisant à un traitement sous-optimal.

SUMMARY

The matter discussed in this paper deals with the problem of detecting a known signal disturbed by an additive gaussian non-stationary noise with non-zero mean. A typical case is considered, when the so-called noise is due to reverberation and thus depends on the transmitted signal and may also include a deterministic component.

The structure of the optimal receiver is established, taking into account the statistical properties of the reverberating medium, as defined according to a model previously developed ; the performance is derived and compared with that of a conventional receiver, designed for additive white noise.

The effect of the shape of the transmitted signal is discussed and some simplifications arising from particular cases or leading to sub-optimal processing are examined.

1. LE BRUIT DE REVERBERATION.

En matière de détection active, on qualifie de réverbération l'ensemble des échos diffus renvoyés par des objets ou des inhomogénéités du milieu, généralement très nombreux et de petites dimensions, dont la présence perturbe, à la manière d'un bruit, la réception de l'écho de la cible à laquelle on s'intéresse. Le signal de réverbération a, en effet, un caractère assez complexe et aléatoire pour qu'on puisse l'assimiler à un bruit ; cependant, une caractéristique essentielle de ce bruit est que son existence et ses propriétés sont liées au signal d'émission.

La modélisation du bruit de réverbération est étroitement liée à celle du milieu réverbérant lui-même, dont on sait qu'il est représentable macroscopiquement par un filtre aléatoire variable dans le temps [1] ; le signal transmis (en l'occurence, l'écho renvoyé) par un tel milieu excité par un signal d'émission $s_o(t)$ s'exprime de la façon suivante :

$$w(t) = \iint_{\mathbb{R}^2} s_o(\lambda t-\xi)\, G(\lambda,\xi)\, d\lambda d\xi \qquad (1)$$

Il est formé d'une superposition d'échos élémentaires comprimés dans le rapport λ , retardés de ξ et pondérés par la fonction aléatoire réelle $G(\lambda,\xi)$, caractéristique du milieu. Cette fonction n'est connue que par ses propriétés statistiques, à savoir sa valeur centrée $\tilde{G}(\lambda,\xi)$, sa moyenne $m_G(\lambda,\xi)$ et sa covariance centrée à quatre variables $\tilde{\Gamma}_G(\lambda,\lambda';\xi,\xi')$:

$$G(\lambda,\xi) = \tilde{G}(\lambda,\xi)+m_G(\lambda,\xi) \ , \ m_G(\lambda,\xi)=E\{G(\lambda,\xi)\} \qquad (2)$$

$$\tilde{\Gamma}_G(\lambda,\lambda';\xi,\xi') = E\{\tilde{G}(\lambda,\xi)\tilde{G}(\lambda',\xi')\} \qquad (3)$$

Dans la suite, nous admettrons l'hypothèse WSSUS [1], sans laquelle la complexité des calculs devient rapidement excessive, soit

$$\tilde{\Gamma}_G(\lambda,\lambda';\xi,\xi') = D(\lambda,\xi)\,\delta(\lambda-\lambda';\xi-\xi') \qquad (4)$$

Au second ordre, le milieu est maintenant caractérisé par la fonction $D(\lambda,\xi)$ à deux variables, appelée fonction de diffusion.

Des formules précédentes, on déduit immédiatement la moyenne $m_w(t)$, la covariance $\Gamma_w(t,u)$ et la covariance centrée $\tilde{\Gamma}_w(t,u)$ du bruit de réverbération $w(t)$:

$$m_w(t) = E\{w(t)\} = \iint_{\mathbb{R}^2} s_o(\lambda t-\xi)\, m_G(\lambda,\xi)\, d\lambda d\xi \qquad (5)$$

$$\Gamma_w(t,u) = E\{w(t)w(u)\} = \tilde{\Gamma}_w(t,u) + m_w(t)m_w(u) \qquad (6)$$

$$\tilde{\Gamma}_w(t,u) = \iint_{\mathbb{R}^2} s_o(\lambda t-\xi)\ s_o(\lambda u-\xi)\ D(\lambda,\xi)\, d\lambda d\xi \qquad (7)$$

Par ailleurs, étant donné le très grand nombre de variables aléatoires intervenant dans le mécanisme de formation du bruit de réverbération, nous admettrons que celui-ci obéit à une loi de probabilité normale, ce qui est en accord avec certains résultats expérimentaux [2].

2. DETECTION EN PRESENCE DE BRUIT ADDITIF GAUSSIEN NON-CENTRE ET NON-STATIONNAIRE.

En assimilant, comme nous l'avons fait au paragraphe précédent, le signal de réverbération à un bruit additif gaussien non-stationnaire, on se ramène à un problème classique de théorie de la détection ; cependant, contrairement aux hypothèses habituelles, ce bruit comporte une partie certaine, sa valeur moyenne $m_w(t)$, liée au signal d'émission. Nous allons donc reprendre succinctement la théorie classique, en tenant compte de ce fait nouveau.

Nous supposerons, tout d'abord, qu'on dispose d'une observation sous forme discrète et représenterons les signaux par des vecteurs-colonnes. On est en présence de l'alternative :

$$\left.\begin{array}{l} H_o\ :\ y = b \\ \\ H_1\ :\ y = s + b \end{array}\right) \begin{array}{l} y\ :\ \text{observable} \\ b\ :\ \text{bruit gaussien} \\ s\ :\ \text{signal-écho (supposé connu)} \end{array} \qquad (8)$$

Les propriétés du bruit sont les suivantes (*)

$$E\{b\} = m \qquad \Gamma_b = E\{b\, b^T\} = \tilde{\Gamma}_b + mm^T$$
$$\tilde{\Gamma}_b = E\{(b-m)(b-m)^T\} \ \text{supposée inversible} \qquad (9)$$

Les composantes du vecteur y à n dimensions sont gaussiennes :

$$p(y) = \frac{1}{(2\pi)^n (\text{dét}\ \tilde{\Gamma}_b)^{\frac{1}{2}}} \exp[\frac{-1}{2}(y-E\{y\})^T \tilde{\Gamma}_b^{-1} (y-E\{y\})] \qquad (10)$$

(*) x : vecteur-colonne, x^T : son transposé (vecteur ligne)

Calculons le rapport de vraisemblance $\Lambda(y)=\frac{p(y|H_1)}{p(y|H_o)}$. Dans les deux hypothèses H_o et H_1, la covariance centrée du bruit est la même (s'il s'agit d'un bruit de réverbération, celui-ci subsiste en l'absence du signal-écho utile). Les valeurs moyennes sont :

$$E\{y|H_o\} = m \quad , \quad E\{y|H_1\}=s+m$$

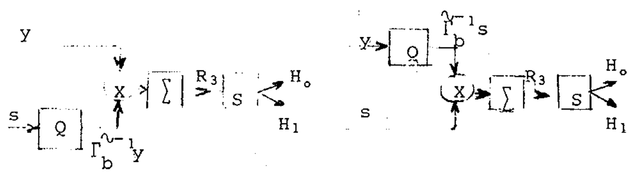
Le rapport de vraisemblance prend alors la forme suivante :

$$\Lambda(y)=\exp(\frac{-1}{2}R_1)\exp(-R_2)\exp(R_3) \tag{12}$$

$$R_1= s^T\tilde{\Gamma}_b^{-1}s \qquad R_2=m^T\tilde{\Gamma}_b^{-1}s \qquad R_3=y^T\tilde{\Gamma}_b^{-1}s \tag{13}$$

Les scalaires R_1, R_2, et R_3 sont des nombres sans dimensions ; R_1 est une norme quadratique du signal s définie au moyen de l'opérateur inverse de la covariance centrée du bruit, et est assimilable à un rapport signal à bruit ; R_2 et R_3 sont les produits scalaires du vecteur m (partie certaine du bruit) et de l'observable y par le vecteur-signal s transformé par l'opérateur $\tilde{\Gamma}_b^{-1}$.

Seul, le scalaire R_3 dépend de l'observable ; donc, appliquer la stratégie bayésienne revient à effectuer le test :
$R_3 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} S$ (seuil), ce qui conduit à bâtir le récepteur selon l'un des deux schémas fonctionnels suivants :



Q est le filtre inverse de la covariance centrée du bruit ; il ne dépend pas de la valeur moyenne du bruit. Si celui-ci n'est pas stationnaire, alors le filtre Q est à paramètres variables dans le temps. Par ailleurs, on notera que la constante R_2 est incorporée au seuil S, qui dépend donc de la valeur moyenne du bruit.

On montre aisément que le nouvel observable R_3 à la sortie du récepteur optimal a les propriétés statistiques suivantes :

$$E\{R_3|H_o\}=R_2 \ , \ E\{R_3|H_1\}=R_1+R_2 \ , \ \mathrm{var}\{R_3|H_o,H_1\}=R_1 \tag{14}$$

On en déduit l'indice de performance du récepteur :

$$J = \frac{E\{R_3|H_1\}-E\{R_3|H_o\}}{(\mathrm{var}\{R_3\})^{1/2}} \Longrightarrow \boxed{J = \sqrt{R_1}} \tag{15}$$

Par un calcul classique, on obtient, pour les probabilités de fausse alarme et de détection, les expressions suivantes :

$$P_f=\frac{1}{2}[1-\theta(\frac{S-R_2}{\sqrt{2R_1}})] \ , \quad P_d=\frac{1}{2}[1-\theta(\frac{S-R_2}{\sqrt{2R_1}}-\sqrt{\frac{R_1}{2}})] \tag{16}$$

$\theta()$ étant la fonction d'erreur.

Si on applique la stratégie de NEYMAN-PEARSON, on se fixe P_f et, par suite, la quantité $\frac{S-R_2}{\sqrt{2R_1}}$, d'où le seuil S. En conséquence :

- la valeur moyenne du bruit n'intervient (par l'intermédiaire de R_2) que dans le choix du seuil ;
- le seuil étant fixé, la probabilité de détection ne dépend (comme l'indice de performance) que du rapport signal à bruit R_1, lequel fait intervenir seulement la partie centrée du bruit.

3. ADAPTATION DU TRAITEMENT AUX PROPRIETES MOYENNES DU MILIEU REVERBERANT.

Le bruit de réverbération, tel qu'il est décrit par la formule (1), résulte d'une transformation intégrale appliquée au signal d'émission $s_o(t)$, qui ne peut être exprimée simplement sous forme matricielle ; nous allons donc passer, en partant des formules du paragraphe 2, au cas où l'observation est continue sur un intervalle T. Les composantes des vecteurs s, b, m, y peuvent être considérées comme des échantillons temporels des signaux continus correspondants, définis sur T, ou comme les n premiers coefficients de leur décomposition sur une base donnée, par exemple de KARHUNEN-LOEVE (dans ce cas, la matrice de covariance $\tilde{\Gamma}_b$ est diagonale).

Le vecteur s correspond au signal $s(t)$ qui résulte d'une transformation connue appliquée au signal d'émission $s_o(t)$ et caractérise la forme de l'écho d'une cible particulière.

En ce qui concerne le bruit, nous supposerons qu'à la réverbération s'ajoute un bruit centré indépendant v ; en notation matricielle :

$$b = v + w \quad , \quad E\{v\} = 0 \quad , \quad E\{vv^T\} = \Gamma_v = \tilde{\Gamma}_v \tag{17}$$

$$E\{b\} = E\{w\} = m_w \tag{18}$$

$$\Gamma_b = \tilde{\Gamma}_w + m_w m_w^T + \Gamma_v \quad , \quad \tilde{\Gamma}_b = \tilde{\Gamma}_w + \Gamma_v \tag{19}$$

On notera que l'expression de R_2 devient :

$$R_2 = m_w \tilde{\Gamma}_b^{-1}s \tag{20}$$

Pour une observation continue, si on suppose que le bruit $v(t)$ est blanc, de densité spectrale de puissance γ_o, et a donc une covariance $\Gamma_v(\tau)=\gamma_o\delta(\tau)$, on a

$$R_1 = \iint_{T^2} s(t)Q(t,u)s(u)\,dt\,du \tag{21}$$

$$R_2 = \iint_{T^2} m_w(t)Q(t,u)s(u)\,dt\,du \tag{22}$$

$$R_3 = \iint_{T^2} y(t)Q(t,u)s(u)\,dt\,du \tag{23}$$

$Q(t,u)$ est l'opérateur caractérisant le filtre inverse de la covariance centrée du bruit ; il est défini par l'équation :

$$\int_T \tilde{\Gamma}_b(t,u)Q(t,\tau)dt = \delta(u-\tau) \tag{24}$$

avec : $\tilde{\Gamma}_b(t,u) = \tilde{\Gamma}_w(t,u) + \gamma_\circ\delta(t-u)$ (25)

On sait [3] que la présence du bruit blanc assure l'existence d'une solution à l'équation (24). De plus, on démontre aisément que la fonction $Q(t,u)$ s'exprime au moyen des fonctions propres $\phi_i(t)$ et des valeurs propres λ_i de l'opérateur covariance $\tilde{\Gamma}_w(t,u)$:

$$Q(t,u)= \sum_i \frac{\phi_i(t)\phi_i(u)}{\lambda_i+\gamma_\circ} \quad , \quad \tilde{\Gamma}_w(t,u)=\sum_i\lambda_i\phi_i(t)\phi_i(u) \tag{26}$$

En définitive, l'adaptation du traitement à la réverbération porte sur :

1/ le seuil, qui dépend de la valeur moyenne $m_w(t)$, mais demeure indépendant du temps ;

2/ le filtre Q, qui dépend de $\tilde{\Gamma}_w$, donc de la forme du signal $s(t)$ et de la fonction de diffusion $D(\lambda,\xi)$ du milieu ; ce filtre est à paramètres variables dans le temps.

La variation temporelle du filtre Q est évidemment référencée par rapport à une origine liée au signal d'émission, puisque celui-ci est la cause première de la réverbération. La fonction $Q(t,u)$ est la réponse impulsionnelle bitemporelle du filtre inverse de la covariance ; cet opérateur, appliqué au signal de référence $s(t)$, donne un signal de référence modifié selon l'information qu'on possède sur la réverbération, soit :

$$s_1(t) = \gamma_\circ\int_T Q(t,u)\ s(u)\ du \tag{27}$$

Les quantités R_1, R_2 et R_3 apparaissent alors comme étant proportionnelles aux énergies d'interaction entre ce nouveau signal de référence et, respectivement : le signal $s(t)$, la valeur moyenne du signal de réverbération, l'observation.

En outre, on remarque que le signal de sortie R_3 du récepteur optimal peut être obtenu en appliquant l'observable $y(t)$ à un filtre adapté au signal de référence modifié $s_1(t)$ suivi d'un dispositif prélevant un échantillon à la date adéquate.

En ce qui concerne les performances, précisées par les formules (15) et (16), on notera simplement que la réverbération se manifeste par une dégradation du rapport signal-à-bruit R_1 ; en outre, elles dépendent de la forme du signal et pas seulement de son énergie (cf. par 6).

4. RECEPTEUR NON-ADAPTE A LA REVERBERATION. COMPARAISON AVEC LE RECEPTEUR OPTIMAL.

Lorsqu'on ne possède aucune information sur le bruit, on ne peut lui adapter le traitement comme indiqué plus haut et on lui attribue la matrice de covariance la plus pauvre en information :

$$\tilde{\Gamma}_b = \mu\,\mathbb{1} \qquad (\mathbb{1} : \text{matrice identité}). \tag{28}$$

Le filtre Q est alors un filtre identité, $Q = \frac{1}{\mu}\mathbb{1}$, et les quantités définies par (13) s'écrivent :

$$R'_1 = \frac{1}{\mu}s^Ts \quad , \quad R'_2 = \frac{1}{\mu}m^Ts \quad , \quad R'_3 = \frac{1}{\mu}y^Ts \tag{29}$$

Supposons qu'on utilise le récepteur construit sur ces données lorsque le bruit b contient un terme w de réverbération, la matrice de covariance étant :

$$\tilde{\Gamma}_b = \mu\mathbb{1} + \tilde{\Gamma}_w \tag{30}$$

Les propriétés statistiques du signal de sortie R'_3 sont alors les suivantes :

$$E\{R'_3|H_\circ\} = R'_2 \quad , \quad E\{R'_3|H_1\} = R'_1+R'_2 \tag{31}$$

$$\text{var}\{R'_3|H_\circ,H_1\} = R'_1+R'_4 \qquad R'_4 = \frac{1}{\mu^2}s^T\tilde{\Gamma}_w s \tag{32}$$

d'où l'indice de performance :

$$J' = \frac{R'_1}{(R'_1+R'_4)^{1/2}} = \frac{s^Ts}{(\mu s^Ts+s^T\tilde{\Gamma}_w s)^{1/2}} = \frac{s^Ts}{(s^T\tilde{\Gamma}_b s)^{1/2}} \tag{33}$$

Le terme R'_4 est dû à la présence du bruit de réverbération.

Dans le cas d'une observation continue, le récepteur est adapté à une covariance de la forme :

$$\tilde{\Gamma}_b = \gamma_\circ\delta(t-u) \tag{34}$$

et le filtre inverse est défini par : $Q(t,u) = \frac{1}{\gamma_\circ}\delta(t-u)$

Par ailleurs, la quantité R'_1 s'écrit :

$$R'_1=\frac{1}{\gamma_\circ}\int_T s^2(t)dt = \frac{E_S}{\gamma_\circ} \qquad (E_s : \text{énergie du signal}) \tag{35}$$

En présence de réverbération, on a un terme R'_4 non nul:

$$R'_4= \frac{1}{\gamma_\circ^2}\iint_{T^2} s(t)\tilde{\Gamma}_w(t,u)s(u)dtdu \tag{36}$$

En utilisant (7), cette expression peut se mettre sous la forme :

$$R'_4=\frac{1}{\gamma_\circ^2}\iint_{T^2}\psi^2_{ss_\circ}(\lambda,\xi)D(\lambda,\xi)d\lambda d\xi \tag{37}$$

dans laquelle $D(\lambda,\xi)$ est la fonction de diffusion du milieu réverbérant et $\psi_{ss_\circ}(\lambda,\xi)$ la fonction d'interambiguïté en compression du signal-écho $s(t)$ et du signal émis $s_\circ(t)$:

$$\psi_{ss_\circ}(\lambda,\xi) = \int_T s(t)s_\circ(\lambda t-\xi)dt \tag{38}$$

Le signal-écho $s(t)$ est généralement de la forme

$s_\circ(\lambda_\circ t-\xi_\circ)$, $\xi_\circ$ et $\lambda_\circ$ caractérisant la distance et la vitesse radiale de la cible et on a donc :

$$\psi_{ss_\circ}(\lambda,\xi)=\int_T s_\circ(\lambda_\circ t-\xi_\circ)s_\circ(\lambda t-\xi)dt=\frac{1}{\lambda}\psi_{s_\circ}\left(\frac{\lambda_\circ}{\lambda},\xi_\circ-\frac{\lambda_\circ}{\lambda}\xi\right) \quad (39)$$

expression où $\psi_{s_\circ}(\lambda,\xi)$ est la fonction d'ambiguïté en compression du signal d'émission $s_\circ(t)$. L'intégrale double dans R'_ψ (37) représente alors [1] la variance de la fonction d'interambiguïté entrée-sortie du milieu réverbérant centré auquel on applique le signal $s_\circ(t)$, soit :

$$V^2=\text{var}\{\psi_{\tilde{w}s_\circ}(\lambda_\circ,\xi_\circ)\}=\iint_{T^2}\frac{1}{\lambda^2}\psi^2_{s_\circ}\left(\frac{\lambda_\circ}{\lambda},\xi_\circ-\frac{\lambda_\circ}{\lambda}\xi\right)D(\lambda,\xi)d\lambda d\xi \quad (40)$$

En définitive, l'indice de performance est :

$$J'=\left(\eta\frac{E_s}{\gamma_\circ}\right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \frac{1}{\eta}=1+\frac{V^2}{\gamma_\circ E_s} \quad (41)$$

$E_s/\gamma_\circ$ est le rapport signal à bruit à la sortie du filtre adapté au bruit blanc et $\eta\leq 1$ représente la dégradation du rapport signal à bruit due à la réverbération.

D'après (13) (15) et (33), le gain de performance qu'apporte un récepteur adapté à la réverbération est, sous forme matricielle, le suivant :

$$\frac{J}{J'}=\frac{(s^T\tilde{\Gamma}_b^{-1}ss^T\tilde{\Gamma}_bs)^{1/2}}{s^Ts}$$

Factorisons la matrice covariance $\tilde{\Gamma}_b$ (qui est symétrique) en deux matrices triangulaires transposées l'une de l'autre :

$$\tilde{\Gamma}_b=\Delta^T\Delta \Longrightarrow \tilde{\Gamma}_b^{-1}=\Delta^{-1}(\Delta^T)^{-1}=\Delta^{-1}(\Delta^{-1})^T \quad (42)$$

et définissons les vecteurs x et y :

$$x=(\Delta^{-1})^Ts \quad , \quad y=\Delta s \Longrightarrow x^Ty=s^Ts$$

Le gain de performance s'écrit alors :

$$\frac{J}{J'}=\frac{(x^Txy^Ty)^{1/2}}{x^Ty}$$

D'après l'inégalité de SCHWARZ, le carré du produit scalaire x^Ty est inférieur ou égal au produit des carrés scalaires x^Tx et y^Ty . On a donc ; $\frac{J}{J'}\geq 1$. L'égalité $J=J'$ se produit pour $\tilde{\Gamma}_b=kI$.

On vérifie donc que l'adaptation du traitement à la réverbération apporte toujours un gain de performance ; il est clair que ce gain est d'autant plus grand que le bruit de réverbération est plus éloigné de la stationnarité.

5. FILTRE INVERSE DE LA COVARIANCE.

Le filtre inverse de la covariance défini, pour une observation continue, par (24), est un filtre à paramètres variables dont la réalisation nécessite l'inversion de l'opérateur covariance $\tilde{\Gamma}_b(t,u)$ ou, dans le cas discret, de la matrice de covariance $\tilde{\Gamma}_b$, opération en général assez lourde. Nous allons examiner deux cas pour lesquels cette opération se simplifie.

5a. Covariance localement stationnaire.

Il se peut que la non-stationnarité du bruit de réverbération soit peu marquée, à l'échelle de la fenêtre d'observation, notamment lorsque celle-ci encadre assez étroitement le signal-écho et que la réverbération est due à un grand nombre de diffuseurs et s'étale largement dans le temps. Dans ces conditions, on peut substituer à la covariance $\tilde{\Gamma}_w(t,t-\tau)$ sa valeur moyenne, notée $\overline{\Gamma}_w(\tau)$, prise sur la durée $T_\circ$ d'observation :

$$\frac{1}{T_\circ}\int_{T_\circ}\tilde{\Gamma}_w(t,\ t-\tau)dt=\overline{\Gamma}_w(\tau)\approx\tilde{\Gamma}_w(\tau) \quad (43)$$

Cette covariance stationnaire s'écrit, d'après (7) et en supposant que la durée $T_\circ$ est au moins égale à celle du signal :

$$\overline{\Gamma}_w(\tau)=\iint_{R^2}\frac{1}{\lambda}C_{s_\circ}(\lambda\tau)D(\lambda,\xi)d\lambda d\xi \quad (44)$$

$C_{s_\circ}(\theta)$ étant la fonction d'autocorrélation de $s_\circ(t)$:

$$C_{s_\circ}(\theta)=\frac{1}{T_\circ}\int_{T_\circ}s_\circ(t)s_\circ(t-\theta)dt \rightleftharpoons \frac{|s_\circ(\nu)|^2}{T_\circ} \quad , \quad s_\circ(\nu)\rightleftharpoons s_\circ(t) \quad (45)$$

Il est alors à remarquer que la fonction de diffusion $D(\lambda,\xi)$ du milieu réverbérant n'intervient que par son intégrale vis-à-vis de ξ :

$$\int_{\mathbb{R}}D(\lambda,\xi)d\xi=p(\lambda) \quad \text{appelée "fonction de compression"} \quad (46)$$

Cette fonction permet d'évaluer le rapport entre l'énergie de la réverbération $E_r=\overline{\Gamma}_w(0)T_\circ$ et l'énergie du signal $E_s=C_{s_\circ}(0)T_\circ$ par la relation :

$$\frac{E_r}{E_s}=\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\lambda}p(\lambda)d\lambda$$

L'hypothèse de stationnarité locale conduit à substituer au caractère de non-homogénéité du filtre $Q(t,u)$ une "homogénéité locale" ; ce filtre est caractérisé par sa réponse impulsionnelle $Q_\infty(\tau)$ ou par son gain complexe $q_\infty(\nu)\rightleftharpoons Q_\infty(\tau)$ et on a, d'après (24), en négligeant les conditions aux limites :

$$q_\infty(\nu)=\frac{1}{\gamma_\circ+\gamma_{\tilde{w}}(\nu)} \quad , \quad \gamma_{\tilde{w}}(\nu)\rightleftharpoons\overline{\Gamma}_w(\tau) \quad (48)$$

Le filtre Q est alors le filtre de blanchiment pour le bruit coloré $v(t)+\tilde{w}(t)$; il est à paramètres constants ; néanmoins, ces paramètres sont à modifier lorsqu'on déplace la fenêtre d'observation, ce qui est un problème d'adaptativité.

Quant à l'indice de performance, il est donné par la formule classique pour un bruit coloré :

$$J = \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{|s(\nu)|^2}{\gamma_\circ + \gamma_{\tilde{w}}(\nu)} d\nu\right]^{1/2}, \quad s(\nu) \quad s(t) \tag{49}$$

Voyons ce que donne, dans ces conditions, le récepteur non-adapté à la réverbération, étudié au paragraphe (4). La présence du terme $\tilde{w}(t)$ diminue la performance d'une quantité caractérisée par R'_4. On obtient, en portant (44) dans (36) :

$$R'_4 = \frac{T_\circ}{\gamma_\circ^2} \iint_{T_\circ^2} \frac{1}{\lambda} C_{s_\circ}(\lambda\tau) p(\lambda) C_s(\tau) d\tau d\lambda \tag{50}$$

L'hypothèse de stationnarité locale fait intervenir, dans l'interaction milieu-signaux exprimée par R'_4, des descriptions plus sommaires de ceux-ci que dans le cas général donné par (37) (fonctions de corrélation et fonction compression, au lieu de:fonction d'ambiguïté et fonction de diffusion). En utilisant les représentations fréquentielles, on a

$$R'_4 = \frac{1}{\gamma_\circ^2} \int_{\mathbb{R}} |s(\nu)|^2 \gamma_{\tilde{w}}(\nu) d\nu = \frac{V'^2}{\gamma_\circ^2} \tag{51}$$

L'indice de performance est donné par (41) avec la nouvelle expression de V^2 définie par (51) :

$$J' = \left(\eta' \frac{E_s}{\gamma_\circ}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{\eta'} = 1 + \frac{V'^2}{\gamma_\circ E_s} \tag{52}$$

On notera que les formules (49) et (52) doivent être considérées comme approchées, puisqu'elles correspondent à une description simplifiée de la réverbération.

Dans le cas particulier où la densité spectrale $|s(\nu)|^2$ du signal est constante dans la bande passante et où la fonction de compression du milieu est à support suffisamment étroit pour qu'on puisse admettre que $\gamma_{\tilde{w}}(\nu)$ est aussi à valeur constante $\gamma_{\tilde{w}}$, les formules ci-dessus se réduisent à la même expression (52) avec

$$\eta' = \frac{1}{1 + \frac{\gamma_{\tilde{w}}}{\gamma_\circ}} = \frac{1}{1 + \frac{E_r}{E_v}} \tag{53}$$

E_r : énergie de la réverbération, E_v : énergie du bruit blanc.

5b. Bruit blanc prépondérant.

Ce cas est intermédiaire entre celui où le bruit de réverbération prédomine et où $Q(t,u)$ est donné par (24) et le cas où on ne prend en compte que le bruit blanc, $Q(t,u)$ étant alors un filtre identité. L'hypothèse de bruit blanc prépondérant se traduit par le fait qu'on peut développer le quotient de la formule (26) en puissances croissantes de $\lambda_i/\gamma_\circ$ et ne conserver que le terme du premier degré, soit :

$$Q_1(t,u) = \frac{1}{\gamma_\circ} \sum_i \phi_i(t)\phi_i(u) \left(1 - \frac{\lambda_i}{\gamma_\circ}\right) = \frac{1}{\gamma_\circ}\delta(t-u) - \frac{1}{\gamma_\circ^2}\Gamma_{\tilde{w}}(t-u) \tag{54}$$

On économise ainsi l'inversion de l'opérateur covariance.

L'indice de performance, calculé au moyen de (21) et (54) et exprimé au moyen de R'_1 et R'_4 (formules (35) et (36)) est alors : $J_1 = (R'_1 - R'_4)^{\frac{1}{2}}$

$$J_1 = \left(\eta_1 \frac{E_s}{\gamma_\circ}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \eta_1 = 1 - \frac{V^2}{\gamma_\circ E_s} \tag{55}$$

V^2 étant donné par (40).

6. ADAPTATION DU SIGNAL AU CANAL DE TRANSMISSION.

Dans le cas de la réverbération, où le bruit est non-stationnaire pendant la durée d'observation, ou stationnaire mais coloré, l'indice de performance dépend de la forme du signal d'émission, alors qu'avec l'hypothèse, souvent admise pour simplifier, de bruit stationnaire blanc, il ne dépend que de l'énergie que contient le signal. L'optimisation doit donc porter non seulement sur la structure du récepteur, mais encore sur la forme du signal $s(t)$ émis, à énergie E_s constante.

Pour le récepteur optimal, dont l'indice de performance est donné par la formule (15), l'adaptation du signal au bruit non-stationnaire consiste à chercher le signal s qui maximise la quantité :

$$R_1 = s^T \tilde{\Gamma}_b^{-1} s = s^T x, \quad x = \tilde{\Gamma}_b^{-1} s \tag{56}$$

sous la contrainte : $s^T s = E_s$ = constante.

L'inégalité de SCHWARZ appliquée aux vecteurs s et x s'écrit :

$$s^T x \leq (s^T s \; x^T x)^{\frac{1}{2}} \tag{57}$$

Le maximum de R_1 est obtenu pour $s = \lambda x$, λ c'est-à-dire :

$$\tilde{\Gamma}_b s = \lambda s \tag{58}$$

Si $\tilde{\Gamma}_b$ est indépendant de s, (58) est l'équation aux valeurs propres de la covariance centrée $\tilde{\Gamma}_b$. On a donc :

$$\max R_1 = \frac{1}{\lambda_{i\,\max}} s^T s = \frac{1}{\lambda_{i\,\max}} E_s \tag{59}$$

Maximiser R_1, à énergie-signal constante, conduit donc à prendre pour s le vecteur propre de la matrice de covariance centrée correspondant à la plus petite valeur propre.

Dans le cas de la réverbération, la matrice $\tilde{\Gamma}_b$ dépend de s ; tout élément Γ_{ij} de cette matrice est fonction des composantes du signal s et on a à résoudre le système de $(n+1)$ équations non-linéaires suivant, à n inconnues s_i et une inconnue λ :

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} \Gamma_{ij}(s_1,s_2,\dots s_n)\, s_j = \lambda s_i \quad , \quad i \in [1,\dots n] \\ &\sum_{i=1}^{n} s_i^2 = E_s \end{aligned}\right\} \qquad (60)$$

Si ce système possède plus d'une solution en λ , il faut choisir celle qui a la plus petite valeur.

On peut aussi procéder par la méthode du multiplicateur de LAGRANGE ; soit à maximiser :

$$R_1 = s^T A s \quad , \quad A = A^T = \tilde{\Gamma}_b^{-1} \qquad (61)$$

sous la contrainte:

$$E_s - s^T s = 0 \qquad (62)$$

On forme l'hamiltonien:

$$H(s,\lambda) = s^T A s + \mu(E_s - s^T s) = \sum_i \sum_j s_i A_{ij} s_j + \mu(E_s - \sum_i s_i^2) \qquad (63)$$

L'équation matricielle donnant les extremums de R_1 est $\frac{\partial H}{\partial s} = 0$, ce qui conduit au système de $(n+1)$ équations :

$$\left.\begin{aligned} &2 \sum_j A_{kj} s_j + \sum_i \sum_j s_i \frac{\partial A_{ij}}{\partial s_k} s_j - 2\mu s_k = 0, \quad k \in [1,\dots n] \\ &\sum_i s_i^2 = E_s \end{aligned}\right\} \qquad (64)$$

Si la matrice $A = \tilde{\Gamma}_b^{-1}$ ne dépend pas de s , on retombe sur une équation aux valeurs propres semblable à (58), dont les solutions μ_i sont les valeurs propres $1/\lambda_i$ de $\tilde{\Gamma}_b^{-1}$.

On notera que la seconde méthode donne les extremums et qu'il faut donc encore distinguer les maximums des minimums.

Dans le cas où le récepteur n'est pas adapté à la réverbération, mais seulement à un bruit blanc, l'indice de performance est donné par la formule (33). On a alors à minimiser la quantité $s^T \tilde{\Gamma}_b s$; la méthode précédente s'applique en posant $A = \tilde{\Gamma}_b$.

En pratique, la dépendance de la covariance en fonction du signal est généralement trop compliquée pour qu'on puisse espérer aboutir à une solution formelle ; on peut alors procéder à une optimisation numérique en cherchant, par la méthode du gradient ou une méthode équivalente, le vecteur s qui maximise ou minimise, selon le cas, le scalaire :

$$s^T A s = \sum_i \sum_j s_i A_{ij}(s_1,s_2,\dots s_n)\, s \ .$$

CONCLUSION.

Le bruit de réverbération présente deux caractéristiques essentielles : sa non-stationnarité et sa moyenne statistique non nulle et fonction du temps ; de plus, ce bruit dépend du signal émis.

Il en résulte plusieurs conséquences, quant à l'optimisation d'un système de détection active :

1/ le récepteur optimal comporte un filtre adapté à la covariance centrée du bruit (qui dépend du milieu réverbérant et du signal émis) ; les paramètres de ce filtre varient au cours du temps, dans un repère lié au signal d'émission ;

2/ le seuil de détection est lié à la valeur moyenne du bruit, mais demeure indépendant du temps ;

3/ les performances en détection dépendent de l'énergie contenue dans le signal,mais aussi de sa forme temporelle, ce qui conduit à adapter également le signal à la réverbération.

Par rapport à un système classique conçu pour un bruit blanc, le système optimisé pour une réverbération de caractéristiques données présente un gain de performance d'autant plus grand que la non-stationnarité est plus prononcée.

Cependant, une simplification du traitement est possible sous certaines conditions, par exemple : stationnarité locale ; dans ce cas, un filtre homogène suffit, mais l'optimisation pose alors un problème d'adaptativité (et, en particulier, d'estimation en temps réel de la covariance du bruit) lorsqu'on déplace la fenêtre d'observation.

En ce qui concerne l'optimisation de la forme du signal, il ne paraît guère possible d'opérer autrement que par une méthode algorithmique de recherche.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] JOURDAIN (G.) - Caractérisation d'un milieu de transmission aléatoire par un modèle de filtre aléatoire variable au cours du temps. - Ann. Téléc. 28, Sept.Oct. 1973, 413-422.

[2] JOURDAIN (J.Y.) - Description d'une chaîne de mesure statistique de présentation de quelques applications pour l'étude et la réverbération de surface.- Thèse Dr. Ing., Grenoble, 1970.

[3] VAN TREES (H.L.) - Détection, estimation and modulation theory. - Vol. 1 (WILEY, 1968).

[4] FAURE (M.P.)- Modèle statistique de la réverbération. Cours d'Eté OTAN, Traitement du Signal, Grenoble, Sept. 1964, 109-122.