

COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 16 au 21 JUIN 75



L'AUTOCORRELATION LOGIQUE

P. BOIS

INSTITUT FRANCAIS DU PETROLE, 4, avenue de Bois-Préau - 92500 RUEIL-MALMAISON

RESUME

Cette étude présente une application de l'analyse dyadique aux phénomènes stochastiques en montrant que :

- l'autocorrélation logique définie dans l'espace complet des fonctions de Hadamard est beaucoup plus rapide à calculer à l'ordinateur que l'autocorrélation arithmétique calculée dans l'espace complet des fonctions trigonométriques.

- il existe une relation liant ces deux fonctions.

Le problème posé dans ce papier est de savoir s'il est plus rapide pour obtenir l'autocorrélation arithmétique de calculer l'autocorrélation logique puis d'utiliser la relation mentionnée plus haut ou de la déterminer directement par la méthode classique de Cooley-Tukey.

SUMMARY

In this paper, an application of dyadic analysis to stochastic processes shows that :

- logical autocorrelation functions are faster to compute than arithmetic autocorrelation functions. The former are derived from the complete set of Hadamard functions, the latter from the complete set of sinusoidal functions.

- there is a relationship between arithmetic and logical autocorrelation functions.

An algorithm is implemented for calculating arithmetic autocorrelation functions by using logical autocorrelation functions and the above-mentioned relationship. This method provides a considerable saving in computer time.

INTRODUCTION

Depuis la connaissance en 1965 de l'algorithme de Cooley et Tukey (1), de nombreux chercheurs ont essayé d'obtenir, aux calculateurs électroniques, les transformations linéaires le plus rapidement possible. L'analyse des processus qui ont amené à l'élaboration de nouveaux algorithmes constitue l'étude des Transformations Rapides Généralisées (T.R.G.). Dans ce papier, nous donnons à partir de l'autocorrélation logique une méthode pour calculer très rapidement l'autocorrélation arithmétique.

I - AUTOCORRELATION ARITHMETIQUE

L'autocorrélation arithmétique d'une fonction temporelle $f(t)$ est définie par la moyenne temporelle :

$$A_n(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} f(t+x) f(t), \quad x=0, \pm 1, \dots, \pm 2^{n-1} \quad (\text{I.1})$$

$A_n(x)$ étant une fonction paire, son calcul direct demande $2^{n-1}(2^n+1)$ multiplications et additions de nombres réels.

Ce temps de calcul, proportionnel à la moitié du carré du nombre de termes de la fonction f , a été considérablement réduit en appliquant les algorithmes de la transformation rapide de Fourier (T.R.F.).

En effet, on calcule d'abord la transformée de Fourier de la fonction f , puis le carré de chacun des termes de cette transformée pour obtenir le spectre de puissance de f , enfin l'autocorrélation arithmétique est obtenue en effectuant la transformation inverse de Fourier de ce spectre de puissance de f . L'utilisation de l'algorithme de Cooley et Tukey pour le calcul des deux transformations demande $n 2^{n+3}$ multiplications et additions de nombres complexes. De plus, il faut ajouter 2^n multiplications de nombres complexes pour le calcul du spectre de puissance de f . Grosso modo, pour obtenir l'autocorrélation arithmétique d'une fonction de 2^n termes, il faut $2^n(8n+1)$ multiplications de nombres complexes et un nombre comparable d'additions de nombres complexes.

II - AUTOCORRELATION LOGIQUE

Donnons d'abord quelques définitions. La convolution logique de deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ définies pour $x = 0, 1, \dots, 2^n-1$ est donnée par :

$$f(x) \otimes g(x) = 2^{-n/2} \sum_{y=0}^{2^n-1} f(x \oplus y) g(y), \quad (\text{II.1})$$

où \otimes est le symbole de la convolution logique,

\oplus est le symbole du ou exclusif ou encore de la somme modulo 2 sans retenue :

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \quad (\text{II.2})$$

L'autocorrélation dyadique d'une fonction $f(x)$ est par définition la convolution logique de $f(x)$ par elle-même :

$$l(x) = f(x) \otimes f(x) = 2^{-n/2} \sum_{y=0}^{2^n-1} f(x \oplus y) f(y). \quad (\text{II.3})$$

L'autocorrélation logique d'une fonction temporelle $f(t)$ est définie comme la moyenne temporelle des autocorrélations dyadiques de $f(t)$.

$$L_n(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} l(t+x), \\ = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \left[2^{-n/2} \sum_{y=0}^{2^n-1} f(t+(x \oplus y)) f(t+y) \right], \quad (\text{II.4})$$

pour $x = 0, \pm 1, \dots, \pm 2^{n-1}$.

Le calcul direct de l'autocorrélation logique $L_n(x)$ est plus rapide que celui de l'autocorrélation arithmétique. En effet, $L_n(x)$ est obtenue directement en effectuant $2^{n-1}(2^n+1)$ additions arithmétiques et un nombre identique d'additions modulo 2 sans retenue. Ces opérations sont câblées dans la plupart des calculateurs électroniques et donc effectuées très rapidement.

Sachant que le théorème de Wiener-Khinchine s'applique également en analyse logique, on peut ainsi obtenir l'autocorrélation logique $L_n(x)$ par une voie analogue à celle que nous avons utilisée pour le calcul de l'autocorrélation arithmétique $A_n(x)$. En effet, on calcule d'abord la transformée de la fonction f , puis le carré de chacun des termes de cette transformée pour obtenir le spectre de puissance de f , enfin on obtient $L_n(x)$ en effectuant la transformation inverse de ce spectre de puissance de f . La transformation utilisée est celle de Hadamard car c'est l'une des plus rapides parmi les T.R.G.

La transformation de Hadamard a pour noyau la matrice H_{k+1} d'ordre 2^k qui est donnée par la relation de récurrence :

$$H_{k+1} = H_2 \otimes H_k \quad (\text{II.5})$$

où \otimes est le symbole du produit de Kronecker de deux matrices et

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.6})$$



La transformée F d'une fonction $f(x)$ pour $x = 0, 1, \dots, 2^n - 1$ est le produit du vecteur qui a pour composantes les 2^n échantillons de $f(x)$ multipliés par la matrice de Hadamard H_{n+1} .

$$F = f \cdot H_{n+1} \quad (\text{II.7})$$

La transformée inverse est donnée par :

$$f = F \cdot H_{n+1}^{-1} \quad (\text{II.8})$$

La transformation de Hadamard est unitaire.

$$H_{n+1}^2 = 2^n I \quad (\text{II.9})$$

La transformation de Hadamard est une transformation rapide généralisée (T.R.G.) et peut être obtenue en utilisant l'algorithme de Cooley et Tukey. Ainsi l'autocorrélation logique est calculée en effectuant $2^n(1+2n)$ additions ou soustractions de nombres réels ainsi que 2^n multiplications de nombres réels pour obtenir le spectre de puissance de f .

III - RELATION ENTRE $L_n(x)$ et $A_n(x)$

La question qui se pose est de savoir s'il est plus rapide d'obtenir l'autocorrélation arithmétique en calculant l'autocorrélation logique et en appliquant la relation qui lie ces deux fonctions ou de la déterminer par la méthode de Cooley et Tukey.

La relation qui lie $L_n(x)$ à $A_n(x)$ a été donnée par Pichler et se présente sous la forme suivante :

$$L_n(x) = 2^{n/2 - V(x)} \sum_{i=0}^{2^{V(x)} - 1} A_n(T_i(x)),$$

où $T_i(x) = x - 2^i \mathcal{N}_i(x)$, (III.1)

avec $x = 2^i 1 + 2^i 2 + \dots + 2^i V(x)$

et $\mathcal{N}_0(x) = 0$, $\mathcal{N}_1(x) = 2^i 1$, $\mathcal{N}_2(x) = 2^i 2$, ...

$\mathcal{N}_2 V(x) - 2 = x - 2^i 1$ et $\mathcal{N}_2 V(x) - 1 = x$.

$V(x)$ est donc le nombre de digits unité que contient la décomposition binaire de x . Les $\mathcal{N}_i(x)$ sont au nombre de $2^{V(x)}$: $\mathcal{N}_0(x)$ est toujours nul, les $V(x)$ suivants $\mathcal{N}_k(x)$ sont égaux à $2^i k$, $k = 1, 2, \dots, V(x)$, les autres sont formés par les sommes des $\mathcal{N}_k(x)$ précédents pris deux à deux, trois à trois ..., le dernier $\mathcal{N}_{2^{V(x)} - 1}$ est toujours égal à x .

Donnons un exemple :

$$x = 5 = 2^0 + 2^2,$$

$$V(5) = 2 \text{ et } i_1 = 0, \quad i_2 = 2,$$

$$\mathcal{N}_0(5) = 0, \quad \mathcal{N}_1(5) = 1, \quad \mathcal{N}_2(5) = 4 \text{ et } \mathcal{N}_3(5) = 5.$$

A partir de la relation (III.1) difficile à appliquer, Pichler (2, 3) a eu le mérite de la mettre sous forme matricielle.

$$L_n = D_n A_n \quad (\text{III.2})$$

$$\text{où } D_n = 2^{n/2} \Delta_n T_n.$$

Δ_n et T_n sont des matrices d'ordre 2^n et définies de la façon suivante :

- Δ_n est une matrice diagonale telle que :

$$d_{yx} = \begin{cases} 2^{1-V(x)} \delta(x,0) - V(x), & \text{pour } x = y, \\ 0, & \text{pour } x \neq y, \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

$$\text{avec } \delta(x,0) = \begin{cases} 1, & \text{pour } x = 0, \\ 0, & \text{pour } x \neq 0, \end{cases}$$

pour $x = 0, 1, 2, \dots, 2^n - 1$ et $y = 0, 1, 2, \dots, 2^n - 1$.

- T_n est une matrice telle que ses éléments

$t_{xy} = 1$ s'il existe un i tel que $y = T_i(x)$ et $t_{xy} = 0$ autrement. On peut obtenir les t_{xy} en utilisant un processus équivalent :

$$t_{x'y} = 1, \text{ si } y > 0 \text{ est décomposable}$$

en

$$y = \sum_{i=0}^{n-1} x_i 2^i, \text{ où les } x_i \text{ sont tirés de}$$

$$x = \sum_{i=0}^{n-1} x_i 2^i \quad (\text{III.4})$$

Nous donnons Δ_n et T_n pour $n = 3$.

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\text{et } T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La structure de ces matrices T_n a incité Robinson (4) à en trouver une décomposition en produit de matrices.

IV - RELATION DE RECURRENCE QUI DONNE T_n

Cette relation de récurrence est donnée par :

$$T_0 = [1],$$

$$T_k = \begin{bmatrix} T_{k-1} & O_{k-1} \\ T_{k-1}^* & T_{k-1} \end{bmatrix}, \text{ pour } k=0, 1, 2, \dots, n,$$

où $T_0^* = [0]$ et

(IV.1)



$$T_n^{-1} = \prod_{k=1}^{n-1} \mathcal{C}_k^{-1} I_n, \quad (V.5)$$

$$= \mathcal{C}_1^{-1} \mathcal{C}_2^{-1} \dots \mathcal{C}_{n-1}^{-1} I_n, \quad (V.6)$$

$$\text{où } \mathcal{C}_k^{-1} = \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_k^{-1} & & 0 \\ & \mathcal{Y}_k^{-1} & \\ 0 & & \mathcal{Y}_k^{-1} \end{bmatrix} \quad (V.7)$$

$$\text{et } \mathcal{Y}_k^{-1} = \begin{bmatrix} I_{n-k} & 0_{n-k} \\ -S_{n-k} & I_{n-k} \end{bmatrix} \quad (V.8)$$

D'après (V.1), (V.2) et (V.3), l'autocorrélation arithmétique est donnée en fonction de l'autocorrélation logique par :

$$A_n = \prod_{k=1}^{n-1} \mathcal{C}_k^{-1} I_n \Delta_n^{-1} L_n. \quad (V.9)$$

Rappelons que L_n l'autocorrélation logique est représentée par un vecteur colonne à $N=2^n$ composantes et que Δ_n^{-1} est une matrice ($2^n \times 2^n$) diagonale. Le produit $\Delta_n^{-1} \cdot L_n$ qui donne un vecteur colonne à 2^n composantes demande 2^n multiplications (de nombres réels). Le produit de ce vecteur par la matrice \mathcal{C}_{n-1}^{-1} réclame du fait de la structure de cette dernière 2^{n-2} soustractions (de nombres réels).

Dans \mathcal{C}_{n-1}^{-1} , nous avons 2^{n-2} matrices \mathcal{Y}_{n-1}^{-1} :

$$\mathcal{Y}_{n-1}^{-1} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ -S_1 & I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Seule la dernière ligne de ces matrices contient - 1 et + 1. Le produit de \mathcal{C}_{n-1}^{-1} avec un vecteur colonne qui donne un vecteur colonne se ramène à effectuer 2^{n-2} soustractions. Dans \mathcal{C}_{n-2}^{-1} , nous avons 2^{n-3} matrices \mathcal{Y}_{n-2}^{-1} :

$$\mathcal{Y}_{n-2}^{-1} = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ S_2 & I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Seules les trois dernières lignes de ces matrices contiennent - 1 et + 1. Le produit de \mathcal{C}_{n-2}^{-1} avec le vecteur colonne précédemment défini demande $3 \times 2^{n-3}$ soustractions.

Dans \mathcal{C}_{n-q}^{-1} , nous avons 2^{n-q-1} matrices \mathcal{Y}_{n-q}^{-1} :

$$\mathcal{Y}_{n-q}^{-1} = \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ -S_q & I_q \end{bmatrix}$$

Seules les 2^{q-1} dernières lignes contiennent + 1 et - 1. Le produit de \mathcal{C}_{n-q}^{-1} avec un vecteur colonne réclame $2^{n-q-1} (2^q - 1) = 2^{n-1} - 2^{n-q-1}$ soustractions.

Le nombre total N_s de soustractions pour effectuer le produit de matrices (V.9) est obtenu en sommant l'expression ci-dessus de $q = 1$ à $q = n - 1$:

$$N_s = (n - 2) 2^{n-1} + 1. \quad (V.10)$$

Le calcul à l'ordinateur de l'autocorrélation arithmétique en utilisant l'algorithme précédent est très rapide. En effet, l'autocorrélation arithmétique d'une fonction $f(x)$ définie par 2^n échantillons se calcule en effectuant 2^{n+1} multiplications et $5n 2^{n-1}$ additions ou soustractions de nombres réels, c'est-à-dire :

- $2^n(1 + 2n)$ additions et 2^n multiplications pour obtenir l'autocorrélation logique L_n de $f(x)$,

- 2^n multiplications pour effectuer le produit de matrices $\Delta_n^{-1} L_n$. Du fait de la structure de Δ_n^{-1} , ces multiplications sont en réalité des décalages.

- $N_s = (n-2) 2^{n-1} + 1$ soustractions pour appliquer l'algorithme qui permet de passer de L_n à A_n .

Lopresti et Suri (5) présentent les graphes des transformations (III.2) et (V.1) ainsi que deux tableaux. Ils permettent de comparer les nombres de multiplications et d'additions à effectuer pour obtenir l'autocorrélation arithmétique en utilisant les méthodes directes par la T.R.F. et indirecte par l'autocorrélation logique.

VI - EXEMPLES

Nous présentons un certain nombre d'exemples pour montrer que plus le nombre d'échantillons de la fonction à autocorréler est grand plus la différence entre les deux fonctions est petite. Ceci est vraisemblablement dû à la nature statistique des fonctions d'autocorrélation logique et arithmétique. Pour ce faire, nous présentons des traces sismiques tirées d'une étude faite en Mer Méditerranée représentées successivement par 256, 512 et 1024 échantillons. Le pas d'échantillonnage est de 4 ms. Nous donnons également les spectres séquentiels et fréquentiels ainsi que les autocorrélations logiques et arithmétiques de ces traces et leur différence. Les amplitudes de cette dernière courbe ont une moyenne nulle et un écart-type qui décroît en fonction du nombre d'échantillons, comme le montre la dernière figure. On peut penser que les autocorrélations arithmétiques de fonctions qui ont au moins 4096 échantillons sont assez bien représentées par les autocorrélations

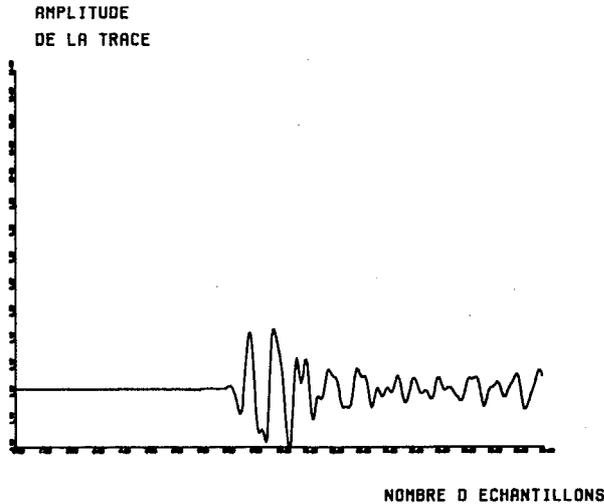


logiques.

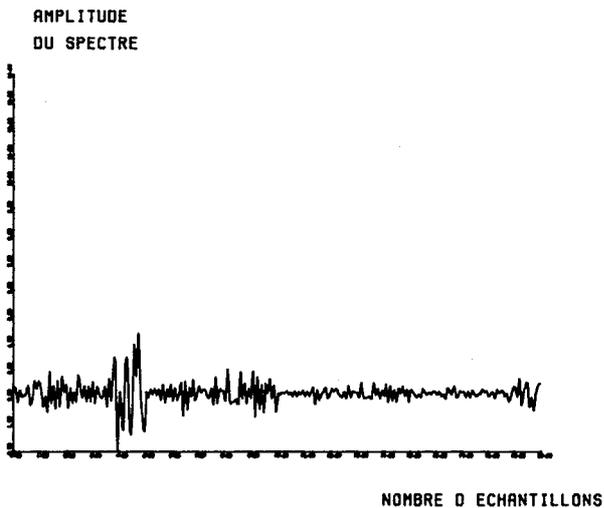
BIBLIOGRAPHIE

- (1) COOLEY (J.W.), TUKEY (J.W.), An algorithm for the machine calculation of complex Fourier Series. Math. of Computation, April 1965, 19, n° 90, pp. 297-301.
- (2) PICHLER (F.), Walsh functions. Introduction to the theory, Nato Adv. Study Inst. on Signal Proc., Sept. 1972, Univ. of Techn. Loughborough, U.K.
- (3) PICHLER (F.), Some aspects of a theory of correlation with respect to Walsh Harmonic Analysis, Report R-70-11, Department of Electrical Engineering, University of Maryland.
- (4) ROBINSON (G.S.), Logical convolution and discrete Walsh and Fourier power spectra, IEEE Trans. on Audio, Vol. Au - 20, n° 4, oct. 1972, pp. 271-80.
- (5) LOPRESTI (P.V.), HIRA (L.S.), A fast algorithm for the estimation of autocorrelation functions, IEEE Trans. On Acoust., Vol. ASSP-26, n° 6, Dec. 74, pp. 449-53.

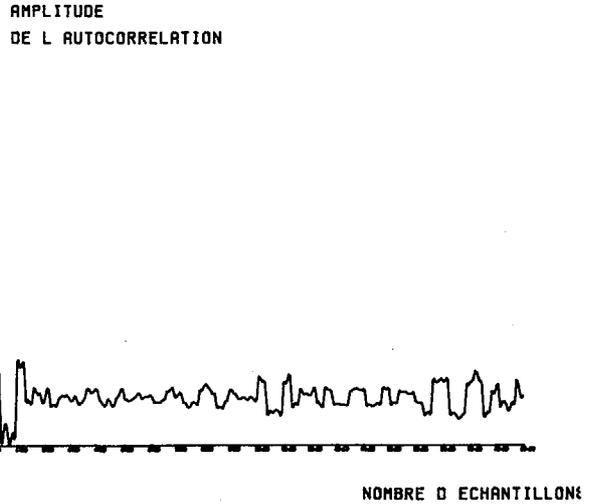
TRACE ORIGINALE



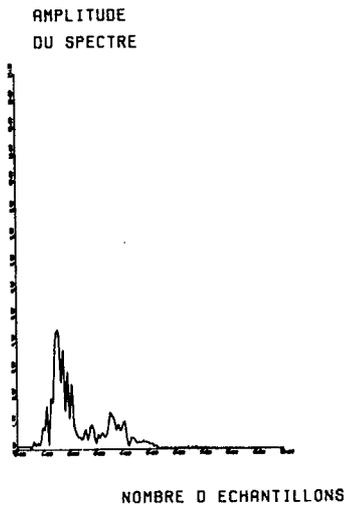
SPECTRE SEQUENTIEL



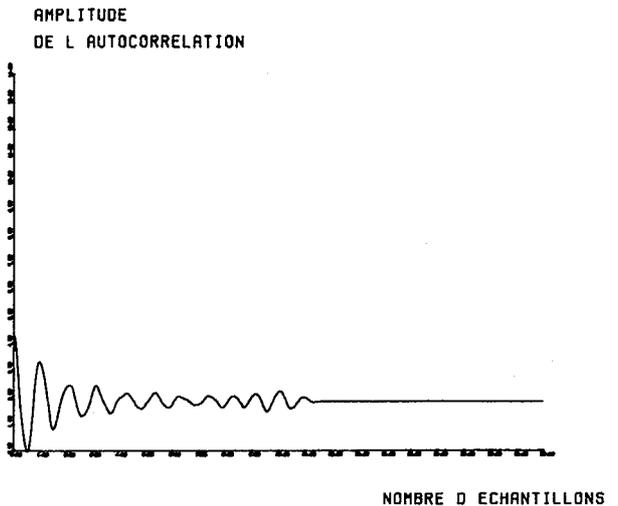
AUTOCORRELATION DE WALSH FOURIER



SPECTRE DE FOURIER



AUTOCORRELATION DE FOURIER

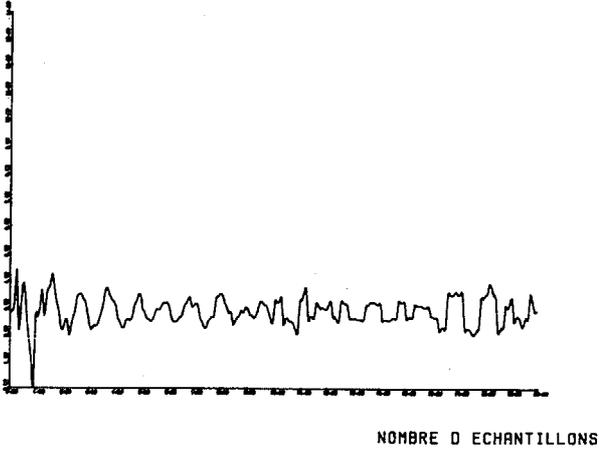




L'AUTOCORRELATION LOGIQUE

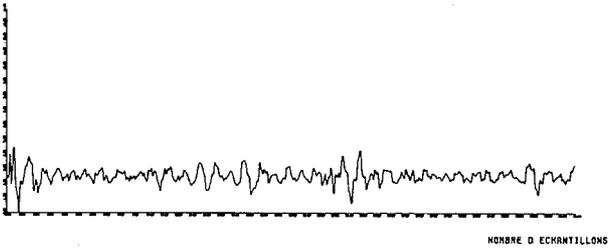
DIFFERENCE ENTRE LES 2 AUTOCORRELATIONS

AMPLITUDE



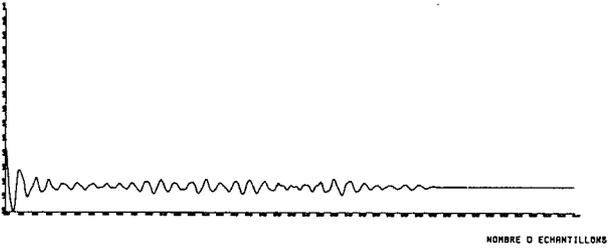
DIFFERENCE ENTRE LES 2 AUTOCORRELATIONS

AMPLITUDE



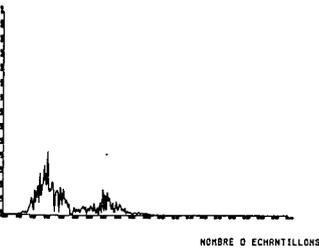
AUTOCORRELATION DE FOURIER

AMPLITUDE DE L' AUTOCORRELATION



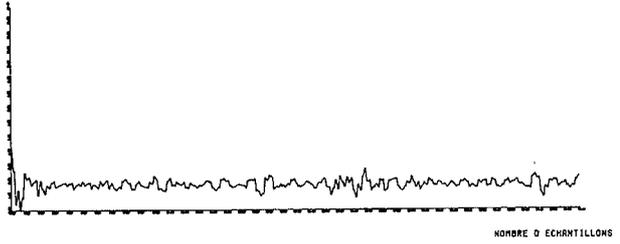
SPECTRE DE FOURIER

AMPLITUDE DU SPECTRE



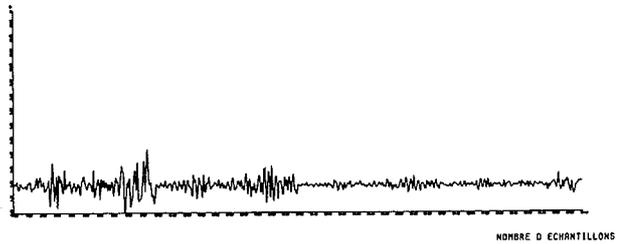
AUTOCORRELATION DE WALSH FOURIER

AMPLITUDE DE L' AUTOCORRELATION



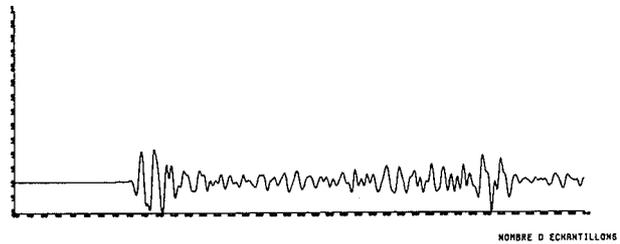
SPECTRE SEQUENTIEL

AMPLITUDE DU SPECTRE



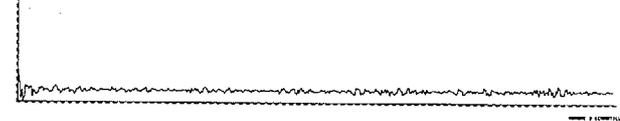
TRACE ORIGINALE

AMPLITUDE DE LA TRACE



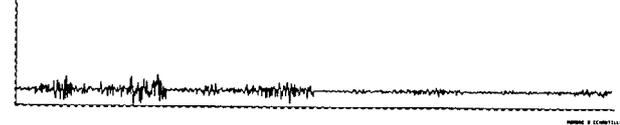
AUTOCORRELATION DE WALSH FOURIER

AMPLITUDE DE L' AUTOCORRELATION



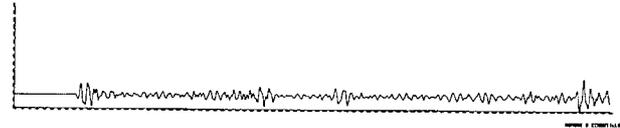
SPECTRE SEQUENTIEL

AMPLITUDE DU SPECTRE



TRACE ORIGINALE

AMPLITUDE DE LA TRACE





L'AUTOCORRELATION LOGIQUE

