

COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 16 au 21 JUIN 75



TRAITEMENT D'ANTENNE ET IMAGERIE

JACQUES MUNIER

CENTRE D'ETUDE DES PHENOMENES ALEATOIRES ET GEOPHYSIQUES, B.P. 15 - 38040 GRENOBLE-CEDEX

RESUME

AVANT-PROPOS.

Prétendre, en quelques pages, faire la synthèse des connaissances en matière de traitement d'antenne tient de la gageure, tellement est vaste la question et sont variés les travaux qui lui ont été consacrés, surtout depuis une ou deux décennies (essentiellement dans les domaines du RADAR et du SONAR).

Nous ferons tout d'abord, aux chapitres 1, 2 et 3, un rapide tour d'horizon, afin de mettre en lumière les très nombreux aspects du problème, pour ensuite traiter plus en détail, aux chapitres 4 et 5, ceux d'entre eux qui ont suscité le plus d'efforts ces dernières années - principalement, l'optimisation du traitement d'antenne selon un critère de détection ou d'estimation de paramètres - et examiner les voies de recherche actuelles - notamment l'imagerie, c'est-à-dire l'étude du mécanisme de formation de l'image (RADAR, radiométrique, SONAR, etc...) d'un objet et son optimisation selon un critère de résolution et de fidélité de reproduction.

En ce qui concerne la bibliographie, elle est si étendue qu'un choix (toujours critiquable) s'imposait ; qu'on veuille donc bien retenir que celle que nous proposons "in fine" n'est pas exhaustive.

Cette étude, forcément condensée et donc quelque peu caricaturale, aura au moins le mérite (nous l'espérons) de montrer l'intérêt qu'il y aurait à procéder à d'autres tentatives de synthèse sur des sujets plus limités (tel celui de l'imagerie qui est à la mode du jour).

SUMMARY

FOREWORD.

To present the synthesis, in a few pages, of the current knowledge concerning antenna processing is a wager ; the subject is vast and the previous works during the last two decades have been very varied (mainly, in the fields of RADAR and SONAR).

In chapters 1 to 3, we present a rapid "tour d'horizon" in order to illuminate the numerous aspects of the problem. We discuss in the following chapters 4 and 5 those subjects which have aroused most interest during the last years, primarily the optimization of antenna processing according to criteria of detection or parameter estimation, and examine the aspect of current research, especially in "imagery" - that is the process of image formation of an object (RADAR, radiometric, SONAR, ...) and its optimization according to criteria of resolution and fidelity of reproduction.

The bibliography is so extended that a selection (which can always be criticized) had to be made and the one we propose "in fine" is by no means exhaustive.

We hope that this study, which is necessarily condensed and therefore somewhat just like a caricature, has at least the merit to demonstrate the interest for future reviews on more limited subjects, such as imagery - a fashionable present day topic.



1. DIVERSITE DES TRAITEMENTS D'ANTENNE.

1.1 Rétrospective.

L'histoire du traitement du signal appliqué aux antennes électromagnétiques ou acoustiques (et, plus généralement, aux senseurs spatio-temporels, par exemple optiques ou infrarouges) est déjà fort longue : un demi siècle ou même davantage. Trois périodes la caractérisent.

La première est celle de *l'empirisme* ; on aurait tort d'oublier les solutions souvent fort ingénieuses qui y ont vu le jour et qui, à l'examen, se révèlent parfois très proches de l'optimalité. A titre d'exemples, les systèmes de type "équisignal" à comparaison séquentielle ou instantanée d'amplitude, de phase ou de taux de modulation, tels qu'on les utilise depuis fort longtemps en radionavigation et dans les radars de poursuite, sont des estimateurs angulaires très efficaces ; les interféromètres à corrélation et les radiotélescopes à antennes synthétiques imaginés par les radioastronomes sont des exemples tout aussi remarquables. Pour mémoire, rappelons les principales techniques spéciales qui ont été élaborées au cours de cette période [28][65][67] : antennes à produit, antennes synthétiques, antennes multifaisceaux (voies préformées), antennes à paramètres variables dans le temps (modulation d'ouverture), antennes agiles, antennes à commutation logique.

La seconde période est celle de *l'optimalité* ; elle s'est développée depuis une trentaine d'années environ, dans un contexte tout d'abord déterministe, puis stochastique, et s'est traduite par l'emploi généralisé des méthodes variationnelles et des méthodes statistiques d'optimisation. Suivant de près et chevauchant la précédente, la 3ème période est celle de *l'adaptativité et des systèmes d'apprentissage* dont le but est de maintenir l'optimalité dans un environnement évolutif. L'intervention de l'adaptativité a été étroitement liée aux progrès de l'Automatique et s'est manifestée par l'apparition des antennes auto-focalisantes (réseaux auto-phases, réseaux rétrodirectifs) [64][67].

Les traitements optimaux et adaptatifs vont précisément constituer l'essentiel de notre sujet.

1.2 Finalité des traitements d'antenne.

L'optimisation d'un système se fait selon un critère et, en matière d'antennes, les critères sont variés ; c'est en premier lieu sur cette base que peut se faire une classification des divers traitements. En ne retenant que les principaux, nous distinguerons :

- le contraste entre signal utile et signaux nuisibles (bruit thermique, parasites atmosphériques ou industriels radioélectriques, bruiteurs sonores, brouillages, réflexion diffuse, réverbération, échos fixes, etc...), critère valable pour les communications et la détection ;
- la fidélité de reproduction d'un signal temporel ou spatial, notamment dans les domaines des communications et de l'imagerie ;
- la précision d'estimation des paramètres (essentiellement : angles et distance) d'une source ou d'une cible ponctuelle *unique*, pour la télémétrie, la goniométrie, la trajectographie, le guidage ;
- le pouvoir séparateur en angles et en distance, dans le cas d'un ensemble fini ou infini de sources ou de cibles (cas de l'imagerie et de la cartographie) ;
- l'aptitude à classifier les objets, nécessaire pour la reconnaissance de forme.

Ces critères spécifiques peuvent résulter de l'application de critères plus généraux caractéristiques de stratégies bien connues, à savoir : *le risque moyen* (stratégie bayésienne) et *le gain d'information* (stratégie shannonienne).

Quantitativement, un critère se traduit par un nombre, *l'indice de performance*, qui est généralement une fonctionnelle de divers signaux et dépend des paramètres sur lesquels on peut agir pour optimiser le système. C'est, avant tout, par le choix de cet indice que se distinguent les méthodes d'optimisation que nous examinerons, mais c'est aussi par les moyens employés pour le rendre maximal ou minimal, selon le cas.

1.3 Paramètres d'optimisation.

La diversité des traitements d'antenne se manifeste encore par le choix des paramètres d'optimisation, qui sont relatifs :

- aux capteurs (ou senseurs) élémentaires, à savoir leurs propriétés de filtrage spatio-temporel (réponse angulaire et réponse fréquentielle, les deux étant liées) ;
- à l'antenne, à savoir sa géométrie (nombre et disposition des capteurs, éventuellement variables au cours du temps), les pondérations complexes ou filtrages temporels appliqués aux capteurs, les couplages entre capteurs ;
- au signal transmis, qu'on a intérêt à adapter au but poursuivi et aux propriétés statistiques du système, dans le cas de la détection active.

La plupart des travaux publiés à ce jour portent essentiellement sur *l'optimisation de filtres linéaires ou de pondérations complexes appliquées aux sorties des capteurs* ; c'est sur cette classe importante de systèmes



que nous concentrerons notre attention. Nous passerons sous silence les méthodes de traitement spatial non-linéaire (antennes à produit), en rappelant qu'elles conduisent généralement à une amélioration sensible du pouvoir séparateur mais, en revanche, à une dégradation du rapport signal à bruit.

2. MODELISATION ET CARACTERISATION DES SIGNAUX ET DU SYSTEME.

2.1 Le champ de sources ou de cibles.

Les sources (cas de la détection passive) ou les cibles (cas de la détection active) sont, le plus souvent, à des distances grandes devant les dimensions de l'antenne et on considère donc qu'elles sont à l'infini ; sous cette hypothèse, seules interviennent dans le traitement spatial d'antenne les directions et non les distances. Selon *la structure spatiale et temporelle* du champ de sources ou de cibles et *l'information a priori* dont on dispose, de nombreux cas sont à considérer, qui se répartissent en deux grandes catégories :

a/ *En détection et en communications*, on s'intéresse à *une seule source, généralement ponctuelle*, qui, si elle est à grande distance, produit *une onde plane* au voisinage de l'antenne. Selon le cas, sa direction est connue ou inconnue et le signal utile est certain et connu (éventuellement, à paramètres aléatoires) ou aléatoire ; s'il est à bande étroite, on utilise la notation complexe (signal analytique ou enveloppe complexe) ; sinon, la notation réelle. Soulignons l'importance de *la définition de la classe des signaux utiles par rapport à celle des signaux nuisibles* ; en particulier, sont considérés comme nuisibles les échos de tous les objets autres que celui qu'on cherche à détecter.

b/ *En imagerie*, on s'intéresse à *l'ensemble (fini ou infini) des sources ou cibles, corrélées ou non entre elles*, qui constituent le champ, ou éventuellement à un sous-ensemble résultant d'une classification (spatiale, fréquentielle ou autre). Le champ peut alors être caractérisé par une *"fonction objet"* multidimensionnelle, réelle ou complexe. En raison de la capacité d'information, toujours finie, du système d'antenne, il est nécessaire de limiter le *nombre de degrés de liberté* de l'objet ; ceci s'obtient par une décomposition de la fonction-objet sur une base appropriée (en ne retenant qu'un nombre fini de coefficients) et par une quantification en niveaux. En outre, il y a intérêt à connaître les *propriétés statistiques de l'objet* (lois de probabilité ou, à défaut, moyennes et covariances).

2.2 Le champ de bruit.

Les principaux cas typiques sont les suivants :

- bruiteurs ponctuels engendrant des bruits aléatoires

à large bande, non corrélés entre eux, généralement stationnaires (exemple : les radiosources en astronomie) ;
- bruiteurs ponctuels engendrant des signaux plus ou moins cohérents (exemple : spectres de raies), généralement non-stationnaires, parfois corrélés entre eux (sources sonores, émetteurs radioélectriques) ;
- cibles ponctuelles multiples engendrant un bruit de réverbération, assimilable à un processus aléatoire non-stationnaire, mais lié au signal d'émission ;
- champ continu de bruit stationnaire à large bande à corrélation angulaire microscopique (cas du bruit thermique).

Dans le cas le plus général on caractérise le champ par *la matrice de covariance des bruits observés à la sortie des capteurs*. S'il s'agit d'un bruiteur ponctuel stationnaire, on peut le caractériser, à fréquence donnée, par *l'éclairement spectral* ($J \cdot m^{-2}$) qu'il produit sur l'antenne. Un champ continu stationnaire, s'il est à corrélation angulaire microscopique, peut se caractériser, à fréquence donnée, par *l'éclairement spectral* produit sur l'antenne, par *unité d'angle solide du champ* ($J \cdot m^{-2} \cdot sr^{-1}$) [45].

2.3 Le milieu de propagation.

Les théories actuelles du traitement optimal d'antenne considèrent le cas idéal d'un milieu homogène, isotrope et sans pertes, équivalent à une filtre linéaire à paramètres constants, dont l'effet se traduit, entre deux points de l'espace, par un simple retard et une atténuation géométrique de propagation (indépendante de la fréquence). En fait, les pertes produisent une *atténuation supplémentaire fonction de la fréquence* et un *bruit thermique* radioélectrique. Les milieux particulièrement turbulents, comme l'air pour les ondes sonores, sont des filtres à paramètres variables caractérisés par une *réponse impulsionnelle bitemporielle aléatoire* et par une *covariance à quatre variables* (modèle valable aussi pour la réverbération) ; ils produisent donc un *bruit de modulation* (multiplicatif) sur un trajet de propagation et une *décorrélacion partielle des signaux* entre trajets distincts (notamment, entre capteurs éloignés sur les grandes antennes). En ce domaine, le traitement optimal reste à trouver.

2.4 L'antenne-réseau.

D'un point de vue déterministe l'antenne est un filtre temporel linéaire, simple pour les ondes sonores, qui ne sont pas polarisées, et double en ondes électromagnétiques, pour lesquelles il faut considérer séparément les deux polarisations rectilignes ou circulaires complémentaires.

Pour un capteur isolé et des ondes non polarisées, le filtre est un quadripole dont l'entrée correspond à une



source ponctuelle à l'infini dans une direction donnée, et dont la fonction de transfert dépend des paramètres angulaires de la source. Ce quadripôle est, en outre, caractérisé par son impédance interne vue de la sortie (qu'il est nécessaire de connaître si plusieurs capteurs sont interconnectés par des circuits passifs) et par ses pertes, sources de bruit thermique. Le modèle généralement utilisé est simplifié à l'extrême (sans doute à tort) en considérant qu'il s'agit d'un filtre passe-tout pour toute direction (capteur ponctuel omnidirectionnel).

Pour un réseau de K capteurs, le filtre équivalent est un multipôle à une entrée (la source à l'infini dans la direction spécifiée) et K sorties, défini par une matrice admittance (ou impédance) de dimensions $(K+1) \times (K+1)$, dépendant des paramètres angulaires de la source [17][67][68]. Il est à noter que le couplage entre capteurs peut influencer fortement sur la matrice admittance ; d'autre part, celle-ci permet de calculer les impédances internes vues de la sortie, ainsi que le gain et la directivité de l'antenne à sortie unique obtenue en formant la somme pondérée des signaux de sortie ; à fréquence donnée, le gain suffit pour définir l'antenne vis-à-vis d'un champ de bruit à corrélation angulaire microscopique [45]. A noter également l'influence de la polarisation sur la matrice de covariance des bruits de sortie [12].

D'un point de vue probabiliste, l'antenne est la source d'un bruit thermique additif lié à ses pertes, mais en outre, elle est un filtre à paramètres aléatoires en raison des imprécisions de réalisation (géométrie, pondération, etc...) qui, avec les pertes, limitent étroitement les possibilités de superdirectivité.

2.5 L'observable.

L'ensemble des K signaux temporels prélevés à la sortie des capteurs pendant un intervalle de temps $[0, T]$ constitue habituellement l'observable, auquel devra être appliqué le traitement optimal ; nous le représenterons par le vecteur-colonne $v(t)$ dont le transposé est :

$$v^T(t) : [v_1(t), \dots, v_k(t), \dots, v_K(t)] , \quad k \in [1, \dots, K] \quad (1)$$

Chacun des processus $v_k(t)$ peut être représenté approximativement par un nombre fini P d'échantillons $v_k(p)$ qui peuvent être les P premiers coefficients d'un développement vectoriel de KARHUNEN-LOEVE appliqué à l'ensemble des K processus [72], ou encore résulter d'un échantillonnage temporel :

$$v_k(p) = v_k(t_p) , \quad t_p = p\Delta t = \frac{p}{P} T , \quad p \in [1 \dots P] \quad (2)$$

Pour des processus stationnaires, les échantillons

$v_k(p)$ peuvent être les composantes spectrales prélevées à des intervalles de fréquence $1/T$.

2.6 Modèle d'ensemble.

La représentation matricielle est particulièrement commode ; elle répond à une double nécessité, l'une théorique, qui est de limiter le nombre de degrés de liberté de "l'objet" et de "l'image" qu'en donne le système physique, l'autre pratique, liée à l'emploi des méthodes de traitement numérique. Le schéma représentatif d'un système d'antenne est alors très simple (fig. 1).

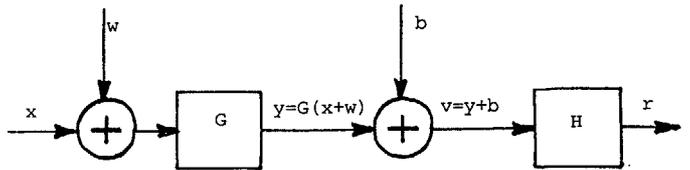


Fig. 1 - Schéma représentatif d'un système d'antenne.

Les vecteurs x et w représentent respectivement le champ de sources et le champ de bruit ; en général, ils sont statistiquement indépendants ; cependant, si w représente la réverbération en détection active, l'espérance $E\{w\}$ est liée au signal d'émission, de même que x . L'opérateur matriciel G représente le milieu de transmission et l'ensemble de capteurs ; si le milieu est turbulent ou si des paramètres du système sont incertains, la matrice G est aléatoire et on peut écrire :

$$G = \bar{G} + \check{G} , \quad \bar{G} = E\{G\}$$

Enfin, le vecteur b représente le bruit additif prenant naissance dans les capteurs et v est l'observable, auquel on applique le traitement optimal symbolisé par H , la réponse r du système pouvant être un vecteur (cas des communications et de l'imagerie) ou une simple fonctionnelle (vecteur à une dimension, cas de la détection où cette quantité est appliquée à un dispositif à seuil). En général, le filtrage H se décompose en un filtrage dit spatial, qui est plutôt spatio-temporel et qui n'agit pas de la même façon sur les différentes sorties de capteurs, et en un filtrage temporel commun. Seul le premier particularise vraiment le traitement d'antenne par rapport aux traitements classiques ; il est toujours linéaire, quel que soit le critère adopté, du moins si le filtre G n'est pas aléatoire.

3. OPTIMISATION DU TRAITEMENT.

3.1 L'information a priori.

Dans tous les cas, il y a une information minimale indispensable : le filtrage moyen \bar{G} , dont on ne connaît, en fait, qu'une estimée \hat{G} , ce qui est une source d'erreur dans l'estimation de x . L'information complémen-



taire éventuellement disponible est de nature statistique ; elle porte sur les *propriétés au second ordre* (moyennes et covariances) des bruits additifs w et b et de la partie aléatoire \tilde{G} du filtre G , qui se caractérise par des covariances à quatre indices de la forme $E\{G_{ik}G_{jl}\}$. Elle peut porter aussi sur le vecteur-signal x , lorsque celui-ci est aléatoire, ou bien est inconnu et considéré comme une réalisation particulière d'un vecteur aléatoire ; par ce moyen, on peut, par exemple, tenir compte de la positivité de la fonction-objet (cas où x représente des puissances ou des énergies). La connaissance a priori *peut aller jusqu'aux lois* (qu'on admet généralement gaussiennes). En règle générale, *toute information complémentaire prise en compte spécialise le traitement et accroît les performances*. Cette information est acquise par un apprentissage, soit préalable à tout traitement, soit en cours de traitement. Le problème de *l'adaptativité*, qui se pose lorsqu'un traitement est spécialisé pour une certaine information complémentaire, se ramène à celui de *l'acquisition en temps réel* de cette information (voire même de sa prédiction).

La difficulté majeure de mise en oeuvre des traitements spécialisés et de l'adaptativité tient à ce qu'il est presque toujours impossible d'estimer la covariance des bruits ou perturbations *en présence du signal utile* x (problème de la "référence bruit seul" [35 à 42]). Il est regrettable que beaucoup d'auteurs supposent disponible une certaine information a priori sans se préoccuper de son acquisition.

3.2 Le choix d'un indice de performance.

Discuter le choix de l'indice de performance selon lequel l'optimisation est faite, nous entraînerait trop loin ; nous nous contenterons d'énumérer les divers indices en indiquant les auteurs qui les ont employés, ce qui est certainement un des meilleurs critères de classification entre les divers traitements optimaux proposés. L'abondance des indices de performance possibles ne doit pas faire illusion quant à la variété des traitements auxquels ils conduisent ; en fait, les diverses approches aboutissent pratiquement toutes, compte-tenu des hypothèses simplificatrices qu'on est amené à faire, à des solutions identiques ou voisines :

a/ critères déterministes : directivité, gain, produit gain x bande passante [11][27][68], directivité sous contrainte relative au facteur Q caractérisant les pertes dans l'antenne [32] ;

b/ critères de détection d'une source ponctuelle :
- gain du réseau défini comme le rapport signal-à-bruit à la sortie du réseau au rapport signal-à-bruit à la sortie d'un capteur standard [20] ;
- rapport signal-à-bruit de sortie défini sur les puis-

sances moyennes en monochromatique [11][17][18][32] ou sur un intervalle de temps $[0, T]$ [50], ou encore par unité d'angle solide du champ spatial [11].

- rapport de la puissance instantanée du signal, à une date spécifiée, à la variance du bruit de sortie (critère du filtre adapté) [1][36 à 42][50] ;
- rapport signal-à-bruit à deux hypothèses (H_0 : absence de signal utile, H_1 : présence de signal utile) défini [14] par

$$R = \frac{E\{r|H_1\} - E\{r|H_0\}}{(\text{var}\{r|H_0\})^{1/2}} \quad (4)$$

- risque moyen : stratégie bayésienne ou stratégie des coûts, conduisant, en l'absence d'information a priori sur l'objet x , à maximiser le rapport de vraisemblance [4][9][13][20][25][30][31][33][35][43][51][56][73].
- puissance moyenne (ou variance) totale de sortie, sous contrainte d'une réponse fréquentielle spécifiée dans la direction de la source [23] ou de non-altération du signal provenant de cette direction [6] ;
- distance entre la fonctionnelle de sortie et une fonctionnelle de référence [26][47][57] ;

c/ critères d'estimation linéaire (restitution de la forme du signal utile) :

- distance quadratique moyenne entre signal temporel de sortie et signal temporel de la source dans la direction spécifiée (filtrage de WIENER) [3][20][25][26][47][57] ;
- fonction de vraisemblance, estimation d'un signal inconnu de direction connue [6][10][23] ;

d/ critères d'estimation de paramètres (angles et date d'arrivée du signal) :

- fonction de vraisemblance [4][30][55][56][61][63], avec méthode algorithmique de recherche et critère de distance quadratique moyenne [31] ;

e/ critères informationnels (stratégie shannonienne) :

- quantité et débit d'information caractérisant le signal de sortie ou l'erreur (différence entre ce signal et le signal d'entrée) [59][60].

3.3 La recherche d'un extremum.

Comme indiqué au paragraphe (1.2), l'optimisation consiste à rechercher un maximum ou, selon le cas, un minimum de l'indice de performance, par action sur les paramètres de commande (vecteur c) dont on est maître. Habituellement, cet indice est une fonctionnelle de la forme

$$J(c) = E\{Q(z, c)\} \quad (5)$$

où l'espérance de la fonctionnelle Q est prise sur l'ensemble des réalisations possibles du vecteur aléatoire z caractérisant les bruits, perturbations et incertitudes.

Lorsqu'on dispose d'une expression explicite de J , on peut, avant tout traitement, rechercher les conditions



d'optimisation par les méthodes analytiques classiques (inégalité de SHWARZ, calcul variationnel, optimisation sous contrainte par la méthode du multiplicateur de LAGRANGE). On obtient généralement un ensemble de relations exprimant les paramètres de commande en fonction des données connues (filtrage moyen \bar{G} , matrices de covariance, ...). Ces paramètres caractérisent, par exemple, un filtre H linéaire optimisé au sens du critère utilisé.

Il importe de remarquer que la prise en compte (au moyen de l'opérateur "espérance mathématique" $E\{\}$) des propriétés statistiques du système s'appuie sur des hypothèses qui se trouveront peut-être infirmées en pratique, ou encore nécessite une phase d'apprentissage éventuellement longue et laborieuse ; le cas critique est celui des systèmes adaptatifs où l'estimation statistique doit se faire en cours d'exploitation, en temps réel et, bien souvent, en présence du signal utile. La recherche d'un extremum peut se faire aussi par une méthode algorithmique, notamment lorsqu'on ne possède pas une expression explicite de la fonctionnelle J. Partant d'une valeur initiale arbitraire du vecteur c (ou choisie pour tenir compte des contraintes éventuelles), on procède par incrémentations successives de ce vecteur jusqu'à annuler le gradient de J par rapport à c, condition nécessaire pour que J soit extrémal. Un problème d'ambiguïté se pose lorsqu'il existe plusieurs extremums ; toutefois, lorsque le système à optimiser est linéaire et la fonctionnelle quadratique, l'extremum est unique et la condition nécessaire ci-dessus est aussi suffisante. La méthode conduit à une recherche numérique et s'applique en cours de traitement, en opérant sur les valeurs de J réellement observées ; en fait, on ne dispose que d'une seule réalisation de la fonctionnelle aléatoire $Q(z, c)$ (ou d'un petit nombre) ; on opère donc sur Q et non sur J. Il existe divers algorithmes [66][69][70][71], notamment pour des signaux complexes [58], utilisés en commande optimale de systèmes, basés sur le gradient $\nabla_c Q(c)$ de la fonctionnelle Q par rapport à c, estimé à chaque itération. La formule type d'itération est la suivante :

$$c_n = c_{n-1} - \Delta_n \nabla_c Q(c_{n-1}) \quad (6)$$

Δ_n est une matrice d'incrémentations (fonction du rang n de l'itération), réduite éventuellement à un simple scalaire.

Deux faits importants sont à remarquer : la convergence plus ou moins rapide de l'algorithme selon le choix de Δ_n et le caractère aléatoire du vecteur c_n . Sous certaines conditions, celui-ci converge en moyenne vers la valeur optimale qu'on obtiendrait

en opérant avec J, mais est affecté d'un écart-type, qui peut être prohibitif, du fait qu'on opère avec Q et non avec J. En règle générale, cet écart-type, diminue lorsqu'on augmente le temps de convergence [6][26][57], conclusion semblable à celle concernant le temps nécessaire pour estimer une matrice de covariance avec une précision donnée, sous l'hypothèse ergodique.

4. TRAITEMENT OPTIMAL EN DETECTION.

4.1 Stratégie bayésienne.

Les bases du traitement optimal d'antenne dans le cas de la détection d'une source ou cible ponctuelle dans une direction spécifiée ont été établies par BRYN [9] et MERMOZ [36] pour des bruits stationnaires, puis par URKOWITZ [56] et MIDDLETON [43] pour des bruits gaussiens non-stationnaires, le signal utile étant considéré soit comme certain [36][56], soit comme aléatoire [9][43]. La question a été ensuite traitée par de nombreux auteurs selon les critères variés indiqués au paragraphe (3.2). Nous la présenterons très succinctement en partant de l'approche bayésienne, l'une des plus connues et des plus générales, si ce n'est qu'on est amené, par raison de simplicité, à admettre dès le départ l'hypothèse d'un bruit additif gaussien centré (mais pas nécessairement stationnaire).

Le vecteur observable v étant mis sous la forme $v=s+b$, $E\{b\} = 0$, où le vecteur s représente le signal utile non pollué par le bruit et supposé certain, on sait que la statistique du test se réduit au scalaire

$$r = v^T \Gamma^{-1} s \quad [13][73] \quad (7)$$

expression où $\Gamma = E\{bb^T\}$ est la matrice de covariance du bruit additif centré. Le vecteur-colonne v, dont v^T est le transposé, comporte KP composantes $v_k(t_p)$ comme indiqué au paragraphe (2.5) (K capteurs et P échantillons temporels par capteur, prélevés à des intervalles $\Delta t = \frac{T}{P}$).

Si on définit un vecteur u par la relation

$$s = \Gamma u \Delta t \quad (8)$$

on obtient

$$r = v^T u \Delta t = \sum_k \sum_p v_k(t_p) u_k(t_p) \Delta t \quad (9)$$

$$\text{avec } s_k(t_p) = \sum_l \sum_q \Gamma_{kl}(t_p, t_q) u_l(t_q) \Delta t \quad (10)$$

En faisant tendre vers l'infini le nombre P d'échantillons prélevés sur l'intervalle $[0, T]$ d'observation (d'où $\Delta t \rightarrow 0$), on obtient :



$$r = \sum_k \int_0^T v_k(t) u_k(t) dt \quad (11)$$

et

$$s_k(t) = \sum_l \int_0^T \Gamma_{kl}(t, t') u_l(t') dt' ; \Gamma_{kl}(t, t') = E\{b_k(t) b_l(t')\} \quad (12)$$

$\Gamma_{kl}(t, t')$ étant la covariance mutuelle des bruits entre les capteurs k et l .

La formule (11) donnant l'expression de la fonctionnelle r , signal de sortie du récepteur optimal au sens de BAYES (plus précisément, celui qui calcule le rapport de vraisemblance dans le cas gaussien), montre que le traitement à appliquer est, sur chaque capteur, une corrélation de l'observable $v_k(t)$ avec le signal $u_k(t)$ défini par (12), ou un filtrage adapté à ce signal, suivi d'une prise d'échantillon, les signaux de sortie des K voies étant ensuite sommés (fig. 2).

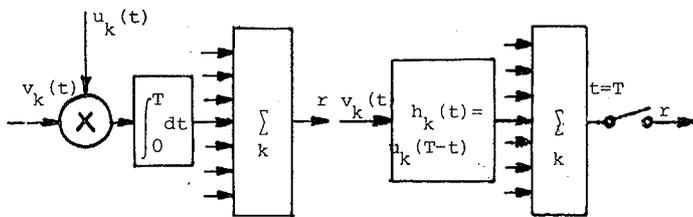


Fig. 2 - Traitement optimal d'antenne par corrélateurs ou par filtres adaptés.

Les signaux $u_k(t)$ et les réponses impulsionnelles $h_k(t)$ des filtres adaptés, qui s'en déduisent, sont aisés à calculer lorsque les bruits sont stationnaires; les covariances sont alors de la forme

$\Gamma_{kl}(t-t') \Leftrightarrow \Gamma_{kl}(f)$, $\Gamma_{kl}(f)$ étant la densité spectrale croisée de puissance relative aux capteurs k et l .

Si on fait l'hypothèse supplémentaire que le temps T d'observation est infini (ou du moins très grand devant le rayon de corrélation des bruits), on peut écrire :

$$s_k(t) = \sum_l \Gamma_{kl}(t) * u_l(t) \quad (13)$$

soit encore, en passant au domaine des fréquences :

$$s_k(f) = \sum_l \Gamma_{kl}(f) u_l(f) \quad (14)$$

ou, sous forme matricielle

$$f) = \Gamma(f) u(f) \quad u(f) = \Gamma^{-1}(f) s(f) \quad (15)$$

d'où enfin ; $h(f) = \Gamma^{-1}(f) s^*(f) e^{-j2\pi fT}$ (16)

Cette importante formule définit les gains complexes $h_k(f)$ des filtres adaptés de voies, en fonction de la matrice $\Gamma(f)$ des densités spectrales croisées des bruits à la sortie des capteurs (intervenant par son inverse), qui caractérise la référence bruit-seul et du vecteur $s(f)$ des signaux (en représentation fré-

fréquentielle) issus de la source à détecter, qui caractérise la référence signal.

Quant au rapport signal à bruit en sortie, défini par la formule (4), il a pour expression

$$R = s^T \Gamma^{-1} s = \sum_k \int_0^T s_k(t) u_k(t) dt \quad (17)$$

Pour des bruits stationnaires et $T \rightarrow \infty$, on obtient :

$$R = \int s^\dagger(f) \Gamma^{-1}(f) s(f) df \quad (18)$$

4.2 Autres approches.

En partant de l'hypothèse bruit stationnaire (mais pas nécessairement gaussien) et durée d'observation infinie on peut, comme l'a fait MERMOZ, chercher le filtre adapté à K entrées et une sortie qui maximise, à une date donnée, le rapport de la puissance instantanée du signal à la puissance moyenne du bruit. Ce filtre est précisément celui que définit la formule (16).

Le même résultat se retrouve en maximisant, à l'aide de l'inégalité de SCHWARZ, comme l'a fait COX [14], le rapport signal à bruit défini par la formule (4).

Le filtrage adapté spatio-temporel réalise, en fait, le meilleur compromis entre deux exigences plus ou moins contradictoires :

- 1/ maximiser la réponse de l'antenne dans la direction de la source de signal utile et aux fréquences où elle émet ;
- 2/ minimiser la réponse de l'antenne au bruit spatial, particulièrement dans les directions et aux fréquences où le champ de bruit est fort. Sa propriété essentielle est de maximiser, à toute fréquence, le rapport de la densité spectrale du signal (en convenant de désigner ainsi le carré du module de sa représentation fréquentielle) à celle du bruit (à l'inverse d'un filtre purement temporel, qui ne modifie pas ce rapport).

Cette propriété se conserve lorsque le signal est aléatoire [9][14][20][35]. En utilisant la représentation fréquentielle (ce qui implique que les bruits soient stationnaires), on peut mettre le vecteur signal sous la forme suivante

$$s(f) = m(f) x(f) \quad (19)$$

$m(f)$ étant un vecteur à K composantes caractérisant les propriétés de filtrage spatio-temporel de l'antenne et $x(f)$ une fonction scalaire caractérisant le signal de la source. La formule du filtrage optimal est alors (au retard T près)

$$h(f) = \Gamma^{-1}(f) m^*(f) x^*(f)$$

Pour un signal aléatoire de densité spectrale $\gamma_x(f)$, on a :

$$\gamma_x(f) = x(f) x^*(f)$$

En outre, le filtre optimal d'antenne doit être suivi



dans ce cas, d'un traitement purement temporel final comportant un quadrateur et un filtre intégrateur. Une autre approche consiste à utiliser un *critère d'estimation linéaire : filtrage de WIENER, estimation du maximum de vraisemblance* (laquelle équivaut à minimiser la variance en sortie, sous la contrainte de non-altération du signal [6] ou d'une altération connue [23]). *Seul varie le traitement temporel final* [25], tandis que demeure inchangé le filtrage spatial défini, (form. 20) par Γ_m^{-1} . L'estimateur MV n'altère pas le signal et est indépendant de sa forme, alors que le filtre de WIENER l'altère (c'est un estimateur biaisé), mais donne un meilleur rapport signal à bruit ; pour des signaux forts, les deux filtres sont identiques. On retrouve également la partie spatiale du filtrage optimal par la méthode consistant, *sous l'hypothèse de stationnarité et de corrélation angulaire microscopique du champ de bruit*, à chercher le filtrage linéaire qui maximise, à fréquence donnée, le rapport des puissances moyennes de signal et de *bruit spatial* ; ce rapport s'exprime au moyen de la matrice admittance du filtre multipolaire caractérisant l'antenne [11][17][18][32][45].

4.3 Propriétés du filtrage spatial optimal.

Nous résumerons succinctement ces propriétés, dont MERMOZ donne une description détaillée [41].

a/ La matrice $\Gamma(f)$ des densités spectrales croisées est toujours inversible, sauf lorsque le champ de bruit contient uniquement des brouilleurs ponctuels en nombre $N < K$ inférieur au nombre K de capteurs (son rang est alors $N < K$). Dans ce cas, le filtrage optimal *élimine complètement les signaux brouilleurs à toute fréquence* [39]. On aboutit à une conclusion semblable lorsqu'on opère au moyen de la matrice admittance caractérisant l'antenne [18]. Le filtrage optimal a pour effet d'annuler, à toute fréquence, le gain de l'antenne dans les N directions des brouilleurs.

b/ L'optimisation est possible *indépendamment de tout filtrage linéaire opéré à la sortie des capteurs* (lequel revient à remplacer l'antenne par une autre, dont la réponse spatio-temporelle est différente). En particulier, on peut utiliser des *filtres d'orientation*, dans le but de rendre identiques les signaux issus de la source à détecter.

c/ Le filtrage défini par $1/\det \Gamma(f)$ (résultant de l'inversion de la matrice Γ) est commun à toutes les voies et peut être rejeté après le circuit de sommation.

4.4 Estimation et inversion de la matrice de covariance.

Le problème majeur de l'adaptativité, déjà évoqué au paragraphe (3.1), est celui de l'acquisition de l'information a priori, en l'occurrence: l'estimation de la

matrice de covariance (ou de la matrice des densités spectrales). Cette estimation "en temps réel" repose sur une triple hypothèse : l'ergodisme, la stationnarité à court terme, l'absence du signal utile pendant la période d'estimation. Ainsi que l'ont montré, entre autres, MERMOZ et COX [13], la présence du signal, en faussant l'estimation, conduit à une contre-performance. Par ailleurs, la précision croît avec le temps disponible pour estimer, limité par la durée de stationnarité des bruits.

Nous indiquons ci-dessous les méthodes proposées par MERMOZ [41][42] et par APPLEBAUM [1] pour réaliser l'estimation et l'inversion de matrice.

a/ MERMOZ opère essentiellement par *filtrages linéaires successifs* : (1) des filtres d'orientation rendent les K signaux utiles identiques ; (2) par différences entre la voie 1 et les autres, le signal est conservé sur cette voie et annulé sur les autres, qui constituent $(K-1)$ voies "bruit seul" ; (3) la matrice de corrélation des $(K-1)$ bruits est diagonalisée par un filtrage approprié (cf. [72][73]) qui les décorrèle et les norme ; les paramètres de ce filtrage sont commandés à partir d'estimations portant sur les $(K-1)$ bruits (donc, indépendantes du signal) ; la diagonalisation a pour effet de réduire sensiblement le nombre d'opérateurs à mettre en oeuvre ; (4) un dernier filtrage appliqué aux K voies fournit, après sommation, le signal de sortie unique ; les paramètres de ce filtrage dépendent des intercorrélations entre la voie 1 qui porte le signal utile et les $(K-1)$ autres voies ; ils sont donc indépendants de ce signal, dans la mesure où celui-ci n'est pas corrélé avec les bruits. A ce stade, le filtrage spatial optimal est achevé, excepté le filtrage $1/\det \Gamma(f)$ commun à toutes les voies, qui correspond à un blanchiment du bruit de sortie ; *seule, cette opération ne peut être réalisée de manière adaptative en présence du signal utile* (conclusion d'ailleurs générale dans tout problème de "filtrage adapté à une seule voie).

MERMOZ montre, en outre, que tout le système est réalisable au moyen de *deux éléments modulaires seulement*, comprenant chacun un filtrage et un estimateur de densité spectrale propre ou croisée.

Notons enfin que *le signal est transmis non altéré par la voie 1* et, d'autre part, qu'à bande passante suffisamment étroite [24], le bruit de sortie n'a plus à être blanchi et que le système devient donc pleinement adaptatif.

b/ APPLEBAUM [1] propose le système en boucle fermée représenté pour une voie par la figure (3).

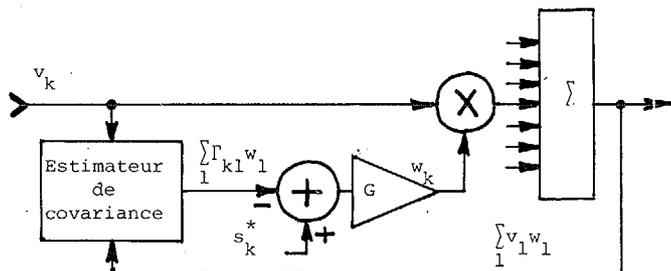


Fig. 3 - Traitement optimal d'antenne selon APPLEBAUM.

L'équation de fonctionnement s'écrit :

$$w_k = G(s_k^* - \sum_{l=1}^L \Gamma_{kl} w_l) \quad w = \frac{1}{G} (\mathbb{1} + \Gamma)^{-1} s^*$$

Si le gain G est suffisamment grand, on réalise la condition d'optimalité $w = \Gamma^{-1} s^*$, w étant le vecteur des pondérations complexes à appliquer aux signaux de capteurs, s un vecteur "référence-signal" et Γ la matrice de covariance de l'observable v , qui ne s'identifie à celle des bruits qu'en l'absence de signal utile.

4.5 Méthode algorithmique avec modèle de référence.

Nous abordons maintenant les systèmes à apprentissage, utilisant un algorithme itératif, annoncés au paragraphe (3.3). La première méthode, proposée par WIDROW [57][47] consiste à comparer le signal de sortie d'un système de filtres, connectés aux capteurs et suivis d'un circuit de sommation, à un signal de référence caractéristique d'une source connue dans une direction spécifiée. La distance quadratique moyenne entre signal de référence et signal de sortie constitue l'indice de performance J qu'on cherche à minimiser en agissant sur les paramètres des filtres, selon un algorithme caractérisé par la formule (6) ; il s'agit donc d'une estimation au sens de l'erreur quadratique moyenne ou de WIENER. Les filtres utilisés sont du type transversal (fig. 4) à commande numérique.

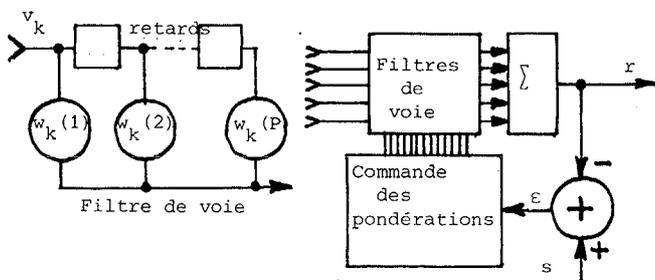


Fig. 4 - Processeur algorithmique à signal de référence

Avec la notation vectorielle du paragraphe (2.5), le signal scalaire de sortie r s'écrit :

$$r = v^T w = \sum_{k,p} v_k(p) w_k(p) \quad (23)$$

La distance quadratique moyenne à minimiser est

$d = [E\{\epsilon^2\}]^{1/2}$, $\epsilon = s - r = s - v^T w$ étant l'erreur et s la référence. Comme indiqué au paragraphe (3.3), on opère en fait sur ϵ^2 et non sur son espérance, puisqu'on ne dispose que d'une seule épreuve. Le gradient de ϵ^2 par rapport au vecteur w des pondérations est $-2\epsilon v$ et, par suite, la formule d'itération par la méthode "steepest descent" est la suivante :

$$w_{n+1} = w_n + \mu \epsilon_n v \quad (24)$$

WIDROW engendre le signal de référence s au moyen d'un signal pilote substitué périodiquement aux signaux des capteurs à l'entrée des filtres, ou ajouté à ces signaux ; GRIFFITHS [26] montre qu'il en résulte un biais d'estimation des pondérations et propose une solution évitant cet inconvénient et tenant compte de la densité spectrale du signal

4.6 Méthode algorithmique avec contrainte.

FROST [23] emploie la méthode algorithmique précédente pour minimiser le moment du second ordre de la grandeur de sortie : $E\{r^2\} = w^T \Gamma_v w$, sous la contrainte $\sum_p w_k(p) = \mathcal{F}_k$, $k \in [1, \dots, K]$, ce qui a pour effet d'imposer une réponse impulsionnelle donnée dans la direction de la source ; BIENVENU [6] procède de même, sous la contrainte de non-altération du signal provenant de la source. On effectue, de la sorte, une estimation par le maximum de vraisemblance de la forme d'un signal inconnu provenant d'une direction donnée.

4.7 Conclusion.

Bien que ce chapitre soit consacré au traitement optimal en détection, nous constatons que les solutions proposées relèvent, soit d'un critère de détection (le filtrage adapté), soit d'un critère d'estimation d'un signal temporel de direction donnée (au sens de WIENER ou de la vraisemblance). Dans tous les cas, du moins en l'absence de bruit de modulation, on aboutit au même filtrage linéaire à K entrées et une sortie ; seul varie le traitement temporel final.

Pour réaliser la commande adaptative des paramètres de filtrage, la méthode du filtre adapté nécessite l'estimation et l'inversion de la matrice de corrélation des bruits ; l'estimation est faussée par la présence du signal utile, excepté en monochromatique (où l'aspect temporel disparaît) ; l'inversion de la matrice peut être évitée, comme l'a montré MERMOZ, qui propose un type de réalisation modulaire [42] particulièrement simple en bande étroite [24].

Les méthodes WIENER et "maximum de vraisemblance", mises en oeuvre au moyen d'une commande itérative des paramètres selon la méthode du gradient, nécessitent seulement, en théorie, l'estimation de la matrice de corrélation de l'observable et évitent deux difficultés :

la "référence bruit seul" et une inversion de matrice ; en pratique, un grand nombre d'itérations sont nécessaires pour estimer correctement les corrélations et converger vers la solution optimale [26] et il semble donc qu'on doive réserver ces méthodes aux cas où le champ de bruit est à variations très lentes.

5. LE PROBLEME DE L'IMAGERIE.

5.1 Les données du problème.

En matière de traitement optimal pour l'imagerie (ou cartographie) de *champs de sources au moyen de réseaux de capteurs*, les connaissances actuelles sont encore assez fragmentaires. Les deux principaux types d'applications sont les suivants :

- 1/ l'imagerie active (radar, sonar, géosismique), où les signaux sont certains, tant qu'ils n'ont pas été aléatorisés par la turbulence du milieu, et les sources généralement corrélées entre elles ;
- 2/ l'imagerie passive (radiométrie hertzienne, radio-astronomie, sonar passif sous-marin, imagerie acoustique aérienne), où les signaux sont généralement aléatoires et non-corrélés.

Les données du problème sont, pour la plupart, les mêmes qu'en détection ; en particulier, le modèle de la figure 1 reste valable. Cependant, puisqu'on s'intéresse en principe à toutes les sources, il n'y a pas lieu de considérer un champ de bruit spatial (donc, $w=0$) ; par contre, il est difficile d'ignorer la turbulence du milieu et les incertitudes relatives à l'antenne, qui se traduisent par la partie aléatoire centrée \tilde{G} du filtre G et par le fait qu'on ne connaît qu'une estimée \hat{G} de la partie moyenne \bar{G} . D'autre part, le vecteur-objet x décrit une répartition (réelle ou complexe) spatiale de sources, l'aspect temporel ou fréquentiel étant souvent secondaire.

D'un point de vue déterministe, on est donc en présence d'un problème de *filtrage inverse spatial* ou de *déconvolution* ; d'un point de vue statistique, c'est un problème d'*estimation linéaire d'une fonction spatiale, s'accompagnant éventuellement d'une estimation spectrale*.

L'*information a priori* possible porte évidemment sur les bruits et incertitudes, mais aussi sur le vecteur-objet (positivité, covariance, ou plus généralement classes de signaux auquel il appartient [46]).

Le problème de l'imagerie se pose essentiellement en termes de *précision d'estimation angulaire*, pour des sources ponctuelles isolées [31][55] et, pour deux sources ponctuelles voisines ou un ensemble de sources, en termes de *résolution* [15][19][31][48][54] et d'*ambiguïté angulaires* [8][19][54]. Les deux facteurs de limita-

tion des performances sont :

- 1/ *la bande passante strictement limitée de l'antenne* dans le domaine des fréquences spatiales [65], à partir de laquelle on définit le pouvoir de résolution au sens de RAYLEIGH ;
- 2/ *les bruits et incertitudes*, sans lesquels on pourrait théoriquement obtenir une résolution parfaite.

La limite de RAYLEIGH est celle qu'on atteint par des traitements classiques ; en tirant parti de l'information a priori, ou par des traitements non-linéaires (qui, malheureusement dégradent fortement le rapport signal à bruit), ou en augmentant artificiellement les dimensions d'antenne, on parvient à la *superrésolution*.

5.2 Solutions connues.

La *synthèse d'ouverture* est un artifice bien connu qui permet d'atteindre une très grande résolution au moyen d'antennes mobiles, soit pour des signaux certains (radar et sonar à antenne synthétique) [65], soit pour des signaux aléatoires (radiotélescopes). En particulier, le principe des interféromètres à corrélation à base variable a été perfectionné et appliqué avec succès à l'imagerie de bruiteurs sonores en acoustique aérienne [5].

L'imagerie spatiale et spectrale peut être traitée comme un problème déterministe de *filtrage inverse*, consistant à chercher l'opérateur inverse du filtrage linéaire direct spatio-temporel imposé par le système physique, ce qui implique une modélisation précise de ce filtrage, par exemple grâce à un échantillonnage spatial et fréquentiel [16]. Ainsi, le filtre inverse correspondant à la partie moyenne \bar{G} du filtre direct de la figure (1) est [44] :

$$H = (\bar{G}^T \bar{G})^{-1} \bar{G}^T \quad (25)$$

Dans un contexte déterministe, l'imagerie à l'aide d'antennes revient à l'approximation d'un signal à bande passante non limitée (le champ incident dans le plan de l'antenne) au moyen d'un système à bande passante limitée (l'antenne de dimensions finies) [52]. En l'absence d'incertitudes, toute l'information concernant le champ de sources est contenu dans le champ incident délimité par l'antenne et on peut donc théoriquement concevoir des antennes qui soient des *filtres super-résolvants*, notamment par le biais de la décomposition de la fonction objet sur une base de fonctions d'ondes ellipsoïdales (prolate spheroidal wave functions) [21]. En fait, le bruit et les incertitudes interdisent toutes possibilités pratiques de superdirectivité.

Par contre, un gain de résolution important (par exemple, dans un rapport pouvant atteindre 10) peut être obtenu en exploitant l'information a priori. SHELL [49]



et BIRAUD [7] utilisent *la positivité de la fonction objet*, lorsque celle-ci représente des énergies ou puissances de rayonnement : au moyen d'un algorithme itératif, on recherche la meilleure approximation, au sens des moindres carrés, de la répartition de champ sur l'antenne par une fonction qui donne, par transformation de FOURIER, une image à valeurs positives ; cette fonction est un carré de convolution et son support est de dimensions supérieures à celles de l'antenne, ce qui donne un effet de superrésolution. FRIEDEN [22] utilise la même information a priori en partant de considérations statistiques sur *l'entropie de l'image* [60]. Une approche statistique a été proposée par KSIENSKI et MCGHEE [29] qui, sous l'hypothèse gaussienne, cherchent à estimer par *le maximum de vraisemblance*, au moyen d'un algorithme basé sur la méthode du gradient, les paramètres d'un ensemble de sources (amplitude, phase, angles). Ces auteurs définissent la résolution par l'aptitude à déceler la présence de deux objets distincts, sans que cela implique l'estimation de leurs paramètres, et la caractérisent par une *probabilité de résolution* ; il y a lieu de préciser qu'ils limitent le nombre de degrés de liberté de l'objet en spécifiant un écart angulaire en dessous duquel deux points-objets sont considérés comme confondus.

La question peut être également abordée sous l'angle de *l'estimation linéaire au sens de WIENER* [25][44] ; toutefois, il importe de remarquer que le traitement optimal n'est pas un filtrage linéaire lorsque le filtre G est aléatoire.

Pour terminer, signalons *l'algorithme optimal* de TOURNARIE [53], dont le principe s'apparente à celui de la méthode d'estimation par le maximum de la probabilité a posteriori et qui s'applique dans des conditions très générales : filtre G non-linéaire (mais non-aléatoire), bruits additifs w et b non-gaussiens et non-stationnaires

BIBLIOGRAPHIE

- [1] APPLEBAUM S.P. Syracuse Univ. Res. Corp., N.Y., Rep. SPL 769, 1964.
- [2] ARQUES P.-Y. - Ann. Téléc. 20, 1965, 119-135
- [3] ARQUES P.-Y., MACCHI O. - Ann. Téléc. 25, 1970, 93-96
- [4] ARQUES P.-Y. - Ann. Téléc. 26, 1971, 371-380
- [5] BEROUJON et al. - 5è Coll. GRETSI, Nice 1975
- [6] BIENVENU G. - 4è Coll. GRETSI, Nice 1973, 169-216
- [7] BIRAUD Y. - Astron. Astrophys. 1, 1969, 124-127
- [8] BROOKNER E. - I.R.E. Trans. AP-12, 1964, 551-561
- [9] BRYN F. - J. Acoust. Soc. Am. 34, 1962, 289-297
- [10] CAPON et al. - Proc. I.E.E.E., 55, 1967, 192-211
- [11] CHENG D.K. - Proc. I.E.E.E., 59, 1971, 1664-1674
- [12] CHILDERS D.G., REED J.S. - I.E.E.E. Trans. IT-11, Apr. 1965, 182-190
- [13] COX H. - NATO Adv. Study Inst. ENSCHEDE 68, T.2
- [14] COX H. - J. Acoust. Soc. Am., 45, 1969, 228-232
- [15] COX H. - J. Acoust. Soc. Am., 54, 1973, 771-785
- [16] DEBART H. - 4è Coll. GRETSI, Nice 1973, 319-341
- [17] DELISLE G.Y., CUMMINS J.A. - IEEE Trans. EMC-15, 1973
- [18] DELISLE G.Y. et al. - IEEE Trans. EMC-16, 74, 98-105
- [19] DI FRANCO J.V., RUBIN W.L. - IEEE Trans. MIL-9 1965, 229-237
- [20] EDELBLUTE D.J. et al. - JASA, 41, 1967, 199-205
- [21] FRIEDEN B.R. Progress in Optics, 9, 1971, 311-407
- [22] FRIEDEN B.R. - J. Opt. Soc. Am. 62, 1972, 511-518
- [23] FROST O.L. - Proc. IEEE, 60, 1972, 926-935
- [24] GIRAUDON C. - 4è Coll. GRETSI, Nice 1973, 277-297
- [25] GRIFFITHS L.J. - Proc. IEEE, 55, 1967, 2045-2047
- [26] GRIFFITHS L.J. - Proc. IEEE, 57, 1969, 1696-1704
- [27] HARRINGTON R.F. - IEEE Trans., AP-13, 1965, 896-903
- [28] KSIENSKI A.A. - Microw. J. 1961 Oct. 77-85 et Nov., 87-94
- [29] KSIENSKI A.A., MCGHEE R.B. - Radio Electron. Engr. 34, Sept. 1967, 161-174
- [30] KSIENSKI A.A. - AGARD Conf. Proc., Blackband Edit., Apr. 1968, 1-43
- [31] KSIENSKI A.A., MCGHEE R.B. - IEEE Trans., AES-4 May 1968, 443-455
- [32] LO Y.T. et al. - Proc. IEEE 54, 1966, 1033-1045
- [33] MACCHI C., MACCHI O. - Ann. Téléc. 26, 1971, 363-370
- [34] MACCHI C. - 4è Coll. GRETSI, Nice 1973, 217-246
- [35] McDONOUGH R.N. - JASA, 49, 1971, 402-406
- [36] MERMOZ H. - Ann. Téléc. 18, 1963, 126-139
- [37] MERMOZ H. - Thèse Doct. Grenoble, Juillet 1964
- [38] MERMOZ H. - Ann. Téléc. 21, 1966, 31-39
- [39] MERMOZ H. - Ann. Téléc. 24, 1969, 282-293
- [40] MERMOZ H. - " " 25, 1970, 269-280
- [41] MERMOZ H. - " " 28, 1973, 244-254
- [42] MERMOZ H. - " " 29, 1974, 43-54
- [43] MIDDLETON D., GROGINSKY H.L. - J. Acoust. Soc. Am. 38, 1965, 727-737
- [44] MUNIER J., TURCAT C. - Coll. CNFRS 1975 (à paraître)
- [45] MUNIER J., DELISLE G.Y. - 5è Coll. GRETSI, Nice 75
- [46] PARKS T.W., MEIER R.G. - IEEE Trans., IT-17, 1971 37-44
- [47] RIEGLER R.L., COMPTON R.T. - Proc. IEEE, 61, 1973, 748/58
- [48] ROOT W.L. - IRE Trans., MIL-6, 1972, 197-204
- [49] SCHELL A.C. - Radio Electron. Engr., 29, 1965, 21-26
- [50] SHOR S.W.W. - J. Acoust. Soc. Am. 39, 1966, 74-78
- [51] STOCKLIN P.L. - Journ. Brit. IRE, 26, 1963, 79-91
- [52] TEMES G.C., BARCILON V., MARSHAL F.C. - Proc IEEE 61, 1973, 196-234
- [53] TOURNARIE M. - Journ. Phys., 30, 1969, 737-751
- [54] URKOWITZ H. et al. - Proc. IRE, 50, 1962, 2093-2105.
- [55] URKOWITZ H. - IEEE Trans., MIL-8, 1964, 39-45
- [56] URKOWITZ H. - " " MIL-9, 1965, 44-56
- [57] WIDROW B. et al. - Proc. IEEE, 55, 1967, 2143-2159
- [58] WIDROW B. et al. - Proc. IEEE, 63, 1975, 719-720
- [59] YOUNG G.O., KSIENSKI A. - IRE Trans., MIL-5, 1961, 94-102
- [60] YOUNG G.O. - Radio Electron. Engr. 29, 1965, 117-127
- [61] YOUNG G.O. - IEEE Trans., AES-4, 1968, 334-341
- [62] YOUNG G.O., HOWARD J.E. - IEEE Trans., AP-18, 1970 335-342
- [63] YOUNG G.O., HOWARD J.E. - Proc. IEEE, 58, 1970, 771/778
- [64] Special issue on : Active and adaptive arrays IEEE Trans. AP-12, 1964
- [65] COLLIN, ZUCKER - Antenna theory (Mc. raw Hill, 1969)
- [66] COOPER, STEINBERG - Methods of optimization (Saunders C°, 1970)
- [67] HANSEN - Microwave scanning antennas (Acad. Press, 1966)
- [68] HARRINGTON - Field computation by moment methods (Mac Millan, 1968)
- [69] LUENBERGER - Optimization by vector space methods (Wiley, 1969)
- [70] SAGE - Optimum systems control (Prentice Hall, 1968)
- [71] TSYPKIN - Foundations of the theory of learning systems (Acad. Press, 1973).
- [72] VAN TREES - Detection, estimation and modulation theory (Wiley, 1971)
- [73] WHALEN - Detection of signals in noise (Academic Press, 1971).