COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 16 au 21 JUIN 75

COMPARAISON DE DIFFERENTES METHODES DE CALCUL DES PERFORMANCES DANS LE CAS D'UN DETECTEUR QUADRATIQUE.

Claudie FAURE Odile MACCHI

Université Paris-Sud - Bâtiment n° 210 - 91405 ORSAY

RESUME

On considère le problème du calcul des probabilités d'erreur à la sortie d'un système de détection. Celui-ci fonctionne par comparaison à un seuil d'une variable aléatoire (test) déduite par une opération déterministe d'un signal aléatoire observé durant un temps fini. On rappelle rapidement diverses méthodes d'approximation de la densité de probabilité du test et de sa fonction de répartition.

Ensuite, on considère en détail le cas particulier d'un détecteur quadratique utilisé pour détecter la présence d'un signal aléatoire gaussien noyé dans un bruit blanc. On compare pour ce détecteur, les principales méthodes en précisant leur limite de validité, ainsi que des critères de choix liés aux caractéristiques physiques du signal à détecter comme sa largeur de bande, ou le rapport signal à bruit.

SUMMARY

In this paper we consider the problem set by the evaluation of error probabilities at the output of a detection system. This system processes a random finite time observed signal in a deterministic manner and compares the resulting random (test) variable to a threshold. Several approximation methods giving the test probability density or distribution function are briefly recalled.

We then give a detailed study of the quadratic detector case when used to detect the presence of a gaussian random signal in white noise. In that case the main methods are compared and their limit of applicability are emphasized. Choice criterion based upon the physical nature of the signal to be detected such as signal band with or signal to noise ratio are specified.

COMPARAISON DE DIFFERENTES METHODES DE CALCUL DES PERFORMANCES DANS LE CAS D'UN DETECTEUR QUADRATIQUE.

C. FAURE - O. MACCHI

I - INTRODUCTION

La détection d'un signal dans un bruit est le plus souvent réalisée en comparant à un seuil γ une variable aléatoire Y déduite par une opération déterministe d'un signal aléatoire X(t), appelé observation. Le signal X(t) dure généralement un temps fini, soit $[o, T]$. Le système de détection effectue la transformation (certaine)

(1) $\quad (X(t),\ t \in [o, T]) \xrightarrow{\theta} Y.$

On appellera H_1 (resp. H_0) l'hypothèse où le signal, soit S(t), est présent (resp. absent) dans le bruit B(t). Nous notons par $\oplus$ le mélange signal et bruit

(2) $\quad H_0 : X(t) = B(t) \;;\; H_1 : X(t) = (S \oplus B)(t)$
$\qquad t \in [o, T] \qquad\qquad t \in [o, T]$

La décision de présence ou d'absence, soit D_1 ou D_0, obeit à la règle

(3) $\quad Y \geq \gamma : D_1 \;;\; Y < \gamma : D_0 .$

Il est très important de pouvoir évaluer les performances du système de décision, c'est-à-dire la probabilité de fausse alarme

(4) $\quad \alpha(\gamma) = \Pr [Y \geq \gamma / H_0],$

et la probabilité de détection correcte

(5) $\quad P_d(\gamma) = \Pr [Y \geq \gamma / H_1].$

Lorsque la transformation (1) n'est pas extrêmement simple, par exemple si elle comporte une non linéarité suivie d'une intégration, les probabilités (4) et (5) ne peuvent être calculées qu'approximativement.

Dans cette étude nous rappelons d'abord les principales méthodes analytiqyes pour approcher ces grandeurs [1] - [3]. Dans la deuxième partie nous considèrons le cas important du détecteur quadratique, utilisé pour détecter un signal aléatoire centré gaussien noyé dans un bruit additif gaussien centré et blanc. Nous présentons une étude comparative des méthodes les plus courantes et donnons des critères de choix entre celles-ci suivant le spectre du signal à détecter et sa puissance.

II - LES DIFFERENTES APPROCHES

II-1. La méthode des développements en série

Cette méthode, la plus générale qui existe, est certainement la plus utilisée. Le principe de ces développements consiste toujours à ramener le calcul trop difficile ou impossible de la densité de probabilité de Y à celui de ses moments. On développe ensuite la densité de probabilité sur des polynomes orthogonaux.

Série de Gram-Charlier

Les lois des variables aléatoires étudiées se rapprochent souvent de la loi normale ce qui conduit à utiliser les polynomes d'Hermite $H_k(u)$ ainsi définis :

(6) $\quad \mathbb{p}^{(k)}(u) = (-1)^k H_k(u)\, \mathbb{p}(u) ,$

où $\mathbb{p}(u) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-u^2/2)$ est la loi normale centrée, réduite, et $\mathbb{p}^{(k)}(u)$ sa $k^{\text{ième}}$ dérivée. En fonction des lois (6), on écrit le développement de la densité de probabilité de la variable test Y sous la forme

(7) $\quad p(y) = \sigma^{-1} \left[\mathbb{p}(u) + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{C_k}{k!\sigma^k}\, \mathbb{p}^{(k)}(-u)\right]$

dite série de Gram-Charlier. Dans cette expression, σ est l'écart-type de Y, et la variable u correspond au test centré réduit de sorte que

(8) $\quad u = \frac{y - E(Y)}{\sigma} .$

Les coefficients C_k se déduisent simplement des moments d'ordre inférieur ou égal à k de Y. Ils sont liés aux cumulants χ_ℓ de Y (les cumulants sont les coefficients du développement en série de Taylor de la seconde fonction caractéristique de Y). Ainsi

(9) $\quad C_3 = -\chi_3 \;;\; C_4 = \chi_4 \;;\; C_5 = -\chi_5 \;;\; C_6 = \chi_6 + 10\chi_3^2$

Remarque

D'après (4) et (5), on obtient les performances du détecteur en intégrant la loi (7) au-delà du seuil γ. Ces performances se présentent donc comme des séries identiques à (7) où interviennent les lois $\mathbb{p}^{(k)}(u)$ intégrées.

Série d'Edgeworth

Parce que ses termes ne sont pas en ordre décroissant, on adopte un nouvel arrangement des termes de (2) ; c'est la série d'Edgeworth :

COMPARAISON DE DIFFERENTES METHODES DE CALCUL DES PERFORMANCES DANS LE CAS D'UN DETECTEUR QUADRATIQUE.

C. FAURE - O. MACCHI

$$p(y) = \sigma^{-1} \{ [\mathbb{p}(u)] - [\frac{\chi_3}{6\sigma^3} \mathbb{p}^{(3)}(u)]$$

$$+ [\frac{\chi_4}{24\sigma^4} \mathbb{p}^{(4)}(u) + \frac{\chi_3^{\ 2}}{72\sigma^6} \mathbb{p}^{(6)}(u)]$$

$$+ [- \frac{\chi_5}{120\sigma^5} \mathbb{p}^{(5)}(u) - \frac{\chi_3\ \chi_4}{144\sigma^7} \mathbb{p}^{(7)}(u)$$

$$- \frac{\chi_3^{\ 3}}{1296\sigma^9} \mathbb{p}^{(9)}(u)] + [\frac{\chi_6}{720\sigma^6} \mathbb{p}^{(6)}(u)$$

$$+ \frac{8\chi_3\ \chi_5 + 5\chi_4^{\ 2}}{5760\sigma^8} \mathbb{p}^{(8)}(u) + \frac{\chi_3^{\ 2}\ \chi_4}{1728\ \sigma^{10}} \mathbb{p}^{(10)}(u)$$

$$+ \frac{\chi_3^{\ 4}}{31104\sigma^{12}} \mathbb{p}^{(12)}(u)] + \cdots$$

Les termes successifs sont en ordre décroissants.

Un avantage de la méthode est de ne nécessiter qu'un nombre assez faible de termes (3 ou 4) pour obtenir une bonne précision. Dans certains cas le premier terme suffit; on se place alors dans l'approximation gaussienne qui se justifie par exemple quand la sortie du détecteur comporte une intégration qui effectue un filtrage suffisamment sélectif.

II-2. Méthode du changement de variable

Quand on approche une densité de probabilité, c'est généralement pour des valeurs importantes de cette densité que l'approximation est la plus valable. Pour des valeurs faibles, c'est-à-dire loin de la valeur moyenne, l'erreur relative que l'on commet est souvent trop grande pour justifier l'approximation. Or, d'après (4) et (5), on calcule les performances par intégration au-delà d'un seuil γ qui se situe, au moins dans l'hypothèse où le signal est absent, loin de la valeur moyenne du test. On a alors recours à un changement de variable qui a pour but de centrer la nouvelle variable sur le seuil γ.

Le test Y et cette nouvelle v.a. Y_s sont liés par l'intermédiaire de leurs densités de probabilité :

$$(11) \qquad p_s(y) = \frac{e^{sy}\ p(y|H_o)}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{s\ell}\ p(\ell|H_o)\ d\ell} = \frac{e^{sy}\ p(y|H_o)}{e^{\mu(s)}}$$

de sorte que d'après (4)

$$(11\text{ bis}) \qquad \alpha(\gamma) = \int_{\gamma}^{\infty} p_s(y)\ e^{\mu(s)\ -\ sy}\ dy.$$

Dans (11) et (11 bis), $\mu(s)$ est la seconde fonction génératrice :

$$(12) \qquad \mu(s) = \ln E\{e^{sY}/H_o\}.$$

Il est aisé de voir que si Y est une variable gaussienne, (11) traduit une translation. On montre qu'on a les bornes suivantes dites bornes de Chernoff pour les probabilités d'erreur

$$(13) \qquad \alpha(\gamma) \leq e^{\mu(s)\ -\ s\gamma} \quad \text{si} \quad s \geq o,$$

$$(14) \qquad 1 - P_d(\gamma) \leq e^{\mu(s)\ +\ (1-s)\gamma} \quad \text{si} \quad s \leq 1,$$

la deuxième inégalité s'appliquant seulement au détecteur optimum, qui calcule le rapport de vraisemblance de l'entrée X(t) dans les hypothèses H_o et H_1. On minimise les bornes de Chernoff en choisissant la valeur de s aussi proche que possible de la racine de

$$(15)a \qquad \dot{\mu}(s) = \gamma\ , \quad o \leq s \leq 1.$$

En reportant cette valeur dans (11) on constate que la variable auxiliaire Y_s est centrée sur le seuil de décision γ. Une approximation de la loi de Y_s sera surtout valable là où la densité de probabilité de Y_s prend des valeurs importantes, c'est-à-dire au voisinage de γ. C'est justement la région qui nous intéresse. On choisira une approximation gaussienne pour Y_s. A l'aide de (11 bis) et (15) il vient alors

$$(15)b \qquad \alpha(\gamma) = [2\pi s^2\ \ddot{\mu}(s)]^{-1/2}\ e^{\mu(s)\ -\ s\dot{\mu}(s)}$$

$$(15)a \qquad \dot{\mu}(s) = \gamma\ , \quad o \leq s \leq 1.$$

III - LE DETECTEUR QUADRATIQUE

III-1. Généralités

Nous allons illustrer et comparer ces approches dans le cas où le bruit apparaissant dans (2) est gaussien, centré, blanc et additif, et où le signal est lui-même gaussien, centré, stationnaire. Soit $\frac{N_o}{2}$ la densité spectrale de puissance du bruit ; soient respectivement $\gamma(\nu)$ et $\Gamma(\tau)$ la densité spectrale du signal et sa fonction de corrélation. Soient λ_i et $\phi_i(t)$ les valeurs propres et les fonctions propres de cette corrélation [4] c'est-à-dire les solutions de

$$(16) \qquad \lambda_i\ \phi_i(t) = \int_0^T \Gamma(t-u)\ \phi_i(u)\ du.$$

En utilisant le développement dit de Kahrunen-Loève [5] de l'observation X(t) sur la base des fonctions propres $\phi_i(t)$,

(17) $$X(t) = \sum_{i=0}^{\infty} X_i \, \phi_i(t),$$

on peut trouver la forme du détecteur optimum, c'est-à-dire du test de détection Y :

(18) $$Y = \frac{1}{N_0} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \frac{N_0}{2}} X_i^2 \; .$$

On peut d'ailleurs montrer que Y est la sortie d'un système"filtrage , quadration , intégration"

III-2. Exemples traités

Nous avons examiné numériquement deux cas très importants.

Exemple 1 : Signal à spectre rectangulaire de largeur 2 W

(19) $$\Gamma(\tau) = P.\frac{\sin 2\pi W\tau}{2\pi W\tau} \;,\; \gamma(\nu) = \begin{cases} P/2W, & |\nu| \leqslant W \\ 0 \;, & |\nu| > W \end{cases} \;;$$

l'intervalle de temps T est choisi tel que

(20) $2WT = 5{,}1$ (produit temps-fréquence),

(21) $PT = 70$ (énergie de signal).

La densité spectrale du bruit a été choisie successivement

(22) $$\frac{N_0}{2} = 1, \quad \frac{N_0}{2} = 2, \quad \frac{N_0}{2} = 4.$$

Exemple 2 : Signal à spectre rationnel

(23) $$\Gamma(\tau) = P.e^{-k|\tau|}, \quad \gamma(\nu) = \frac{2Pk}{4\pi^2 \nu^2 + k^2} \; .$$

L'intervalle de temps T est choisi tel que le produit temps-fréquence vaut successivement

(25) $kT = 2, \quad kT = 10.$

En fonction de celui-ci, le rapport signal à bruit ρ de l'énergie PT du signal à la densité spectrale du bruit est choisi tel que

(26) $$\rho = \frac{2PT}{N_0} = 3 \text{ kT}.$$

III-3. Développement en série

Dans le développement (18), les variables X_i sont indépendantes et gaussiennes. Dès lors, il est facile de calculer la seconde fonction caractéristique, et donc les cumulants, en fonction des valeurs propres λ_i, préalablement rangées par ordre décroissant. Il vient

(27) $$\chi_\ell = (\ell-1)! \left(\frac{2}{N_0}\right)^{\ell-1} \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{\ell} \;,$$

avec

(28) $$a_k = \begin{cases} \frac{N_0}{2} \cdot \frac{\lambda_k}{\lambda_k + N_0/2} & \text{si } H_0 \\ \lambda_k & \text{si } H_1 \end{cases}$$

Le problème revient donc à évaluer les séries (27) ou interviennent des puissances des λ_i. On déduit alors des développement limités (7) ou (10) et par intégration, ceux des performances du détecteur. Dans les exemples que nous avons traités nous avons utilisé le développement d'Edgeworth (10) avec 3 termes (ce qui fait apparaître des moments de Y jusqu'à l'ordre 4) ou avec 5 termes (moments jusqu'à l'ordre 6).

Les limites de cette méthode de calcul proviennent de la troncature des développements, dont les termes ne sont pas nécessairement positifs. Le résultat peut donc être une grandeur négative, et la loi trouvée peut présenter un grand nombre de modes. Par exemples, soit $p_K(y)$ l'approximation obtenue en développant (7) jusqu'au coefficient C_K inclus. Le nombre et la position des modes de $p_K(y)$ sont les zéros de $\dot{p}_K(y)$. D'après (6) et (7) ils sont donc définis par l'équation

(29) $$H_1(u) + \sum_{k=3}^{K} \frac{C_k}{k!} (-1)^k H_{k+1}(u) = 0 \; .$$

En considérant les développements d'Edgeworth avec 3 ou 5 termes, on obtient des équations du même type qui risquent d'avoir d'autant plus de solutions que le nombre de termes retenus est plus grand. Ceci est illustré sur la figure 1. La courbe 1-a (resp. 1-b) montre "l'équation aux modes" du développement à trois termes (resp. 5 termes) dans le cas de l'exemple 1, en l'absence de signal, avec $\frac{N_0}{2} = 1$.

On retrouve sur la probabilité de fausse alarme $\alpha(\gamma)$ (figure 2) les irrégularités dues à l'augmentation du nombre de termes du développement. Les courbes a-5, b-5 et deux courbes c-5 et c-3, correspondent respectivement à $\frac{N_0}{2} = 4$, 2 et 1. Les chiffres 3 ou 5 indiquent le nombre de termes utilisés dans le développement. On voit que pour $\frac{N_0}{2} = 1$, les développements d'Edgeworth avec 3 ou 5 termes (c-3 et c-5) s'accordent jusqu'à $\alpha = 3.10^{-2}$.

La méthode d'Edgeworth n'est facilement utilisable que si le nombre de valeurs propres λ_i nécessaires pour calculer les cumulants n'est pas trop élevé. Tel est bien le cas du spectre rectangulaire, car pour i supérieur à 2WT + 1, il y a une chute brutale des valeurs propres [6]. Dans le cas de l'exemple 2 (spectre lorentzien) il n'y a pas de coupure analogue :

il faut aller jusqu'à λ_{80} pour avoir une perte de 1 % sur l'énergie du signal. On choisit alors la méthode du changement de variable.

III-4. Changement de variable

Cette méthode s'applique bien lorsque le temps d'observation T est assez long. En effet la seconde fonction génératrice $\mu(s)$ peut alors s'exprimer sans l'intervention explicite des valeurs propres λ_i ([1] p. 103) :

$$(30) \qquad \mu(s) = \frac{(1-s)\,T}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{2\gamma(\nu)}{N_0}\right) d\nu - \frac{T}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{2(1-s)\,\gamma(\nu)}{N_0}\right) d\nu$$

ce qui se calcule aisément dans les deux exemples considérés en III-2. On déduit immédiatement la fausse alarme $\alpha(\gamma)$ de (15-a) - (15-b). On ferait de même pour l'autre erreur.

Sur la figure 3, le résultat est reporté dans le cas de l'exemple 1 avec $\frac{N_0}{2} = 1$. On y a aussi reporté le résultat d'une approximation gaussienne directe sur le test Y, et l'approximation d'Edgeworth avec 3 termes et 5 termes.

Une étude analogue est faite sur la figure 4 dans le cas de l'exemple 2 (spectre rationnel) avec kT = 2. Cette valeur du produit temps fréquence étant assez faible la méthode du changement de variable ne donne de résultats satisfaisants que pour $\alpha(\gamma)$ supérieur à 3.10^{-2}. Par contre pour kT = 10, cette méthode donne d'excellents résultats jusqu'à $\alpha = 10^{-4}$, valeur que ne saurait atteindre la méthode d'Edgeworth à cause de l'existence de termes négatifs (Figure 5).

IV - COMPARAISON DES METHODES - CONSLUSION

Nous avons envisagé deux méthodes principales de calcul des probabilités d'erreur à la sortie d'un détecteur.

La méthode du développement en série d'Edgeworth de la loi du test est assez simple puisqu'elle ne requiert que le calcul des moments jusqu'à l'ordre 4 (ou 6 éventuellement). Cependant, le domaine des probabilités auquel elle est applicable ne peut guère s'étendre à des valeurs inférieures à 10^{-2} à cause du caractère assez peu régulier des densités de probabilités obtenues. En effet la loi de probabilité ainsi approchée possède en général plusieurs modes et même souvent des valeurs négatives. Ce point est discuté en détail dans [7].

La méthode du changement de variable basée sur une approximation de la variable test valable seulement au voisinage du seuil de décision, est beaucoup mieux adaptée à un calcul de probabilités faibles, comme celui d'une fausse alarme. Cependant, elle requiert une approximation de la seconde fonction génératrice du test, ce qui est plus exigeant qu'une approximation des moments.

Dans le cas particulier du détecteur quadratique, les deux méthodes se complètent fort bien. Par l'exemple du spectre rectangulaire nous avons mis en évidence que la série d'Edgeworth est adaptée aux signaux dont le spectre est à flanc raide.

En effet cette propriété entraîne une chute brutale dans les valeurs propres, permettant ainsi un calcul aisé des cumulants. C'est pour une raison semblable que la détection des signaux ayant un produit temps-fréquence faible, se traite bien par la méthode d'Edgeworth, à la condition toutefois que le bruit reste faible. Lorsque le bruit augmente il n'y a plus de coupure nette dans les valeurs propres et la méthode devient difficile à appliquer. Le changement de variable permet de traiter les cas plus difficiles où le spectre du signal n'est pas à décroissance rapide, comme c'est le cas d'un spectre rationnel et le cas des signaux à large produit temps-fréquence. Cette méthode est en effet d'autant plus facile à appliquer que l'intervalle de détection est plus long.

Ainsi les méthodes envisagées sont complémentaires par leurs domaines d'applications.

REFERENCES

[1] H.L. VAN TREES : Détection, estimation and modulation theory. Part.III, Wiley (1971).

[2] C.W. HELSTROM : Statistical theory of signal detection. Pergamon Press (1968).

[3] D. SLEPIAN : "Fluctuations of random noise power." B.S.T.J., January 1958, p. 163.

[4] R. COURANT, D. HILBERT : Methods of mathematical physics. Vol. 1, Inters. publis. (1953).

[5] H.L. VAN TREES : Detection, estimation and modulation theory. Part. I, Wiley (1968).

[6] H.J. LANDAU and H.O. POLLAK : "Prolate spheroïdal wave functions". B.S.T.J. 41, p. 1295, (1962).

[7] D.E. BARTON, K.E. DENNIS : "The condition under which Gram-Charlier and Edgeworth curves are positive definite and unimodal". Biometrika 39, p. 425, (1952).

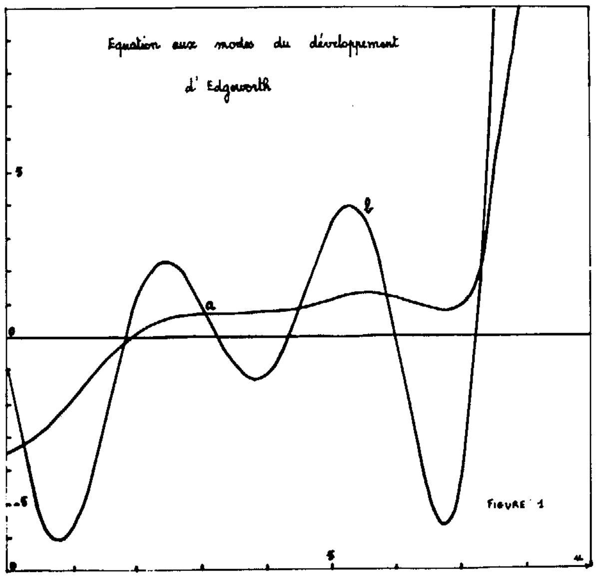

FIGURE 1

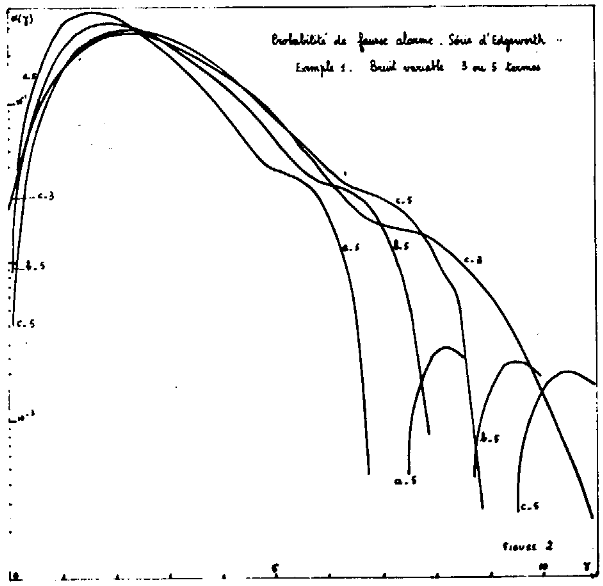

FIGURE 2

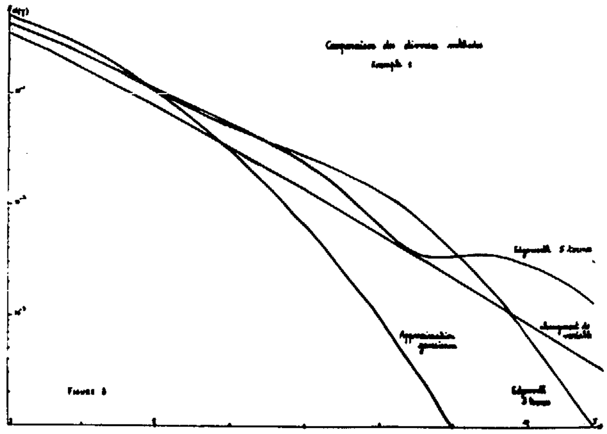

FIGURE 3

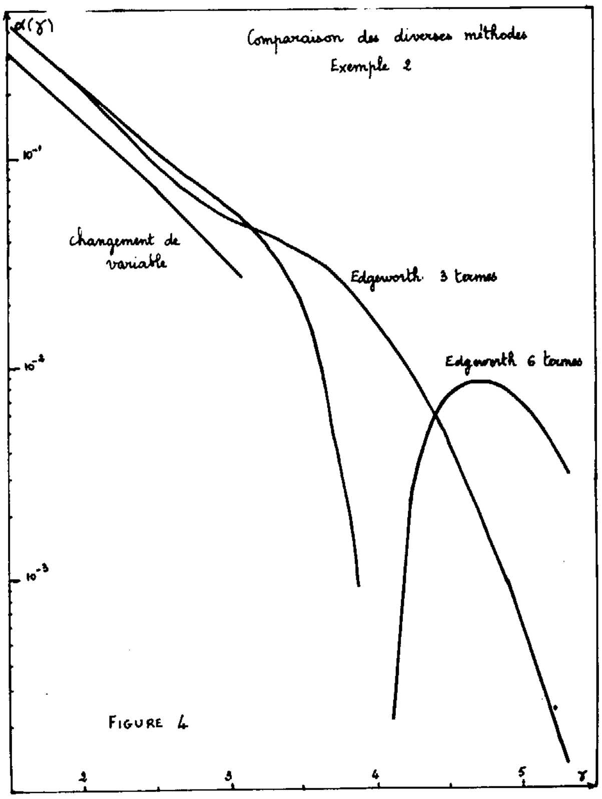

FIGURE 4

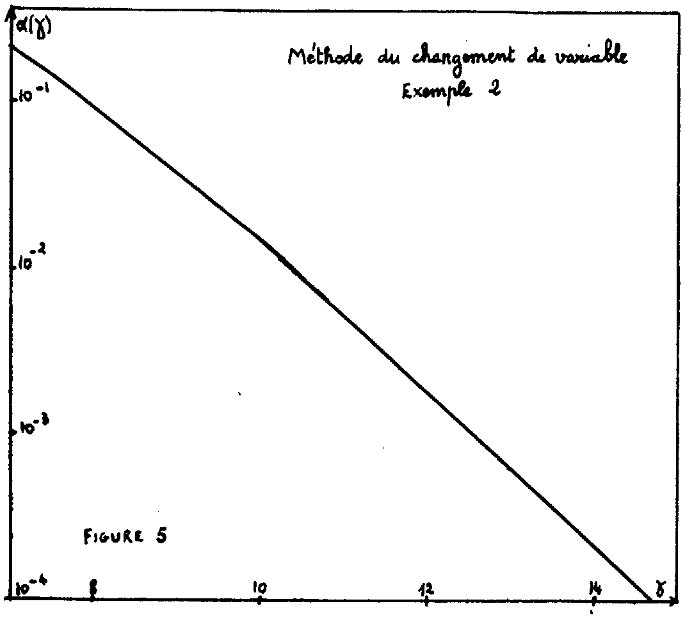

FIGURE 5