

COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS



NICE du 16 au 21 JUIN 75

RESOLUTION DE L'EQUATION DE PROPAGATION DU SON POUR DES
PROFILS DE CELERITE QUELCONQUES ET DES FONDS COMPOSITES

MM. A. GILLES* & D. ODERO**

* CIT/ALCATEL CENTRE PIERRE HERRENG BRUYERES-LE-CHATEL
** CIT/ALCATEL 1 AVENUE ARISTIDE BRIAND ARCUEIL

RESUME

L'équation de propagation du son dans l'eau a été résolue en utilisant la théorie des modes appliquée à une source ponctuelle, isotrope et monochromatique. Le milieu constitué par l'atmosphère, l'eau, un sédiment et un fond rocheux est supposé stratifié horizontalement, la célérité dans l'eau et dans le sédiment variant avec la profondeur ainsi que la masse volumique du sédiment.

Une solution analytique a pu être établie dans ces conditions en utilisant des profils de densité et de célérité du type GANS-PEDERSEN. Une solution numérique utilisant une équation intégrale du type VOLTERRA est appliquée à des profils de forme quelconque.

Nous avons mis au point un programme de calcul sur ordinateur dans ces deux cas. La perte de propagation est obtenue en fonction de la distance sous forme d'une série de résidus et de deux intégrales de branche dont la contribution est négligeable loin de la source.

Ces travaux ont été soutenus par la DRiME.

SUMMARY

The wave equation for sound propagation in shallow water has been solved by using normal mode theory applied to an harmonic point source.

The medium, constituted by air, water, sediment and a solid bottom, is assumed to be horizontally stratified. Sound speed in both water and sediment and density of sediment are varying with depth.

A closed form solution has been found in the case of GANS-PEDERSEN types of density and sound speed profiles. For real profiles of any given shape a numerical solution is employed that makes use of the VOLTERRA integral equation.

A computer program has been written for both developments. The propagation loss in water versus horizontal ranges is obtained in terms of a residue serie and two branch line integrals that may be omitted for ranges long compared to the water depth.

This work was sponsored by DRiME.

RESOLUTION DE L'EQUATION DE PROPAGATION DU SON POUR DES
PROFILS DE CELERITE QUELCONQUES ET DES FONDS COMPOSITES

1. INTRODUCTION

L'utilisation de la théorie des modes pour la propagation du son par petits fonds a été développée pour la première fois par PEKERIS (réf.1,2,3) en 1948. Son modèle était très simple puisque le fond sous-marin était assimilé à un deuxième fluide, les célérités du son dans l'eau et dans le fond étant différentes mais constantes avec la profondeur. Depuis, plusieurs tentatives ont été faites pour tenir compte de la variation de la célérité du son avec la profondeur : citons par exemple un programme de calcul sur ordinateur mis au point par NEWMAN et INGENITO (réf.4) pour un modèle à deux fluides avec variation du son en fonction de la profondeur dans le premier fluide. Ce programme utilise la technique des différences finies.

Nous développons ici un modèle plus réaliste en partant d'une formulation de la théorie des modes développée au chapitre 2, valable pour de nombreux modèles à condition de supposer toujours des milieux stratifiés horizontalement (les paramètres des différents milieux ne varient qu'avec la profondeur), ce qui permet de transformer l'équation de propagation initiale en une équation du type de HELMHOLTZ.

Notre modèle est constitué ainsi : le milieu marin est borné par l'atmosphère et par un fond solide recouvert ou non d'un sédiment considéré comme un deuxième fluide.

Nous supposons que la célérité du son ne dépend que de la profondeur dans l'eau et le sédiment et que les célérités de cisaillement et de compression dans la roche sont constantes.

D'autre part, nous supposons que la masse volumique du sédiment varie avec la profondeur et que celles de l'eau et de la roche restent constantes. Le champ sonore est créé par une source ponctuelle, isotrope et monochromatique.

Au chapitre 3, nous appliquons la formulation développée au chapitre 2 au cas de profils de célérité et de densité analytiques du type GANS-PEDERSEN. Au chapitre 4, nous l'appliquons au cas de profils de forme quelconque pouvant n'être connus qu'en un nombre discrets de points.

2. FORMULATION DU PROBLEME

2.1 - Equation de propagation du son

Soit $\phi(\vec{r}, t)$ le potentiel des vitesses. Par définition, la pression acoustique $p(\vec{r}, t)$ et la vitesse de déplacement $\vec{v}(\vec{r}, t)$ d'un élément de fluide sont données par :

$$(1) \quad p(\vec{r}, t) = \rho \frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t}; \quad \vec{v}(\vec{r}, t) = - \text{grad} \phi(\vec{r}, t)$$

En tenant compte de l'équation de conservation de la quantité de mouvement, de l'équation de conservation

de la masse et de l'équation d'état reliant la pression acoustique à la variation de densité, le potentiel $\phi(\vec{r}, t)$ obéit à l'équation suivante (au premier ordre) :

$$(2) \quad \Delta \phi - \frac{1}{C^2(z)} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho(z)} \frac{d\rho}{dz} \frac{\partial \phi}{\partial z} = - 4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}_e) e^{j\omega t}$$

où $C(z)$ est la célérité du son dans le fluide (eau ou sédiment), $\rho(z)$ la densité du fluide. Le deuxième membre de l'équation (2) représente le terme de source : \vec{r} est le rayon vecteur qui joint l'origine du système d'axes au point d'observation et \vec{r}_e celui qui joint cette origine au point où est située la source. Compte tenu de la schématisation du milieu, on peut utiliser des coordonnées cylindriques à symétrie azimutale.

Le potentiel $\phi(\vec{r}, t)$ se met sous la forme :

$$(3) \quad \phi(\vec{r}, t) = \phi'(r, z) e^{j\omega t}$$

On peut résoudre l'équation (2) en utilisant la transformée de HANKEL de $\phi'(r, z)$.

La fonction $\phi'(r, z)$ cherchée est solution de l'équation

$$(4) \quad \phi'(r, z) = \frac{-1}{j\pi} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \phi(z, s) K_0(sr) ds$$

où $K_0(sr)$ est la fonction de BESSEL modifiée de deuxième espèce d'ordre zéro.

La fonction $\phi(z, s)$ est solution de l'équation :

$$(5) \quad \frac{d^2 \phi}{dz^2} + \left[\frac{\omega^2}{C^2(z)} + s^2 \right] \phi - \frac{1}{\rho(z)} \frac{d\rho}{dz} \frac{d\phi}{dz} = -2\pi \delta(z - z_e)$$

La variable r est la distance horizontale du point d'observation à la source tandis que z est sa profondeur par rapport à la surface de la mer. La variable s est un paramètre qui intervient dans l'expression de la transformée de HANKEL et qui correspond physiquement à la composante horizontale du vecteur d'onde. Pour obtenir le potentiel, il faut donc d'abord résoudre l'équation (5) pour obtenir la fonction $\phi(z, s)$ et ensuite calculer l'expression (4).

L'équation différentielle du second ordre (5) obéit à certaines conditions aux limites au niveau des interfaces air-eau, eau-sédiment, sédiment-roche : c'est un problème de STURM-LIOUVILLE.

2.2 - Formulation des conditions aux limites

Des conditions de passage ou des conditions aux limites interviennent à chaque fois qu'on change de milieu :

- sur l'interface air-eau (plan $z=0$) : la pression acoustique est nulle
- sur l'interface eau-sédiment (plan $z=z_1$) : la pression est continue et la frontière subit la même défor-



RESOLUTION DE L'EQUATION DE PROPAGATION DU SON POUR DES
PROFILS DE CELERITE QUELCONQUES ET DES FONDS COMPOSITES

mation de part et d'autre à chaque instant (continuité de la composante normale de la vitesse de déplacement d'un élément de fluide).

- sur l'interface sédiment-roche (plan $z=z_2$) : le terme du tenseur des contraintes T_{zz} qui s'exercent dans la roche en $z=z_2+0$ doit équilibrer la pression qui s'exerce sur l'autre face (sédiment en z_2-0). De plus la frontière doit subir la même déformation de part et d'autre. Ces deux conditions amènent à la condition homogène suivante :

$$(6) \frac{1}{\rho_1(z_2)} \frac{1}{\phi(z_2)} \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z_2-0} = \frac{1}{\rho_2} \frac{1}{T_{zz}} \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \Big|_{z_2+0} = K(s)$$

où la fonction ϕ est solution de l'équation (5) et où ρ_1 et ρ_2 sont respectivement les masses volumiques du sédiment et de la roche. On montre que le terme $K(s)$ a la forme suivante :

$$(7) K(s) = - \frac{j}{4\rho_2} \frac{\omega^4}{C_T^4} \frac{a}{[s^2 + \frac{\omega^2}{2C_T^2}]^2 - abs^2}$$

Avec :

$$a = \left[\frac{\omega^2}{C_L^2} + s^2 \right]^{1/2} ; b = \left[\frac{\omega^2}{C_T^2} + s^2 \right]^{1/2}$$

où C_L et C_T sont respectivement les célérités de compression et de cisaillement dans la roche. Le paramètre s est le même que celui introduit dans l'équation (4). Le fait que le champ acoustique s'annule à l'infini dans la roche entraîne que les déterminations que l'on doit prendre pour a et b ne sont pas quelconques.

- Au niveau de la source (plan $z=z_e$) : il doit y avoir continuité de la pression et d'autre part la composante verticale de la vitesse de déplacement du fluide doit être continue partout dans le plan $z=z_e$ sauf à la source où le fluide en dessus et en dessous de la source se déplace dans des directions opposées. Mathématiquement cette condition se formule ainsi :

$$(8) \frac{d\phi}{dz} \Big|_{z_e-0} - \frac{d\phi}{dz} \Big|_{z_e+0} = -2$$

2.3 - Solution de l'équation (5)

Si $\phi(z,s)$ est une solution de l'équation (5) qui obéit aux conditions aux limites précédentes en $z=0$ et plus précisément :

$$(9) \phi(0,s) = 0 ; \frac{1}{\rho(0)} \frac{\partial \phi(0,s)}{\partial z} = 1$$

Si $\psi(z,s)$ est une solution de l'équation (5) qui obéit

aux conditions aux limites précédentes en $z = z_2$; plus précisément :

$$\psi(z,s) = \psi_1(z,s) + K(s) \psi_2(z,s)$$

Avec :

$$(10) \psi_1(z_2,s) = 1 ; \psi_2(z_2,s) = 0$$

$$\frac{1}{\rho(z_2)} \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \Big|_{z=z_2} = 1 ; \frac{1}{\rho(z_2)} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \Big|_{z=z_2} = 0$$

Si, de plus, les fonctions $\phi(z,s)$ et $\psi(z,s)$ sont linéairement indépendantes, la solution de l'équation (5) qui obéit à la fois aux conditions sur la surface, sur le fond et au niveau de la source est donnée par la fonction de GREEN :

$$(11) \phi(z,z_e,s) \begin{cases} -2 \frac{\psi(z_e,s)\phi(z,s)}{\rho(0)\psi(0)} & 0 < z < z_e < z_2 \\ -2 \frac{\phi(z_e,s)\psi(z,s)}{p(0)\psi(0)} & 0 < z_e < z < z_2 \end{cases}$$

Précisons que la solution (11) de l'équation (5) n'est pas connue analytiquement. Nous avons seulement exprimé les conditions auxquelles devaient obéir des fonctions solution du problème posé. Ces conditions sont nécessaires et suffisantes pour que toutes les fonctions ϕ et ψ obéissant aux conditions (9) et (10) respectivement donnent une fonction ϕ solution du problème.

2.4 - Solution de l'équation (4). Choix du contour d'intégration dans le plan complexe des s

La fonction $\phi(z,z_e,s)$ dont nous venons de voir la structure est une fonction complexe. Elle possède un certain nombre de pôles complexes, imaginaires purs et réels s_n qui sont les zéros de $\psi(0,s)$ (ici le problème de STURM-LIOUVILLE n'est pas hermitique).

On résoud classiquement l'équation (4) en utilisant la méthode des résidus.

L'expression de $K(s)$ et les déterminations de a et b choisies font que l'intégration doit se faire dans le plan $\text{Re}(s) \geq 0$

Nous avons choisi de prendre les coupures $\pm j\omega/C_L$ et $\pm j\omega/C_T$ telles que deux seulement se trouvent dans le demi-plan $\text{Re}(s) > 0$ et qu'elles soient parallèles à l'axe réel des s . Les pôles s_n de la fonction ϕ sont simples et se situent dans le quatrième quadrant du plan complexe (ainsi que leurs symétriques par rapport à l'origine qui, eux, se trouvent dans le deuxième quadrant).

Nous avons donc choisi le contour d'intégration C de la figure 1.

RESOLUTION DE L'EQUATION DE PROPAGATION DU SON POUR DES PROFILS DE CELERITE QUELCONQUES ET DES FONDS COMPOSITES

Nous intégrons sur la demi-droite $l+j$ pour que les pôles symétriques situés dans le deuxième quadrant n'influencent pas le comportement de ϕ . (Ceci n'a d'ailleurs d'intérêt que dans le cas d'une intégration numérique de l'équation (4)).

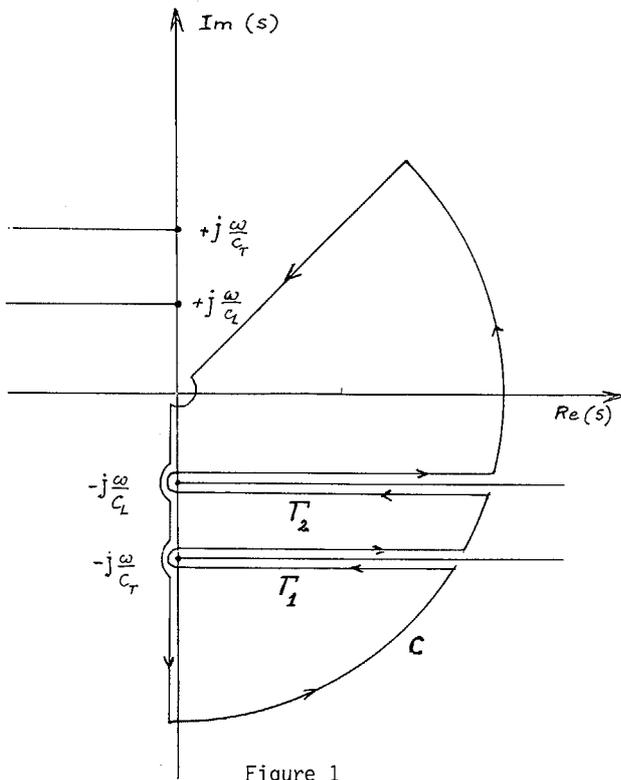


Figure 1

Compte tenu de ce contour d'intégration, l'équation (4) se met sous la forme :

$$(12) \phi'(r,z) = \frac{1}{j\pi} \left[\int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} \right] - 4 \sum_n R_n K_0(s_n r)$$

Avec les résidus R_n donnés par :

$$(13) R_n = s_n \frac{\phi(z \text{ ou } z_e, s_n) \psi(z_e \text{ ou } z, s_n)}{\rho(0) \partial \psi(0, s_n) / \partial s}$$

L'expression (12) est composée de deux termes : le premier correspond aux intégrales de branche évaluées sur les coupures Γ_1 et Γ_2 . Physiquement il représente des ondes se propageant le long du plan de séparation fond rocheux-sédiment ou eau avec des célérités c_L et c_T , leurs amplitudes décroissant approximativement en $1/r^2$, (réf.5). Le deuxième représente une somme de résidus. Ces résidus correspondent aux racines de l'équation de dispersion $\psi(0,s) = 0$. Chacun des termes de cette somme constitue un mode de propagation, c'est-à-dire une onde se propageant avec un vecteur d'onde horizontal donné par s_n . L'amplitude de ces ondes décroît en $1/\sqrt{r}$, de sorte

qu'à des distances grandes devant la hauteur d'eau, la contribution des intégrales de branche devient négligeable.

A titre de vérification, nous avons appliqué la formulation précédente au modèle de PEKERIS. Le modèle de PEKERIS est constitué de deux milieux fluides. Le premier milieu est caractérisé par une célérité c_1 et une densité ρ_1 constantes. Il est compris entre deux plans infinis situés en $z = 0$ et $z = z_2$. La source et le récepteur sont tous les deux dans ce premier milieu, respectivement aux profondeurs z_e et z . Le deuxième milieu fluide est caractérisé par une célérité c_2 et une densité ρ_2 constantes. Il s'étend du plan $z = z_2$ à l'infini. Les fonctions $\phi(z,s)$ et $\psi(z,s)$ sont alors données par :

$$(14) \phi(z,s) = \rho_1 \frac{\sin \alpha_1 z}{\alpha_1}$$

$$(15) \psi(z,s) = \cos \alpha_1 (z_2 - z) - \frac{\rho_1 K(s)}{\alpha_1} \sin \alpha_1 (z_2 - z)$$

Avec :

$$\alpha_1 = \left[\frac{\omega^2}{c_1^2} + s^2 \right]^{1/2}$$

De plus, dans le cas d'un fond fluide, l'expression $K(s)$, donnée par (7) devient :

$$K(s) = -j \frac{\alpha_2}{\rho_2} \quad \text{Avec : } \alpha_2 = \left[\frac{\omega^2}{c_2^2} + s^2 \right]^{1/2}$$

En se limitant au cas où $z < z_e$, la fonction $\phi(z, z_e, s)$ s'écrit :

$$(16) \phi(z, z_e, s) = \frac{\sin \alpha_1 z}{\alpha_1} \times \frac{\alpha_1 \cos \alpha_1 (z_2 - z_e) + j \frac{\rho_1}{\rho_2} \alpha_2 \sin \alpha_1 (z_2 - z_e)}{\alpha_1 \cos \alpha_1 z_2 + j \frac{\rho_1}{\rho_2} \alpha_2 \sin \alpha_1 z_2}$$

Expression identique à celle obtenue par PEKERIS. On obtient également la même valeur des résidus R_n lorsqu'on utilise (13). Nous n'entrerons pas plus dans les détails, le modèle de PEKERIS étant bien connu.

3. FORME ANALYTIQUE DE LA FONCTION DE GREEN ϕ (rayonnement dans un milieu marin du type GANS-PEDERSEN)

Nous prenons les classes de fonctions suivantes :

a) Dans l'eau de mer ($0 < z < z_1$) :

Densité : $\rho = \rho_0 = \text{constante}$

Célérité du son : $C^2(z) = C_0^3 / (C_0 - 2\gamma_0 z)$

où C_0 et γ_0 sont des constantes.



RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DE PROPAGATION DU SON POUR DES
PROFILS DE CÉLÉRITÉ QUELCONQUES ET DES FONDS COMPOSITES

b) Dans le sédiment ($z_1 < z < z_2$):

$$\text{Densité : } \rho(z) = \rho_1 \exp[\rho'_1(z-z_2)/\rho_1]$$

où ρ_1 et ρ'_1/ρ_1 sont des constantes.

$$\text{Célérité : } c^2(z) = c_1^3/(c_1 - 2\gamma_1(z-z_1))$$

où c_1 et γ_1 sont des constantes.

Dans ces conditions, les fonctions ϕ et ψ qui constituent Φ sont données par les expressions suivantes :

$$(17) \phi = -\frac{\pi}{3^{5/6}} \frac{c_0 \rho_0}{(\gamma_0 \omega^2)^{1/3}} (\zeta \zeta_0)^{1/3} \times$$

$$\left[J_{-1/3}(\zeta_0) J_{1/3}(\zeta) - J_{1/3}(\zeta_0) J_{-1/3}(\zeta) \right]$$

Avec :

$$\zeta = \frac{c_0^3}{3\gamma_0 \omega^2} \left(\frac{\omega^2}{c^2(z)} + s^2 \right)^{3/2}; \quad \zeta_0 = \frac{c_0^3}{3\gamma_0 \omega^2} \left(\frac{\omega^2}{c_0^2} + s^2 \right)^{3/2}$$

La fonction ψ se met sous la forme :

$$(18) \psi = Y + \rho_0 k_1(s) X$$

Avec :

$$X = -\frac{\pi}{3^{5/6}} \frac{c_0}{(\gamma_0 \omega^2)^{1/3}} (\zeta \zeta_1)^{1/3} \times$$

$$\left[J_{-1/3}(\zeta_1) J_{1/3}(\zeta) - J_{1/3}(\zeta_1) J_{-1/3}(\zeta) \right]$$

$$Y = -\frac{\pi}{3^{1/2}} (\zeta \zeta_1)^{1/3} \times$$

$$\left[J_{-1/3}(\zeta) J_{-2/3}(\zeta_1) + J_{1/3}(\zeta) J_{2/3}(\zeta_1) \right]$$

$$k_1(s) = \frac{1}{\rho_1} \exp \left[\frac{\rho'_1}{\rho_1} (z_2 - z_1) \right] \times \left\{ \frac{\rho'_1}{2\rho_1} + \frac{\left[\rho_1 K(s) - \frac{\rho'_1}{2\rho_1} \right] \frac{dX_1(\xi_1)}{dz} + \frac{dY_1(\xi_1)}{dz}}{\left[\rho_1 K(s) - \frac{\rho'_1}{2\rho_1} \right] X_1(\xi_1) + Y_1(\xi_1)} \right\}$$

Avec :

$$X_1 = -\frac{\pi}{3^{1/2}} \frac{c_1}{(3\gamma_1 \omega^2)^{1/3}} (\xi \xi_2)^{1/3} \times$$

$$\left[J_{-1/3}(\xi_2) J_{1/3}(\xi) - J_{1/3}(\xi_2) J_{-1/3}(\xi) \right]$$

$$Y_1 = -\frac{\pi}{3^{1/2}} (\xi \xi_2)^{1/3} \times$$

$$\left[J_{-1/3}(\xi) J_{-2/3}(\xi_2) + J_{1/3}(\xi) J_{2/3}(\xi_2) \right]$$

$$\frac{dX_1}{dz} = \frac{\pi}{3^{1/2}} (\xi^2 \xi_2)^{1/3} \times$$

$$\left[J_{-1/3}(\xi_2) J_{-2/3}(\xi) + J_{1/3}(\xi_2) J_{2/3}(\xi) \right]$$

$$\frac{dY_1}{dz} = \frac{\pi}{3^{1/2}} \frac{(3\gamma_1 \omega^2)^{1/3}}{c_1} (\xi_2 \xi)^{2/3} \times$$

$$\left[J_{-2/3}(\xi_2) J_{2/3}(\xi) - J_{2/3}(\xi_2) J_{-2/3}(\xi) \right]$$

où les fonctions $J_{\pm 1/3}$ et $J_{\pm 2/3}$ sont les fonctions de BESSEL complexes de première espèce d'ordre fractionnaire de la variable complexe ξ ou ξ_2 .

Les variables ζ_1 , ξ et ξ_2 intervenant dans ces expressions étant données par :

$$\zeta_1 = \frac{c_1^3}{3\gamma_1 \omega^2} \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} + s^2 \right)^{3/2}$$

$$\xi = \frac{c_1^3}{3\gamma_1 \omega^2} \left[\frac{\omega^2}{c(z)^2} + s^2 - \left(\frac{\rho'_1}{2\rho_1} \right)^2 \right]^{2/3}$$

$$\xi_2 = \frac{c_1^3}{3\gamma_1 \omega^2} \left[\frac{\omega^2}{c(z_2)^2} + s^2 - \left(\frac{\rho'_1}{2\rho_1} \right)^2 \right]^{2/3}$$

Les résidus correspondant aux pôles s_n de $\psi(0,s)$ nécessitent la connaissance de $\partial\psi/\partial s$. Le calcul de cette dérivée n'offre pas de difficultés mais amène à une expression fort longue que nous ne développerons pas ici.

4. FORME NUMÉRIQUE DE LA FONCTION DE GREEN ϕ :

(rayonnement dans un milieu marin quelconque)

Nous avons vu qu'il était possible d'obtenir une expression analytique de la fonction ϕ . Cependant les classes de fonctions $C(z)$ et $\rho(z)$ permettant ce calcul sont trop restreintes pour pouvoir exploiter utilement n'importe quel type de bathy pouvant se rencontrer dans la propagation par petits fonds.

Nous allons développer dans ce paragraphe une méthode générale permettant d'utiliser n'importe quelle forme de bathy..

Nous écrivons l'équation (5) sous une forme un peu

RESOLUTION DE L'EQUATION DE PROPAGATION DU SON POUR DES
PROFILS DE CELERITE QUELCONQUÉS ET DES FONDS COMPOSITES

différente :

$$(19) \quad \rho(z) \frac{dU}{dz} + \left(\frac{\omega^2}{C^2(z)} + s^2 \right) P = 0$$

$$\rho(z)U - \frac{dP}{dz} = 0$$

Alors ϕ représente la solution $P(z)$ avec les conditions aux limites : $P(0) = 0$
 $U(0) = 1$

Et ψ représente la solution $P(z)$ avec les conditions
 $P(z_2) = 1$
 $U(z_2) = K(s)$

Nous découpons le milieu en N couches stratifiées horizontalement, chaque couche ayant pour épaisseur $(z_n - z_{n+1})$. On peut définir dans chaque couche une célérité moyenne C_n et une densité moyenne ρ_n . On peut alors réécrire (19) sous la forme suivante :

$$(20) \quad \rho_n \frac{dU}{dz} + \left(\frac{\omega^2}{C_n^2} + s^2 \right) P = \left(\frac{\omega^2}{C_n^2} - \frac{\omega^2}{C^2} \right) P + (\rho_n - \rho) \frac{dU}{dz}$$

$$\rho_n U - \frac{dP}{dz} = (\rho_n - \rho)U$$

L'avantage de cette écriture est que, dans chaque couche $(z_n - z_{n+1})$, les deux premiers membres des équations (19) sont à coefficients constants. On peut alors utiliser la méthode de variation des constantes de LAGRANGE pour résoudre (20). On aboutit au système suivant :

$$(21) \quad P(z_{n+1}) = P(z_n) \cos \alpha_n (z_{n+1} - z_n) +$$

$$\rho_n U(z_n) \frac{\sin \alpha_n (z_{n+1} - z_n)}{\alpha_n} + \int_{z_n}^{z_{n+1}} \left\{ \left[\frac{\omega^2}{C_n^2} - \frac{\omega^2}{C^2(\zeta)} \right] P(\zeta) + [\rho_n - \rho(\zeta)] \frac{dU(\zeta)}{dz} \right\} \frac{\sin \alpha_n (z_{n+1} - \zeta)}{\alpha_n} - [\rho_n - \rho(\zeta)] U(\zeta) \cos \alpha_n (z_{n+1} - \zeta) \right\} d\zeta$$

$$(22) \quad \rho_n U(z_{n+1}) = -P(z_n) \alpha_n \sin \alpha_n (z_{n+1} - z_n) +$$

$$\rho_n U(z_n) \cos \alpha_n (z_{n+1} - z_n) + \int_{z_n}^{z_{n+1}} \left\{ \left[\frac{\omega^2}{C_n^2} - \frac{\omega^2}{C^2(\zeta)} \right] P(\zeta) + [\rho_n - \rho(\zeta)] \frac{dU(\zeta)}{dz} \right\} \cos \alpha_n (z_{n+1} - \zeta) + [\rho_n - \rho(\zeta)] U(\zeta) \alpha_n \sin \alpha_n (z_{n+1} - \zeta) \right\} d\zeta$$

$$\text{Avec : } \alpha_n = \left(\frac{\omega^2}{C_n^2} + s^2 \right)^{1/2}$$

Les fonctions ϕ et ψ sont donc solutions d'une équation intégrale du type VOLTERRA. Si on connaît $U(z_n)$ et $P(z_n)$, on en déduit $U(z_{n+1})$ et $P(z_{n+1})$ et ainsi, de couche en couche, on arrive à $U(z)$ et $P(z)$. Les valeurs initiales de U et P sont données par les conditions aux limites.

Les expressions (21) et (22) ne sont pas programmables sur ordinateur. En développant en série de TAYLOR les expressions sous les signes somme des expressions (21) et (22), il est possible de calculer analytiquement ces intégrales. On aboutit aux expressions suivantes, facilement programmables :

$$(23) \quad P(z_{n+1}) = P(z_n) \left\{ \cos \alpha_n (z_{n+1} - z_n) + \sum_0^4 a_i J_{in} -$$

$$\frac{1}{\rho(z_n)} \sum_1^3 b'_i K_{in} \right\} + U(z_n) \left\{ \rho_n \frac{\sin \alpha_n (z_{n+1} - z_n)}{\alpha_n} + \rho(z_n) \sum_1^3 b_i J_{in} - \sum_0^4 a'_i K_{in} \right\}$$

$$(24) \quad \rho_n U(z_{n+1}) = P(z_n) \left\{ -\alpha_n \sin \alpha_n (z_{n+1} - z_n) + \sum_0^4 a_i K_{in} \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha_n^2}{\rho(z_n)} \sum_1^3 b'_i J_{in} \right\} + U(z_n) \left\{ \rho_n \cos \alpha_n (z_{n+1} - z_n) + \rho(z_n) \sum_1^3 b_i K_{in} + \alpha_n^2 \sum_0^4 a'_i J_{in} \right\}$$

Les coefficients $a_i, b_i, a'_i, b'_i, J_{in}$ et K_{in} qui n'offrent pas de difficultés à calculer ne seront pas explicités ici.

Pour calculer les résidus correspondant aux pôles s_n $\psi(0, s)$, il faut connaître $\partial\psi/\partial s$. Pour cela, on pose :

$$\frac{\partial P}{\partial s^2} \equiv \frac{\partial \psi}{\partial s^2} = x \quad \text{et} \quad \frac{\partial U}{\partial s^2} \equiv \frac{1}{\rho} \frac{d}{dz} \frac{\partial \psi}{\partial s^2} = y$$

Alors : $\partial\psi/\partial s = 2sx$

On dérive par rapport à s^2 le système (19). Il vient :

$$\rho \frac{d}{dz} \frac{dU}{ds^2} + P + \left(\frac{\omega^2}{C^2(z)} + s^2 \right) \frac{dP}{ds^2} = 0$$

$$(25) \quad \frac{d}{dz} \left(\frac{dP}{ds^2} \right) - \rho \left(\frac{dU}{ds^2} \right) = 0$$

Le système (25) obéit aux conditions aux limites suivantes : $x(z_2) = 0$

$$y(z_2) = \partial K / \partial s^2$$

On utilise alors les mêmes méthodes que pour le calcul de P et de U et on obtient $x(z_{n+1})$ et $y(z_{n+1})$ en fonction de $x(z_n)$ et $y(z_n)$.



RESOLUTION DE L'EQUATION DE PROPAGATION DU SON POUR DES
PROFILS DE CELERITE QUELCONQUES ET DES FONDS COMPOSITES

5. CONCLUSION

La perte de propagation en fonction de la distance horizontale est donnée par :

$$(26) P = 20 \log |\phi'(r,z)| \quad \text{dB réf } 1 \mu\text{b à } 1 \text{ m.}$$

où $\phi'(r,z)$ est solution de (4). Il est d'ailleurs possible d'introduire un terme de perte supplémentaire dû à l'amortissement du son par le milieu soit indirectement en ajoutant un terme correctif à l'expression (26), soit directement en considérant des célérités complexes.

Nous avons mis au point le calcul de (26) sur ordinateur à partir des modèles développés aux chapitres 3 et 4. En ce qui concerne le modèle de rayonnement dans un milieu marin ayant des bathy et des courbes de densité dans le sédiment quelconques, il est possible d'introduire les valeurs expérimentales sous forme de points fonctions de la profondeur.

Le programme se charge de calculer les valeurs intermédiaires nécessaires dans le déroulement des différentes étapes en utilisant une interpolation par une fonction spline cubique naturelle (qui assure la continuité de la fonction interpolée et de ses deux premières dérivées).

Ces programmes permettent de calculer la fonction ϕ' , directement, par intégration numérique sur le contour constitué par la demi-droite $1 + j$ et le demi-axe $\text{Im}(s) < 0$ de la figure 1 ou de calculer les pôles de la fonction $\phi(z, z_e, s)$ puis la série des résidus correspondants. Nous avons effectivement constaté que dès que la distance horizontale à la source était supérieure à la hauteur d'eau H , la contribution des intégrales de branche de l'expression (12) était négligeable.

Ces programmes demandent un temps de calcul important sur un gros ordinateur, (ils ont été mis au point sur un CDC 6600) fonction de la fréquence F émise par la source. On peut, en effet, montrer que le nombre de pôles déterminant le nombre de termes de la série des résidus est donné par :

$$n = 2FH/C$$

où C est la célérité moyenne du son dans l'eau. Cependant, malgré cet handicap, l'exploitation de ces programmes offre de multiples avantages en dehors de l'étude de l'aspect global des arrivées des énergies en un point donné du milieu en fonction de l'emplacement de la source et de la fréquence. Ils permettent en effet d'étudier l'influence sur la propagation des différents paramètres du fond (densité et épaisseur du sédiment, célérités de cisaillement et de compression du fond rocheux). Ils permettent également d'étudier l'influence des différentes formes de bathy.

En particulier lorsqu'il y a existence de chenaux sonores où le modèle de GANS-PEDERSEN est tout à fait applicable (cf.réf.6). Ils permettent enfin l'étude des zones d'ombre définies par la position des caustiques déduites de l'approximation de l'optique géométrique.

REFERENCES

1. C.L PEKERIS "Theory of propagation of Explosive Sound in Shallow Water" The Geological Society of America MEMOIR 27, Propagation of Sound in the Ocean II, 1948
2. C.B OFFICER "Introduction to the theory of Sound Transmission" Mc Graw Hill Series in Geological Sciences, 1958
3. I. TOLSTOY, C.S CLAY "Theory and Experiment in Underwater Sound" Mc Graw Hill Advanced Physics Monographs Series, 1966.
4. A. V NEWMAN, F. INGENITO "A Normal Mode Computer Program for Calculating Sound Propagation in Shallow Water with an Arbitrary Velocity Profile". Naval Research Laboratory, Washington DC Rep. 2381, 1972.
5. L.M BREKHOVSKIKH "Waves in Layered Media" Academic Press Inc, New-York, 1960.
6. F.M LABIANCA "Normal Modes, Virtual Modes, and alternative representations in the theory of surface - duct Sound propagation" J.A.S.A., Vol 53, n°4, p.1137-1147 (1973)