

# COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS



NICE du 16 au 21 JUIN 75

QUELQUES PROBLEMES POSES PAR L'ANALYSE SPECTRALE BASSE FREQUENCE  
(Application à l'étude des oscillateurs)

E. BOILEAU

Y. LECOURTIER

UNIVERSITE PARIS-SUD - Centre d'ORSAY Laboratoire d'Etude des Phénomènes Aléatoires

## RESUME

*L'étude des oscillateurs a montré la nécessité de définir une stabilité à court terme. Ce problème est lié à l'élimination des basses fréquences. En cherchant à optimiser cette opération, nous obtenons un filtrage simple nettement plus efficace que ceux utilisés jusqu'à ce jour dans ces études.*

*Nous examinons par ailleurs le problème de l'analyse spectrale en basse fréquence en temps fini. La première étape consiste à rechercher le filtre numérique dont le gain  $G(\nu)$  soit "le plus étroit" centré sur une fréquence réglable  $f$ .*

*Notre travail a consisté à comparer entre eux quelques critères d'optimisation. Une estimation de la densité spectrale est donnée par celle du moment du 2<sup>d</sup> ordre du processus filtré.*

*Nous avons enfin envisagé la possibilité de regrouper dans un même traitement l'élimination des basses fréquences et l'analyse spectrale en vue d'obtenir une pseudo densité spectrale pour des processus dont la variance est infinie.*

## SUMMARY

*The study of oscillators has stressed the need of a definition of the short term stability. This point is related to the low frequency elimination. Trying to optimise this operation, we obtain a filter which is much more effective than the processes used up to now.*

*We then turn to the problem of finite time low frequency spectrum analysis ; the first step is the research of the digital filter, the complex gain of which,  $G(\nu)$  is "the more <sup>narrow</sup> peak" centered on a movable frequency  $f$ . We compare different optimisation criteria. An estimate of the spectral density is given by that of the second order moment of the filtered process.*

*At last we look at the possibility of performing in a single process, both low frequency elimination and spectrum analysis, obtaining thus a pseudo spectral density for processes with infinite variance.*

I - INTRODUCTION

Les méthodes analogiques employées pour l'analyse spectrale aux fréquences radioélectriques habituelles ne conviennent plus en basse fréquence ( $\nu < 100$  Hz). On est amené à utiliser des méthodes digitales : les échantillons  $x(t_n)$  (avec  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ ) du processus  $x(t)$  à étudier sont traités numériquement.

Pour étudier les composantes spectrales des fréquences de plus en plus basses, on est évidemment obligé d'utiliser des temps de mesure de plus en plus longs ; une première difficulté rencontrée souvent, provient des dérives très lentes de la valeur moyenne temporelle du signal. Par suite de ces dérives, on obtient des spectres expérimentaux qui semblent diverger pour  $\nu \rightarrow 0$  ; c'est le cas par exemple du fameux "flicker noise" associé à un "spectre" qui serait en  $\frac{1}{|\nu|}$ . Le processus serait alors non stationnaire (variance infinie). On peut néanmoins supposer que pour des durées d'observation beaucoup plus grandes, le comportement change de sorte que la variance soit finie. Quoi qu'il en soit, si cette variance est beaucoup plus grande que celle qui correspond aux fluctuations observées sur un intervalle utile T, on cherche à éliminer les dérives lentes.

En effet, considérons par exemple, un dispositif de mesure des déplacements utilisant un comptage de franges d'interférences obtenues avec un laser ; on sait que la précision de la mesure dépend essentiellement des fluctuations de la fréquence du laser pendant la durée T de la mesure. C'est pourquoi il est intéressant de définir une variance  $\sigma^2(T)$  permettant une certaine description statistique de ces fluctuations, en fonction de T. Deux définitions ont été proposées antérieurement, qui permettent d'étudier certains signaux de phase non stationnaire. En cherchant à optimiser cette élimination des basses fréquences, nous obtenons un traitement qui nous semble nettement mieux adapté. Ce traitement permet par ailleurs d'obtenir une certaine approximation de la valeur de la densité spectrale (en supposant qu'elle existe) à la fréquence f de l'intervalle  $[0, \frac{1}{2\Delta t}]$  par l'intermédiaire de son intégrale sur l'intervalle  $[f, \frac{1}{2\Delta t}]$ . Nous nous posons alors le problème d'obtenir directement la meilleure estimation de la densité spectrale d'un processus échantillonné pendant un temps fini. Dans un premier temps nous ne tenons pas compte des particularités éventuelles des basses fréquences. Puis nous reprenons les résultats obtenus pour étudier l'influence des contraintes supplémentaires imposées par les divergences apparentes de certains bruits lorsque  $\nu \rightarrow 0$ .

II - ELIMINATION DES BASSES FREQUENCES

A)- Rappel des méthodes antérieures [1, 2, 3]

En se limitant au cas d'un traitement numérique sur une fonction échantillonnée, une première variance  $\hat{\sigma}_1$  définie avec p mesures  $x_n = x(t + n\Delta t)$  s'obtient par

$$(1) \quad \hat{P}_1(t, \Delta t, p) = \frac{1}{p} \sum_{n=1}^p x_n^2 - \left[ \frac{1}{p} \sum_{n=1}^p x_n \right]^2$$

$$(2) \quad \hat{\sigma}_1^2(\Delta t, p) = E \left[ \hat{P}_1(t, \Delta t, p) \right]$$

On peut définir une variance analogue  $\hat{\sigma}_2$  à l'aide du processus  $\hat{P}_2$  (on suppose ici que  $p = 2N + 1$ ) :

$$(3) \quad \hat{P}_2(t, \Delta t, 2N + 1) = \left[ x_{N+1} - \frac{1}{2N+1} \sum_{n=1}^{2N+1} x_n \right]^2$$

$$(4) \quad \hat{\sigma}_2^2(\Delta t, 2N+1) = E \left[ \hat{P}_2(t, \Delta t, 2N+1) \right]$$

Dans le cas où  $x(t)$  possède une densité spectrale  $\gamma_x(\nu)$ , on a

$$(5) \quad \hat{\sigma}_1^2(\Delta t, p) = \int \gamma_x(\nu) \left[ 1 - \left( \frac{\sin p\pi\nu\Delta t}{p \sin \pi\nu\Delta t} \right)^2 \right] d\nu$$

$$(6) \quad \hat{\sigma}_2^2(\Delta t, p) = \int \gamma_x(\nu) \left[ 1 - \frac{\sin p\pi\nu\Delta t}{p \sin \pi\nu\Delta t} \right]^2 d\nu$$

Ces formules permettent de considérer que nous avons les variances de processus que l'on déduirait de  $x(t)$  par des filtres dont les gains vérifient

$$(7) \quad |\hat{G}_1(\nu, \Delta t, p)|^2 = 1 - \left( \frac{\sin p\pi\nu\Delta t}{p \sin \pi\nu\Delta t} \right)^2$$

$$(8) \quad |\hat{G}_2(\nu, \Delta t, p)|^2 = \left[ 1 - \frac{\sin p\pi\nu\Delta t}{p \sin \pi\nu\Delta t} \right]^2$$

Ces fonctions sont périodiques (de période  $\frac{1}{\Delta t}$ ) et paires; elles sont représentées figure 1 sur la demi-période  $0 < \nu < \frac{1}{2\Delta t}$  pour  $N = 5$  et  $15$ . On constate qu'on obtient une assez bonne élimination des fréquences inférieures à  $\frac{1}{p\Delta t}$ , mais par suite de la périodicité, on élimine également les fréquences voisines des harmoniques de la fréquence  $\frac{1}{\Delta t}$ . Ceci apparait comme un inconvénient par rapport au traitement continu défini de façon analogue [3]

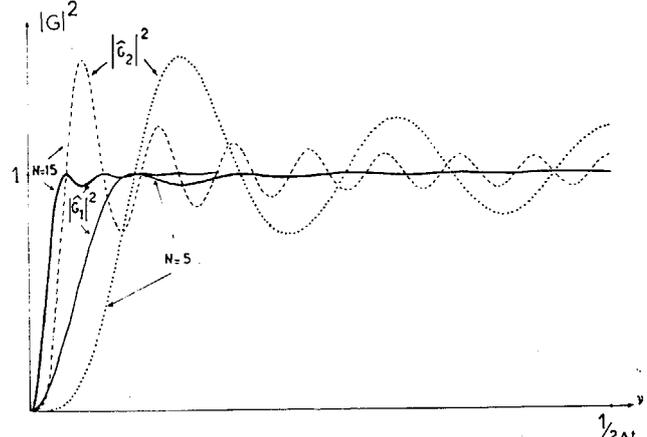


FIGURE 1.



contre partie du fait qu'on peut descendre beaucoup plus bas en fréquence. Notons que cet inconvénient disparaît dans le cas où  $\gamma_X(v)$  est négligeable pour  $\gamma > B$ , pourvu que l'on puisse prendre  $\Delta t < \frac{1}{2B}$ . Les intégrales (5) et (6) portent alors seulement sur l'intervalle  $(-\frac{1}{2\Delta t}, \frac{1}{2\Delta t})$ . On peut toujours se limiter à cet intervalle en y ramenant les composantes de  $\gamma_X(v)$  extérieures par des translations  $\frac{k}{\Delta t}$ ; nous désignerons dans la suite par  $\gamma(v)$  la fonction ainsi obtenue (nulle pour  $|v| > \frac{1}{2\Delta t}$ ) qui est la densité spectrale du processus échantillonné (th de Shannon). Nous écrirons donc

$$(9) \quad \hat{\sigma}_i^2(\Delta t, p) = \int_{-1/2\Delta t}^{1/2\Delta t} \gamma(v) |\hat{G}_i(v, \Delta t, p)|^2 dv \quad (i=1,2)$$

Ces intégrales peuvent converger avec des fonctions  $\gamma(v)$  ayant une singularité non intégrable pour  $v = 0$ ; de telles fonctions ne sont pas des densités spectrales de processus stationnaires, mais elles peuvent par exemple être associées à des processus à accroissements stationnaires [4]. Le traitement associé à  $\hat{\sigma}_2^2$  permet de ce point de vue [3] d'aller plus loin, puisque pour  $v \rightarrow 0$ ,  $|\hat{G}_1|^2$  est du 2ème ordre en  $v$ , alors que  $|\hat{G}_2|^2$  est du 4ème ordre.

### B)- Optimisation

Nous venons de voir que le 2ème traitement considéré ci-dessus élimine mieux les basses fréquences que le 1er, mais, par contre, on constate (figure 1) que les fréquences supérieures à  $\frac{1}{p\Delta t}$  sont alors moins bien conservées (oscillations plus importantes avec  $|\hat{G}_2|^2$ ). Nous sommes ainsi amenés à chercher un autre traitement qui élimine au mieux les fréquences inférieures à une fréquence donnée  $f$  tout en conservant au mieux les fréquences supérieures. Nous nous limitons à chercher ce traitement en utilisant un filtrage symétrique portant sur  $p = 2N+1$  échantillons (comme dans le cas de  $\hat{P}_2$ ). On cherche donc un filtre numérique défini par  $p$  coefficients  $R_n$ :

$$(10) \quad y_k = \sum_{n=-N}^N R_n x_{k-n}$$

Ce filtre a pour gain :

$$(11) \quad G(v, f, \Delta t, N) = \sum_{n=-N}^N R_n e^{-i2\pi n v \Delta t}$$

La valeur moyenne de  $y^2$  permet de définir une variance analogue aux précédentes; nous posons

$$(12) \quad S(f, \Delta t, N) = E(y^2) = \int_{-1/2\Delta t}^{1/2\Delta t} \gamma(v) |G(v, f, \Delta t, N)|^2 dv$$

Comme critère d'optimisation, nous cherchons à approximer au mieux, au sens des moindres carrés, la fonction

$G_A(v, f)$  (appelée gabarit), paire et de période  $\frac{1}{\Delta t}$ , définie par

$$(13) \quad \begin{cases} G_A(v, f) = 0 & \text{pour } 0 < v < f \\ G_A(v, f) = 1 & \text{pour } f < v < \frac{1}{2\Delta t} \end{cases}$$

Il faut donc minimiser

$$(14) \quad I = \int_{-1/2\Delta t}^{1/2\Delta t} |G(v, f, \Delta t, N) - G_A(v, f)|^2 dv$$

et nous imposons la condition  $G(0, f, \Delta t, N) = 0$  (élimination certaine de la fréquence  $v = 0$ ). Pour cela, nous introduisons [5] les coefficients  $A_n$  du développement en série de Fourier de  $G_A$  et nous obtenons

$$(15) \quad R_n = A_n - \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N A_n$$

$$(16) \quad \begin{cases} A_0 = 1 - 2f\Delta t \\ A_n = A_{-n} = -\frac{1}{n\pi} \sin 2\pi n f \Delta t \end{cases}$$

Rappelons que le problème correspondant, dans le cas d'un filtrage continu (de support imposé  $T$ ), se traite de façon analogue [5].

Bien que nous n'ayons pas imposé

$\frac{\partial G}{\partial v}(0, f, \Delta t, N) = 0$ , il est clair que cette dérivée est nulle puisque  $G$  est paire. Au voisinage de  $v = 0$ ,  $|G(v, f, \Delta t, N)|^2$  est donc au plus du 4ème ordre en  $v$  (comme  $|\hat{G}_2|^2$ ).

Les figures 2, 3, et 4, représentent les fonctions  $G^2(v, f, \Delta t, N)$  définies par (11, 15, 16) pour  $N = 5, 10$  et  $15$  et les valeurs suivantes du produit  $f\Delta t$ :  $0,25, 0,05$  et  $0,45$  ( $f$  et  $\Delta t$  n'interviennent que par leur produit).

### C)- Discussion

Nous obtenons une bonne élimination des fréquences inférieures à  $f$  avec  $N = 15$ , mais nous avons encore des oscillations relativement importantes pour  $v > f$ , surtout lorsque  $f\Delta t$  est petit. Ceci correspond au fait que lorsque  $f\Delta t \rightarrow 0$ , on a ( $A_0 \rightarrow 1$  et  $A_n \rightarrow 0$  pour  $n \neq 0$ ):

$$(17) \quad y(t) \rightarrow x(t) - \frac{1}{2N+1} [x(t) + \dots + x(t + N\Delta t) + \dots + x(t - N\Delta t)]$$

En d'autres termes, à la limite, nous obtenons un traitement équivalent à celui qui donne  $\hat{\sigma}_2$ ; ce dernier est donc optimal (dans le cadre fixé ici) lorsqu'on veut éliminer seulement la fréquence  $v = 0$ .

En remarquant que la valeur de  $I$ , définie par (14), donne une idée de la précision avec laquelle nous approximations  $G_A(v, f)$ , il est intéressant de cher-

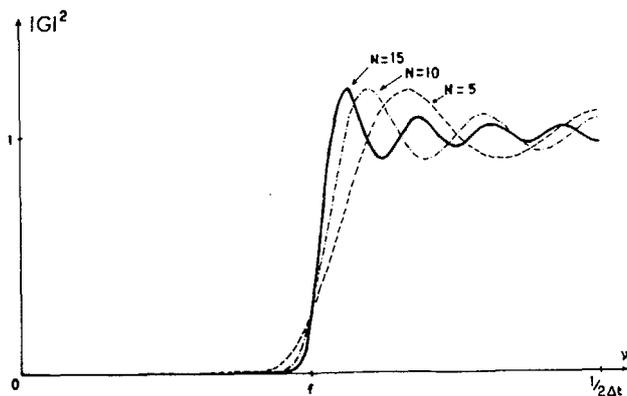


FIGURE 2.

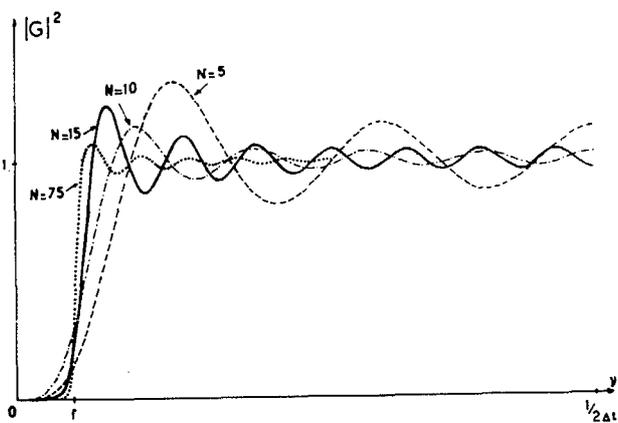


FIGURE 3.

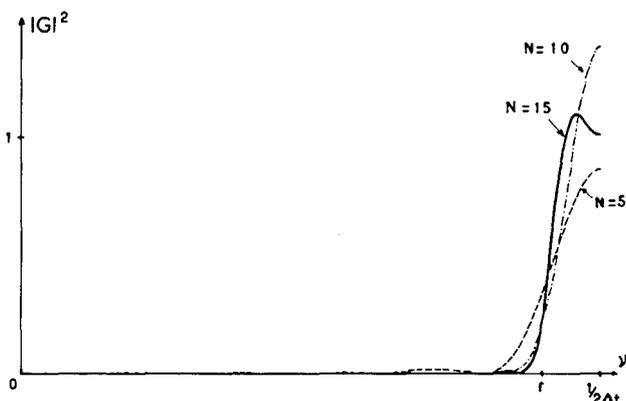


FIGURE 4.

cher à majorer I. Avec les  $R_n$  obtenus ici, on peut écrire

$$(18) \quad I = \frac{2}{\Delta t} \left[ \frac{2}{2N+1} \left( \sum_{n=N+1}^{\infty} A_n \right)^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} A_n^2 \right]$$

Si  $N > \frac{1}{2f\Delta t}$  (c'est-à-dire si les  $A_n$  utilisés comprennent tous ceux du 1er lobe de l'enveloppe en  $-2f\Delta t$ ,  $\frac{\sin x}{x}$  ( $n \neq 0$ ) avec  $x = n\pi f\Delta t$ ), on peut majorer

$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} A_n \right|$  par  $\frac{1}{(N+1)\pi 2f\Delta t}$  (où  $\frac{1}{2f\Delta t}$  est le nombre de termes par lobe) et  $\sum_{n=N+1}^{\infty} A_n^2$  par  $\frac{1}{\pi^2 N}$ , d'où

$$(19) \quad I < \frac{1}{\pi^2 \Delta t} \left\{ \frac{1}{(2N+1) [(N+1) f\Delta t]^2} + \frac{2}{N} \right\}$$

Si  $Nf\Delta t$  est nettement plus grand que 1, le premier terme est négligeable et on obtient  $I < 2/\pi^2 N\Delta t \approx 4/\pi^2 T$ . Pour obtenir une précision en  $\frac{1}{N}$ , il est donc important que  $Nf\Delta t$  soit plus grand que 1 (cf dans le cas continu [6] la condition  $fT > 0,7$ ) et ceci permet de comprendre pourquoi la précision est médiocre dans le cas de  $|G_2|^2$  qui correspond à la limite  $f\Delta t = 0$ .

Dans le cas  $f\Delta t = 0,05$  (figure 3) cette condition donne  $N > 20$ ; c'est pourquoi nous avons ajouté la courbe  $N = 75$  (qui donne  $Nf\Delta t = 15 \times 0,25$  comme dans le cas  $N = 15$  de la figure 2). La précision est nettement plus satisfaisante.

Le traitement que nous avons obtenu peut aussi servir pour faire de l'analyse spectrale; en effet (en faisant varier  $f$ )  $S(f, \Delta t, p)$  défini par (12) donne une approximation de

$$(20) \quad S_A(f) = 2 \int_f^{1/2\Delta t} \gamma(\nu) d\nu$$

dont la dérivée est  $-2\gamma(f)$ . On obtiendra donc une estimation de  $\gamma(f)$  et non de  $\gamma_x(f)$ , mais cette dernière peut s'en déduire facilement si on a fait une étude préalable de  $\gamma_x(\nu)$  pour  $\nu > \frac{1}{2\Delta t}$  (par les méthodes continues qui descendent facilement jusqu'à 100 Hz, ce qui correspond à  $\Delta t = 5$  ms).

### III - ESTIMATION DE LA DENSITE SPECTRALE

Si le traitement précédent est très bien adapté à la définition d'une variance caractérisant la stabilité à court terme, pour l'analyse spectrale, une estimation plus directe paraît préférable.

#### A) - Principe de la méthode

Soit un filtre très sélectif autour d'une fréquence  $f$ , c.a.d. tel que  $|G(\nu)|$  n'ait une valeur notablement différente de 0 que dans un voisinage étroit autour de  $f$ . Supposons que  $\gamma(\nu)$  varie peu autour de  $f$ ; le filtre permet alors une estimation de  $\gamma(f)$ . En effet si  $Y_n$  est le processus filtré

$$(21) \quad E\{Y_n^2\} = \int_{-1/2\Delta t}^{1/2\Delta t} \gamma(\nu) |G(\nu)|^2 d\nu = \gamma(f) \int_{-1/2\Delta t}^{1/2\Delta t} |G(\nu)|^2 d\nu$$

Pour un nombre  $P$  de coefficients donné, nous allons donc rechercher, dans un premier temps, un filtre numérique  $\{R_n\}$ ,  $n \in [0, P-1]$ , "le plus sélectif" et respectant la condition :

C)- Deuxième critère

La critique essentielle que l'on puisse faire au critère précédent est que la phase du gabarit intervient dans la recherche du minimum, alors que seul le module présente un intérêt pour l'analyse spectrale. On a arbitrairement imposé une phase nulle (en recherchant les coefficients  $R_n$  pour  $n \in [-N, N]$ ; mais on aurait pu imposer une phase linéaire ( $n \in [0, 2N]$ ), ou toute autre phase (par exemple filtre à déphasage minimal...)

Pour nous affranchir de cet arbitraire, qui influe sur les résultats, nous avons envisagé un second critère pour lequel l'intégrale  $I$  est définie par :

$$(29) \quad I = \int_{-1/2\Delta t}^{1/2\Delta t} [|G(v)| - \rho(v)]^2 dv$$

$\rho(v)$  étant le module du filtre que l'on cherche à approcher, toujours sous la contrainte (22).

La résolution de ce problème peut se concevoir de deux façons différentes, soit par des méthodes non linéaires, soit par une méthode itérative linéaire à chaque pas (cf [8] et [9]). C'est cette seconde méthode que nous avons retenue.

La solution trouvée n'est pas unique (la convergence de l'algorithme dépend du point de départ choisi). Il semble que à partir d'une phase linéaire on obtient la même solution qu'avec le 1er critère (correspondant à une phase nulle). Remarquons que cette solution ne correspond peut-être pas au minimum-minimum de  $I$ .

D)- Troisième critère

Le troisième critère est encore un critère intégral respectant la condition (22). La quantité à minimiser est définie par

$$(30) \quad I = \int_{-1/2\Delta t}^{1/2\Delta t} f(v) |G(v)|^2 dv$$

dans laquelle  $f(v)$  est une fonction de poids positive paire, minimale pour  $v = f$ , décroissante sur  $[0, f]$ , croissante sur  $[f, \frac{1}{2\Delta t}]$ . S'appuyant sur la remarque faite au paragraphe B au sujet de la translation en fréquence du filtre optimal, nous avons recherché le filtre passe-bas ( $f = 0$ ) optimal correspondant à la fonction  $f(v) = \sin^2 \pi v \Delta t$ . L'ensemble des équations (22) et (30) est équivalent au système :

$$(31) \quad \begin{cases} \sum_0^{p-1} R_n^2 = \Delta t \\ I = \sum_0^{p-1} \sum_0^{p-1} R_n R_m A_{n,m} \end{cases}$$

avec

$$A_{n,m} = \int_{-1/2\Delta t}^{1/2\Delta t} \sin^2 \pi v \Delta t e^{-2\pi i v (n-m) \Delta t} dv$$

$$= \frac{1}{4\Delta t} [2 \delta_{n,m} - \delta_{n,m+1} - \delta_{n+1,m}]$$

où  $\delta_{i,j}$  est le symbole de Kronecker.

Appelons  $\mathcal{R}$  le vecteur de composantes  $\{R_n\}$ ; le système (31) s'écrit sous forme matricielle.

$$(32) \quad \begin{cases} \mathcal{R}^T \mathcal{R} = \Delta t \\ I = \mathcal{R}^T \mathcal{A} \mathcal{R} \end{cases}$$

$\mathcal{A}$  étant une matrice de Toeplitz (matrice définie positive, dont les éléments  $a_{i,j}$  ne sont fonction que du module de la différence  $|i-j|$ ). Le vecteur  $\mathcal{R}$  minimisant  $I$  et respectant (22) est le vecteur de norme  $\Delta t$ , transformé du vecteur propre associé à la plus petite valeur propre de  $\mathcal{A}$ . Il est facile de vérifier que les valeurs propres de la matrice  $\mathcal{A}$  sont données par

$$(33) \quad \lambda_k = 2 (1 - \cos \frac{\pi k}{p+1})$$

et que les vecteurs propres associés sont

$$\mathcal{R}^{(k)T} = \{ \rho \sin \frac{nk\pi}{p+1} \} \quad n \in [1, p]$$

Les coefficients  $R_n$  du filtre optimal sont donc donnés par

$$(34) \quad R_n = \rho \sin \frac{\pi(n+1)}{p+1} \quad n \in [0, p-1]$$

$\rho$  étant défini par

$$(35) \quad \rho^{-1} = \sqrt{\frac{1}{\Delta t} \sum_0^{p-1} \sin^2 \frac{\pi(n+1)}{p+1}}$$

Le tracé des courbes  $|G(v)|^2$  nous a permis de mettre en évidence que le gain du filtre optimal défini avec ce troisième critère était très voisin du filtre optimal trouvé avec le critère des moindres carrés.

E)- Conclusion

On peut citer d'autres filtres rencontrés dans la littérature ([7], [10]). Tous ont des propriétés spectrales très voisines. Il ne semble pas que le choix de critères plus complexes puisse amener une très nette amélioration. Si on obtient un pic principal plus étroit (à  $N$  donné), il apparaît des lobes secondaires plus importants et inversement.

Nous avons donc retenu le critère des moindres carrés pour étudier l'influence des contraintes supplémentaires imposées par les divergences de certains spectres lorsque  $v$  tend vers zéro.



$$(22) \int_{-1/2\Delta t}^{1/2\Delta t} \left| \sum_n R_n e^{-2\pi i \nu n \Delta t} \right|^2 d\nu = 1$$

Nous traduirons la sélectivité du filtre à l'aide de plusieurs critères d'optimisation successifs que nous comparerons. Nous reprendrons ensuite le problème des contraintes supplémentaires liées à l'élimination des basses fréquences.

B)- 1er critère de sélectivité

Comme au paragraphe II, c'est le critère des moindres carrés, la condition (22) remplaçant la condition  $G(0) = 0$  et le gabarit  $G_B$  étant la fonction paire définie par

$$(23) G_B(\nu, f, \Delta f) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\Delta f}} & \text{si } \nu \in [f - \frac{\Delta f}{2}, f + \frac{\Delta f}{2}] \\ 0 & \text{si } \nu \in [0, f - \frac{\Delta f}{2}] \cup [f + \frac{\Delta f}{2}, \frac{1}{2\Delta t}] \end{cases}$$

Un calcul analogue à celui du paragraphe (II-B) nous donne l'expression des  $R_n$  cherchés, qu'on peut écrire :

$$(24) R_n = \frac{r_n}{\sqrt{\frac{1}{\Delta t} \sum_n r_n^2}} \quad n \in [-N, N]$$

avec

$$(25) r_n = \begin{cases} \frac{1}{n} \cos 2\pi n f \Delta t \sin \pi n \Delta f \Delta t & \text{si } n \neq 0 \\ \pi \Delta f \Delta t & \text{pour } n = 0 \end{cases}$$

Soit  $\alpha$  le coefficient de normalisation défini par

$$(26) \alpha^{-1} = \sqrt{\frac{1}{\Delta t} \sum_n r_n^2}$$

Remarquons qu'à ce coefficient  $\alpha$  près, le filtre optimal trouvé se déduit du filtre passe-bas correspondant  $G_{pB}$  par la relation

$$(27) G(\nu) \sim G_{pB}(\nu - f) + G_{pB}(\nu + f)$$

Nous n'avons donc tracé les courbes de gain  $|G(\nu)|^2$  que pour une seule valeur de  $f$  ( $f \cdot \Delta t = 0,2$ ). Par ailleurs, nous avons utilisé systématiquement la variable réduite  $\nu \cdot \Delta t$ .

La figure 5 donne l'évolution de  $|G(\nu)|^2$  pour  $N$  fixé ( $N = 15$ ) en fonction de  $\Delta f$ .

En étudiant les variations de  $I$ , définie par (14), en fonction de  $\Delta f$ , nous avons obtenu deux plages de variations nettement différenciées : pour  $(N+1) \Delta f \Delta t < 1$  la courbe  $I(\Delta f)$  décroît très rapidement, alors que pour  $(N+1) \Delta f \Delta t > 1$ , ses variations sont beaucoup moins accentuées. Comme par ailleurs nous cherchons à obtenir le  $\Delta f$  le plus faible possible, nous avons rete-

nu comme optimale la valeur de  $\Delta f$  fournie par la relation

$$(28) (N+1) \Delta f \Delta t = 1$$

La figure 6 donne alors l'évolution de  $|G(\nu)|^2$  pour ce  $\Delta f$  optimal en fonction de  $N$ .

Remarque 1) : la largeur du pic (donc le "pouvoir de résolution" du filtre) variera comme  $1/N+1$

Remarque 2) : Si dans la relation (25) on impose  $f \Delta t = \frac{1}{2}$  et  $\Delta f \rightarrow 0$ , on retrouve la variance de Hadamard [7].

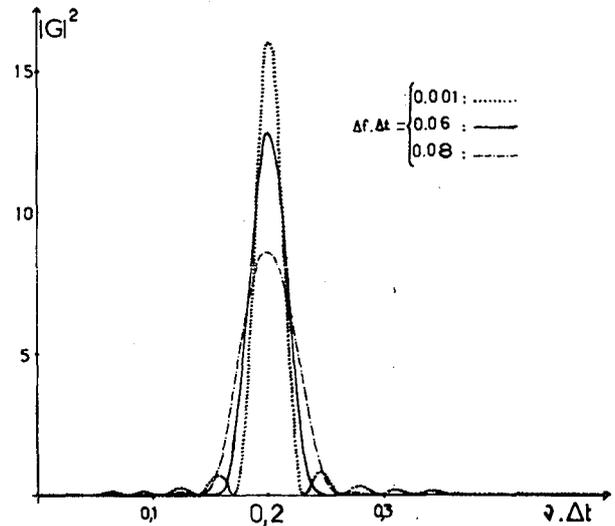


FIGURE 5.

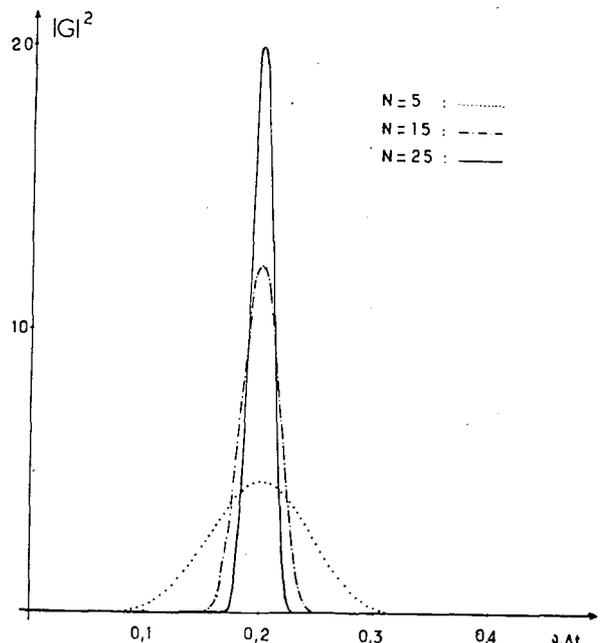


FIGURE 6.



IV - ANALYSE SPECTRALE DE PROCESSUS SINGULIERS AUX TRES BASSES FREQUENCES

Si le spectre du processus étudié semble diverger pour  $\nu \rightarrow 0$ , comme  $|\nu|^{-\alpha}$ , il faut que  $|G(\nu)|^2$  ait un comportement au voisinage de l'origine en  $|\nu|^\beta$  avec

$$(36) \quad \beta \gg \alpha - 1.$$

En effet pour que l'estimation de  $\gamma(f)$  fournie par (21) soit satisfaisante, il faut que la contribution à l'intégrale (21) des très basses fréquences soit négligeable devant celle des fréquences voisines de  $f$ . Nous avons donc repris le problème d'optimisation en imposant la condition supplémentaire :

$$(37) \quad G(0) = 0 \quad \sum_n R_n = 0.$$

Comme nous l'avons fait remarquer au paragraphe (II,B) la parité de la fonction  $G(\nu)$  implique les relations :

$$(38) \quad \frac{d^{2k+1} G}{d\nu^{2k+1}} \Big|_{\nu=0} = 0 \quad k \text{ entier}$$

La relation (37) entraîne donc que la fonction  $|G(\nu)|^2$  se comporte comme  $\nu^4$  au voisinage de 0.

Il est facile de généraliser la méthode pour obtenir un comportement de  $|G(\nu)|^2$  en  $\nu^{4k}$ , il suffit de résoudre le problème d'optimisation en tenant compte du système des contraintes supplémentaires :

$$(39) \quad \begin{cases} \sum_{-N}^N R_n = 0 \\ \sum_{-N}^N n^2 R_n = 0 \\ \vdots \\ \sum_{-N}^N n^{2k} R_n = 0 \end{cases}$$

La méthode des multiplications de Lagrange, conduit à la solution suivante (cf [5])

$$(40) \quad R_n = \alpha(r_n + \lambda_0 + \lambda_1 n^2 + \dots + \lambda_k n^{2k})$$

dans laquelle

$r_n$  est le  $n^{\text{ième}}$  coefficient du développement de Fourier du gabarit  $G_B$

$\alpha$  est déterminé par la condition (22)

Les  $\lambda_k$  sont solutions du système linéaire :

$$(41) \quad \begin{cases} \sigma_0 \lambda_0 + \sigma_1 \lambda_1 + \dots + \sigma_k \lambda_k = - \sum_{-N}^N r_n \\ \sigma_1 \lambda_0 + \sigma_2 \lambda_1 + \dots + \sigma_{k+1} \lambda_k = - \sum_{-N}^N r_n n^2 \\ \sigma_k \lambda_0 + \sigma_{k+1} \lambda_1 + \dots + \sigma_{2k} \lambda_k = - \sum_{-N}^N r_n n^{2k} \end{cases}$$

$$\text{avec (42) } \sigma_j = \sum_{-N}^N n^{2j} \quad j \in \{0, \dots, 2k\}$$

Nous avons calculé les  $R_n$  pour  $N$  donné ( $N = 15$ ) dans les 3 cas suivants :

- $G(0)$  quelconque (courbes du paragraphe III)
- $G(0) = 0$
- $G(0) = 0$  et  $G''(0) = 0$ .

Dans chacun des cas nous avons fait varier la fréquence d'analyse normalisée ( $f \Delta t$ ).

La figure 7 donne les trois courbes pour  $f \Delta t = 0,05$

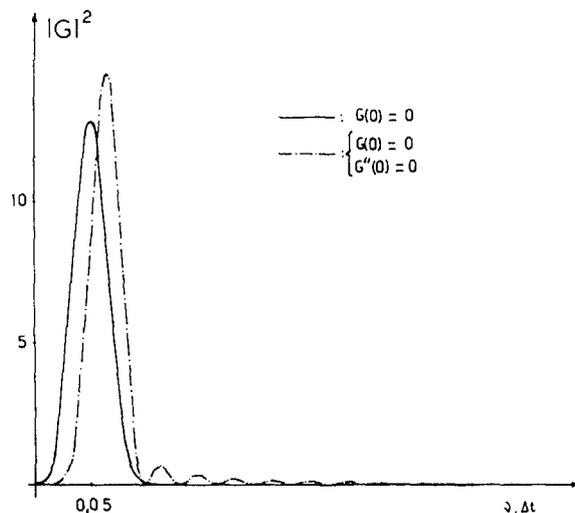


FIGURE 7.

L'étude des diverses courbes obtenues nous a permis de dégager les conclusions suivantes :

- Pour une valeur de  $f$  grande devant  $\frac{1}{N \Delta t}$ , les contraintes supplémentaires perturbent peu l'allure générale de la courbe. Pratiquement seules les valeurs de  $|G(\nu)|^2$  pour  $\nu$  voisin de 0 sont modifiées.

- Par contre, si l'on cherche un optimum correspondant à une valeur de  $f$  nettement plus faible, pour les valeurs de  $\nu$  supérieures à  $f$  l'aspect de la courbe



est identique à celui obtenu figure 5 pour un  $\Delta f$  trop petit. (oscillations secondaires).

Comme l'on pouvait le prévoir, la conséquence essentielle des conditions supplémentaires est donc l'apparition d'un seuil en fréquence, d'autant plus grand que les conditions sont plus nombreuses.

La seule possibilité pour pouvoir faire une analyse à des fréquences inférieures à ce seuil (pour un  $\Delta t$  donné) est alors d'augmenter le nombre des mesures  $N$ .

-----  
REFERENCES

- [1] D.W. ALLAN : Proceeding of the I.E.E.E. 54, p. 221 (1966). Statistics of Atomic Frequency Standards.
- [2] E. BOILEAU : Thèse de Doctorat - Orsay 1970. Etude des propriétés statistiques d'un laser mono-mode.
- [3] E. BOILEAU, J.M. BATTIFOL, H. CLERGEOT et B. PICINBONO : Etude des fluctuations de fréquence de lasers mono modes. Revue de Physique Appliquée 6, p. 23, (1971).  
  
E. BOILEAU et B. PICINBONO : Statistical study of phase fluctuations and oscillators stability. Soumis pour publication aux IEEE, Trans. on I.M.
- [4] B. PICINBONO : Processus de diffusion et stationnarité - Application au bruit des oscillateurs. C.R.A.S. 217, p. 661, (1970).  
  
B. PICINBONO : Statistical Properties of Randomly Modulated Laser Beams. Phys. Rev. 4-A, p. 2398, (1971).
- [5] J.C. RADIX : Introduction au filtrage numérique. Eyrolles, (1970).
- [6] E. BOILEAU : Essai d'optimisation dans l'étude des fluctuations à court terme d'un processus ayant des dérives importantes. Soumis pour publication aux Ann. Télécomm.
- [7] G. SAUVAGE et J. RUTMAN : Analyse spectrale du bruit de fréquence des oscillateurs par la variance de Hadamard. Ann. Télécomm. 28, n° 7-8, (1973).
- 8 VINCENT-CARREFOUR et Al. : Synthèse d'un filtre numérique transversal défini dans le plan complexe. Ann. Télécomm. 28, n° 7-8, (1973).
- 9 J. POUGET et A. VINCENT CARREFOUR : Méthode itérative pour la résolution du problème posé par la synthèse d'un filtre numérique transversal dans le domaine des fréquences. GPETSI, 1973, Nice Tome II, p. 1449-1459.
- 10 P. LESAGE : Caractérisation de la stabilité de fréquence d'oscillateurs dans le domaine temps et dans le domaine fréquence. Thèse de 3ème Cycle, Orsay, Juillet 1973.