

COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 16 au 21 JUIN 75



MODELES STATISTIQUES "BIDIMENSIONNELS" ET APPLICATION AU TRAITEMENT
NUMERIQUE DES IMAGES.

J.F. ABRAMATIC, S. ATTASI, J.P. CHIEZE, N. CURIEN.

IRIA-LABORIA, Domaine de Voluceau-Rocquencourt, 78150 LE CHESNAY, FRANCE.

RESUME

On présente ici les résultats de travaux réalisés au LABORIA et dont le but est d'étendre au traitement des images, les méthodes maintenant classiques de filtrage statistique récursif (du type KALMAN) des suites temporelles.

Ces travaux conduisent à la définition de modèles statistiques récurrents à deux indices, qui présentent les propriétés suivantes :

- Approximer une très large classe de suites à deux indices, à savoir toutes celles qui peuvent être obtenues par des transformations linéaires (non nécessairement causales) sur des bruits blancs.
- Etre "identifiable" à savoir que des algorithmes algébriques fournissent à partir de la fonction de corrélation estimée d'une image, les paramètres du modèle statistique correspondant.

D'autre part l'application des outils de l'estimation aux moindres carrés a permis d'obtenir des algorithmes optimaux récursifs de filtrage et de lissage d'images admettant de tels modèles en présence de bruit blanc additif. Un algorithme sous-optimal simple a également été développé. Une mise en oeuvre expérimentale de ces techniques est actuellement en cours, au Laboratoire de calcul hybride du LABORIA, et les premiers résultats expérimentaux sont brièvement exposés.

SUMMARY

This paper presents the work done at LABORIA in order to extend to image processing, the classical KALMAN filtering techniques of stationary gaussian time series.

This work leads to the definition of recurrent statistical models with the following properties :

- They approximate a very large class of double indexed sequences, i.e. all those which can be obtained by linear transformations (not necessarily causal) on white noise.
- They are "identifiable" i.e. algebraic algorithms yield, starting from the estimated correlation function of an image, the parameters of the corresponding statistical model.

Moreover, the application of least squares estimation tools has allowed us to obtain recursive optimal algorithms for image filtering and smoothing, in the presence of additive white noise. A very simple sub-optimal algorithm with promising results has also been developed.

An experimental implementation of these techniques is going on at the Hybrid Computing Laboratory of LABORIA and the primary results are briefly presented.

I - LA MODELISATION STATISTIQUE DES IMAGES

La modélisation statistique d'une image consiste à considérer celle-ci comme un échantillon d'une suite aléatoire gaussienne à deux indices. Celle proposée dans [ATTASI] associe à un ensemble d'images admettant la même fonction d'autocorrélation Λ , $\Lambda(\dots)$, des modèles, s'ils existent, de la forme :

$$(1.1) \quad \begin{cases} y_{i,j} = H x_{i,j} \\ x_{i,j} = F_1 x_{i-1,j} + F_2 x_{i,j-1} - F_1 F_2 x_{i-1,j-1} + v_{i-1,j-1} \end{cases}$$

où :

* $\{v_{i,j}\}$ est une suite de variables indépendantes (bruit blanc) à valeurs dans \mathbb{R}^n , de covariance $Q = LL'$ (L' transposée de la matrice L).

* H, F_1, F_2 sont des matrices de dimensions appropriées. De plus F_1 et F_2 commutent et ont toutes leurs valeurs propres à l'intérieur du cercle unité.

I.1. Généralité de ces modèles.

Sur le plan théorique la généralité de ces modèles découle du théorème suivant démontré dans [ATTASI].

Théorème 1 :

Toute suite $\{y_{i,j}\}$ pouvant s'écrire sous la forme :

$$(1.2) \quad y_{i,j} = \sum_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2} \beta_{k,l} v_{i-k,j-l}$$

peut être approchée par des suites $\{y_{i,j}^{(N)}\}$ admettant un modèle du type (1.1), tel que l'on ait :

$$(1.3) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} E[(y_{i,j}^{(N)} - y_{i,j})^2] = 0,$$

+ La fonction d'autocorrélation d'une suite gaussienne "homogène" à deux indices $\{y_{i,j}\}$, est définie par :

$$\Lambda(k,l) \triangleq E[y_{i+k,j+l} y_{i,j}].$$

$$(1.4) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2} |E[y_{i+k,j+l}^{(N)} y_{i,j}^{(N)}] - E[y_{i+k,j+l}^{(N)}] E[y_{i,j}^{(N)}]| = 0.$$

Dans la mesure où l'on s'intéresse au filtrage linéaire, les suites de la forme (1.2) semblent bien être les suites les plus générales que l'on puisse considérer.

Sur le plan pratique, il est souvent admis (HABIBI, HORST, SCHOUTE) que l'on peut approcher en première approximation la fonction de corrélation $\Lambda(\dots)$ d'une image par :

$$\Lambda(i,j) \approx \Lambda(0,0) \alpha^{|i|} \beta^{|j|}.$$

On obtient alors des modèles du type (1) particulièrement simples car les matrices F_1 et F_2 se réduisent aux scalaires α et β .

I. 2. Propriétés statistiques de ces modèles.

Le calcul donne, pour la fonction de corrélation $\Lambda(\dots)$ d'une suite $\{y_{i,j}\}$ admettant le modèle (1) :

$$(1.5) \quad \begin{cases} \Lambda(i,j) = H F_1^i F_2^j P H' & \forall i \geq 0, j \geq 0 \\ \Lambda(i,-j) = H F_1^i P F_2^{-j} H' \\ \Lambda(-i,-j) = \Lambda(i,j) \end{cases} \quad \forall (i,j) \in \mathbb{Z}^2$$

où la matrice :

$$(1.6) \quad P = E[x_{i,j} x_{i,j}']$$

est donnée par :

$$(1.7) \quad P - F_1 P F_1' - F_2 P F_2' + F_1 F_2 P F_1' F_2' = Q = LL' \geq 0$$

ou de manière équivalente :

$$(1.8) \quad P = \sum_{\substack{i \geq 0 \\ j \geq 0}} F_1^i F_2^j Q F_1^i F_2^j.$$

Le problème très important en pratique de la modélisation statistique peut alors s'énoncer ainsi : étant donné une suite $\{y_{i,j}\}$ et sa fonction de corrélation $\Lambda(\dots)$ estimée, trouver les matrices H, F_1, F_2, Q solution des équations (1.5) et (1.7). Le théorème suivant rassemble les résultats démontrés à ce propos dans [ATTASI].



Théorème 2 :

i) Parmi les modèles (s'il en existe) du type (1.1) que l'on peut associer à une image $\{y_{i,j}\}$ ou à sa fonction de corrélation $\Lambda(\dots)$, il en existe un de dimension minimale (matrices F_1 et F_2 de dimensions minimales) unique à un changement de base près transformant le quadruplet (H, F_1, F_2, Q) en $(HT^{-1}, TF_1T^{-1}, TF_2T^{-1}, TQT')$ où T est la matrice de changement de base.

ii) A partir de la fonction $\Lambda(\dots)$, on peut trouver l'un des quadruplets (H, F_1, F_2, Q) de dimension minimale, en deux étapes :

a) Déterminer un quadruplet (H, F_1, F_2, G) de dimension minimale (lequel est défini à un changement de base près), vérifiant :

$$(1.9) \quad \forall i \geq 0, \forall j \geq 0 \quad \Lambda(i, j) = H F_1^i F_2^j G$$

b) Déterminer une matrice Q unique donnée par :

$$(1.10) \quad \forall i \geq 0, \forall j \geq 0 \quad \Lambda(i, -j) = H F_1^i P F_2^j H'$$

$$G = P H'$$

$$P - F_1 P F_1' - F_2 P F_2' + F_1 F_2 P F_1' F_2' = Q \geq 0$$

On verra au paragraphe IV comment ce théorème peut être exploité en pratique pour définir des algorithmes numériques de modélisation statistique.

II - ALGORITHMES DE FILTRAGE ET DE LISSAGE LIGNE PAR LIGNE

I.1. Formulation du problème.

Une image $\{z_{i,j}\}^\dagger$ admettant un modèle de la forme (1.1), est supposée bruitée par un bruit blanc additif $\{w_{i,j}\}$, indépendant de $\{z_{i,j}\}$. Disposant de mesures $\{y_{i,j} = z_{i,j} + w_{i,j}\}$, on cherche une estimée de l'image initiale.

Le modèle s'écrit :

$$x_{i,j} = F_1 x_{i-1,j} + F_2 x_{i,j-1} - F_1 F_2 x_{i-1,j-1} + v_{i-1,j-1}$$

$$y_{i,j} = H x_{i,j} + w_{i,j}$$

+ L'image est supposée discrétisée en N lignes ($0 \leq i \leq N$) constituée chacune d'un très grand nombre de points ($j \in Z$).

$$E[v_{i+k,j+1} v_{i,j}'] = Q \delta_{k,l} ; E[w_{i+k,j+1} w_{i,j}'] = R \delta_{k,l}$$

Les problèmes traités s'énoncent :

i) déterminer l'estimée $\hat{z}_{i,j}$ (filtrage ligne par ligne) définie par

$$\hat{z}_{i,j} = E[z_{i,j}/y_{k,l}, 0 \leq k \leq i, l \in Z]$$

$$= H E[x_{i,j}/y_{k,l}, 0 \leq k \leq i ; l \in Z]$$

ii) déterminer l'estimée $\hat{\tilde{z}}_{i,j}$ (lissage) définie par

$$\hat{\tilde{z}}_{i,j} = E[z_{i,j}/y_{k,l}, 0 \leq k \leq N ; l \in Z]$$

$$= H E[x_{i,j}/y_{k,l}, 0 \leq k \leq N ; l \in Z]$$

Les paramètres statistiques H, F_1, F_2, Q, R peuvent être calculés d'une manière analogue à celle du théorème 2 à partir de la fonction d'autocorrélation de $\{y_{i,j}\}$ [ATTASI].

II.2. Filtrage récursif ligne par ligne.

On notera $\hat{x}_{i,j} = E[x_{i,j}/y_{k,l}, 0 \leq k \leq i, l \in Z]$

$$\check{x}_{i,j} = E[x_{i,j}/y_{k,l}, 0 \leq k < i, l \in Z]$$

Théorème 3 :

$$\hat{x}_{i,j} = \check{x}_{i,j} + \hat{\tilde{x}}_{i,j}$$

$$\check{x}_{i+1,j} = F_1 \hat{x}_{i,j}$$

où $\hat{\tilde{x}}_{i,j}$ est l'estimée au sens du lissage à un indice, sur la ligne i , de l'erreur $\check{x}_{i,j} = x_{i,j} - \hat{x}_{i,j}$, conditionnellement à l'innovation $\{I_{i,k} ; k \in Z\}$ où

$$I_{i,k} = y_{i,k} - H \check{x}_{i,k} = H \check{x}_{i,k} + w_{i,k} .$$

La résolution des problèmes de lissage à un indice nécessite la connaissance des statistiques des suites $\{\check{x}_{i,k} ; k \in Z\}$. Celles-ci sont obtenues grâce au théorème 4.

Théorème 4 :

Les spectres $S_i(z)$ définis par

$$S_i(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \Lambda_i(k) z^{-k} \quad |z| = 1$$

où $\Lambda_i(k) = E[\check{x}_{i,j+k} \check{x}_{i,j}']$

se déduisent par récurrence grâce à l'équation de Riccati :

$$(2.1) \quad S_{i+1}(z) = F_1 (S_i(z) - S_i(z) H' (H S_i(z) H' + R)^{-1} H S_i(z)) F_1' + Q(z)$$



$$\text{avec } S_0(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \Lambda_0(k) z^{-k}$$

$$Q(z) = S_0(z) - F_1 S_0(z) F_1'$$

$$P_{1+1,\infty} = F_{\infty} P_{1,\infty} F_{\infty}' + (F_{\infty} G_{\infty} H' - F_{\infty} P_{1,\infty} H' H')$$

$$(H H' G_{\infty} H' + R - H H' P_{1,\infty} H' H')^{-1} (F_{\infty} G_{\infty} H' - F_{\infty} P_{1,\infty} H' H')$$

$$P_{0,\infty} = 0$$

II.3. Déroulement de l'algorithme.

Données : $H, F_1, F_2, P, R, \{y_{i,j}\}$.
On utilisera, en fait, les mêmes équations récurrentes pour résoudre chacun des problèmes de lissage à un indice. Ce sont les paramètres statistiques correspondants à la solution limite $S_{\infty}(z)$ de l'équation de Riccati (2.1) qui seront employés. Cela équivaut à considérer que l'image contient un nombre infini de lignes (lissage à horizon infini).

1 - Détermination de la statistique de l'erreur $\{\hat{x}_{\infty,k}; k \in Z\}$.

i) Calcul de $\Lambda_0(k)$:

$$\Lambda_0(k) = F_2^k P \quad k \geq 0$$

$$\Lambda_0(k) = P F_2'^{-k} \quad k < 0$$

ii) Calcul de $S_0(z)$:

$$S_0(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \Lambda_0(k) z^{-k}$$

pour un nombre n de valeurs de z sur le cercle unité, choisi à l'avance. Ce calcul s'effectue à l'aide d'un programme de transformée de Fourier rapide.

iii) Calcul de $S_{\infty}(z)$:

On intègre l'équation de Riccati (2.1) pour chacune des valeurs de z .

iv) Calcul de $\Lambda_{\infty}(k)$

$$\Lambda_{\infty}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(e^{i\theta}) e^{i\theta k} d\theta$$

Ce calcul s'effectue aussi à l'aide d'un programme de transformée de Fourier rapide.

2 - Calcul des paramètres de l'algorithme de lissage à un indice.

i) "Réalisation" de $\Lambda_{\infty}(k)$

Il s'agit d'un algorithme algébrique qui détermine un triplet $(H_{\infty}, F_{\infty}, G_{\infty})$, de dimension minimale tel que $\forall k \geq 0 \quad \Lambda_{\infty}(k) = H_{\infty} F_{\infty}^k G_{\infty}$.

ii) On obtient $P_{*,\infty}$ comme solution limite de l'équation de Riccati :

$$S_{*,\infty} = F_{\infty} G_{\infty} H' - F_{\infty} P_{*,\infty} H' H'$$

$$R_{*,\infty} = H H' G_{\infty} H' + R - H H' P_{*,\infty} H' H'$$

$$F_{*,\infty} = F_{\infty} - S_{*,\infty} R_{*,\infty}^{-1} H H'$$

3 - Après initialisation de l'algorithme de filtrage à $\hat{x}_{0,l} = 0 \quad \forall l \in Z$, à chaque ligne i , on effectue les opérations suivantes :

i) Résolution du problème de lissage à un indice

$$\hat{x}_{i,j} = H_{\infty} \eta_{i,j} + (G_{\infty}' - H_{\infty} P_{*,\infty}) \gamma_{i,j}$$

$$\eta_{i,j} = F_{\infty} \eta_{i,j-1} + S_{*,\infty} R_{*,\infty}^{-1} (I_{i,j-1} - H H_{\infty} \eta_{i,j-1})$$

$$\gamma_{i,j} = F_{*,\infty}' \gamma_{i,j+1} + H_{\infty}' H' R_{*,\infty}^{-1} (I_{i,j} - H H_{\infty} \eta_{i,j})$$

ii) Calcul de $\hat{x}_{i,j}$

$$\hat{x}_{i,j} = x_{i,j} + \hat{x}_{i,j}$$

iii) Passage à la ligne $i+1$

$$\hat{x}_{i+1,j} = F_1 \hat{x}_{i,j}$$

II.4. Lissage.

En suivant la méthode utilisée pour le lissage à un indice, on obtient l'estimée $\hat{x}_{i,j}$ au sens du lissage comme somme de deux filtres

$$\hat{x}_{i,j} = \check{x}_{i,j} + \xi_{i,j}$$

où $\check{x}_{i,j}$ est le prédicteur défini dans II.2.

$\xi_{i,j}$ est la solution du problème de filtrage ligne par ligne "à rebours".

$$\xi_{i,j} = E[\check{x}_{i,j} / I_{k,l}; N \geq k \geq i, l \in Z]$$

Les détails des équations se trouvent dans [ATTASI].

III - FILTRAGE SOUS OPTIMAL

Le filtrage sous optimal utilise un filtre récursif dont la structure très simple (du type Kalman) est imposée a priori et dont les paramètres sont ajustés de façon à minimiser la variance de l'erreur d'estimation. Ce filtre conduit à des algorithmes de traitement plus légers que ceux présentés au II et donc plus aisés à implanter en temps réel sur un petit calculateur.



III.1. Formulation du problème sous optimal.

On se place dans le cas fréquent dans la pratique où la fonction de corrélation $\Lambda(\dots)$ du signal d'image peut être convenablement approchée par une fonction exponentielle. Le modèle est alors de dimension 1 (cf. I.1.) et s'écrit

$$(3.1) \quad \begin{cases} y_{ij} = x_{ij} + w_{ij} \\ (3.2) \quad \begin{cases} x_{ij} = f_1 x_{i-1,j} + f_2 x_{i,j-1} - f_1 f_2 x_{i-1,j-1} \\ + v_{i-1,j-1} \end{cases} \end{cases}$$

- où v_{ij} et w_{ij} sont des bruits blancs gaussiens à valeurs dans R , indépendants, de variances respectives Q et R .
- et $f_1, f_2 \in]-1, 1[$

Définition

Soit \hat{F} (resp \check{F}) l'ensemble des suites $\{\hat{x}_{ij}\}$ (resp $\{\check{x}_{ij}\}$) définies par les relations

$$(3.3) \quad \begin{cases} \hat{x}_{ij} = \check{x}_{ij} + \tau(y_{ij} - \check{x}_{ij}) \\ (3.4) \quad \begin{cases} \check{x}_{ij} = f_1 \check{x}_{i-1,j} + f_2 \check{x}_{i,j-1} - f_1 f_2 \check{x}_{i-1,j-1} \\ + t_1 (y_{i-1,j} - \check{x}_{i-1,j}) + t_2 (y_{i,j-1} - \check{x}_{i,j-1}) \\ + t_3 (y_{i-1,j-1} - \check{x}_{i-1,j-1}) \\ (3.5) \quad t_3 = t_1 t_2 - f_1 t_2 - f_2 t_1 \\ (3.6) \quad |f_1 - t_1| < 1 ; |f_2 - t_2| < 1 ; t_1, t_2 \in R \end{cases} \end{cases}$$

Le filtre (resp le prédicteur) sous optimal est l'élément $\{\hat{x}_{ij}\}^*$ de \hat{F} (resp $\{\check{x}_{ij}\}^*$ de \check{F}) qui réalise la plus petite variance de l'erreur d'estimation soit :

$$(3.7) \quad \tilde{\Lambda}^* = \min_{\substack{\tau, t_1, t_2 \\ |f_1 - t_1| < 1 \\ |f_2 - t_2| < 1}} E[(x_{ij} - \hat{x}_{ij})^2]$$

resp (3.8) $\check{\Lambda}^* = \min_{\substack{t_1, t_2 \\ |f_1 - t_1| < 1 \\ |f_2 - t_2| < 1}} E[(x_{ij} - \check{x}_{ij})^2]$

On remarque que :

- la condition (3.5) est une contrainte de structure supplémentaire qui donne à l'erreur $\{x_{ij} - \check{x}_{ij}\}$ une dynamique simple du type (3.2) permettant un calcul aisé de sa variance sous la forme d'une fraction rationnelle en t_1 et t_2 .
- les conditions (3.6) assurent la stabilité de l'équation dynamique (3.4) ; cette équation traduit une progression "en coin" le "passé" du point (i, j) étant contenu dans 1/4 de plan et non plus au demi plan comme au II.

On démontre enfin que lorsque le bruit d'observation w_{ij} s'évanouit ($R \rightarrow 0$) le filtre (resp le prédicteur) sous optimal tend vers l'espérance conditionnelle $E[x_{ij}/\check{X}_{ij}]$ (resp $E[x_{ij}/Y_{ij}^-]$) avec $Y_{ij}^- = \{y_{kl} ; k \leq i, l \leq j\}$ et $Y_{ij}^- = Y_{i,j}^- \setminus \{y_{ij}\}$

III.2. Résolution du problème.

Théorème 5 :

Le filtre et le prédicteur sous optimaux sont donnés de façon unique par les relations (3.3) et (3.4) où les paramètres τ, t_1, t_2 prennent les valeurs

$$(3.9) \quad \tau^* = \frac{\check{\Lambda}^*}{R + \check{\Lambda}^*}$$

$$(3.10) \quad t_1^*, t_2^* = \arg \check{\Lambda}^*$$

On a de plus

$$(3.11) \quad \check{\Lambda}^* = \frac{R \check{\Lambda}^*}{R + \check{\Lambda}^*}$$

A partir des paramètres du modèle f_1, f_2, Q, R on calcule t_1^* et t_2^* en résolvant le problème de minimisation (3.8) par une méthode itérative. τ^* est donné par (3.9).

Les premiers essais de mise en œuvre expérimentale du filtrage sous optimal sont présentés en IV.

IV. MISE EN ŒUVRE EXPERIMENTALE.

IV.1. Moyens employés.

Un appareil dérivé du bélinographe transforme l'intensité lumineuse en un signal électrique qui est ensuite échantillonné, numérisé et stocké sur bande magnétique par l'intermédiaire d'un ordinateur T2000. La précision relative de la lecture est de l'ordre de 1%. La définition spatiale maximale est d'environ 8 lignes par mm et de 8 points par mm dans une ligne.

Le récepteur correspondant permet de restituer l'image sur papier photographique (avec une définition de 12 lignes par mm).

L'information étant stockée sur bande magnétique, son traitement peut s'effectuer sur le T2000 ou au centre de calcul de l'IRIA (IRIS 80).

IV.2. Description de l'identification stochastique.

i) on estime d'abord, pour $0 \leq i \leq p$ et $-p \leq j \leq p$, la fonction d'autocorrélation $\Lambda(i, j)$ de l'image préalablement échantillonnée $\{y_{kl} ; 0 \leq k < N-1, 0 \leq l \leq N-1\}$ par des moyennes $\bar{y}_{k+l, j} = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} y_{k+i, l+j} \cdot y_{k, l}$



ii) à partir des valeurs de $\Lambda_{i,j}$ pour $0 \leq i \leq p$ et $0 \leq j \leq p$, un algorithme de réalisation à 2 indices, basé sur la notion de factorisation d'une matrice de Hankel généralisée et décrit dans [ATTASI], détermine le quadruplet H, F_1, F_2, G , de dimension minimale satisfaisant les équations (1.9).

iii) la matrice de covariance Q du bruit est calculée comme solution de l'équation (1.7) après détermination de la matrice P solution du problème de moindres carrés

$$\text{Min}_P \left\{ \sum_{i=0}^P \sum_{j=0}^P [\Lambda(i,j) - HF_1^i F_2^j H']^2 + \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^P [\Lambda(i,-j) - HF_2^j F_1^i H']^2 \right\}$$

Tous ces algorithmes ont été implantés en assembleur sur calculateur T2000. Pour des contraintes de temps de calcul et de place mémoire, on n'a traité que des images 128×128 et 256×256 avec des définitions de 8, 4 et 2 points par mm. On s'est également limité à $p=10$.

Le temps de calcul des $\Lambda(i,j)$ est d'environ 6 mn pour $p = 10$ et $N = 128$ (il varie comme $(p+1)(2p+1)N^2$). La durée des deux autres algorithmes ne dépassant pas quelques secondes est négligeable. L'occupation mémoire pour ce même exemple est de l'ordre de 8 K mots. Le critère choisi pour apprécier la validité de l'identification est une mesure de la distance quadratique relative entre la fonction $\Lambda(i,j)$ initiale et la fonction $\hat{\Lambda}(i,j)$ obtenue à partir du modèle par les équations (1.5). Les résultats obtenus jusqu'à présent sont assez encourageants : on obtient, en effet, pour des images prises au hasard, des modèles d'ordre peu élevé qui approximent les $\Lambda(i,j)$ avec une distance "acceptable".

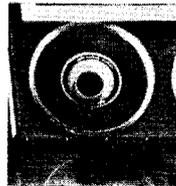
Exemple : (ordre 2)

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1,17 & -0,32 \\ 0,15 & 0,75 \end{bmatrix}$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,21 & 0,96 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0,68 \times 10^{-2} & 0,56 \times 10^{-2} \\ 0,56 \times 10^{-2} & 0,39 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0,1 \times 10^{-2} & 0,59 \times 10^{-2} \\ 0,59 \times 10^{-2} & 0,24 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$



Un 2ème exemple est présenté au §. IV.3.

IV.3. Premiers résultats du filtrage sous optimal.

On réalise une simulation de la transmission du signal d'image sur un canal analogique perturbé par un bruit de variance connue.

Une photographie pour laquelle l'algorithme d'identification décrit en IV.2. a fourni un modèle d'ordre 1 est bruitée par superposition d'un bruit pseudo blanc. L'algorithme (3.3), (3.4) est appliqué à l'image bruitée. Les résultats sont les suivants :

Image originale

$$f_1 = 0,93$$

$$f_2 = 0,97$$

$$P = E[x_{i,j}^2] = 0,021$$



Image bruitée

$$\frac{R}{P} = 1$$



Image filtrée

$$\frac{\hat{\Lambda}^*}{P} = 0,14$$

(rapport théorique)



Avec l'algorithme de filtrage optimal ligne par ligne décrit au II on aurait obtenu $\frac{\hat{\Lambda}}{P} \text{ Optimal} = 0,06$.

Jusqu'à présent l'algorithme de filtrage sous optimal a été utilisé sans aucun traitement complémentaire visant à améliorer la qualité visuelle de l'image filtrée.

IV.4. L'algorithme de filtrage ligne par ligne

Les programmes correspondants sont en cours de mise au point. Des résultats seront présentés lors de la conférence elle-même.



MODELES STATISTIQUES "BIDIMENSIONNELS" ET APPLICATION AU TRAITEMENT
NUMERIQUE DES IMAGES.

V - CONCLUSIONS

Les travaux présentés ici constituent, à notre connaissance, la première approche systématique permettant d'étendre au traitement des images les méthodes statistiques (du type KALMAN) de traitement des suites temporelles.

Le fait [PONCIN, SAKRISON] que le critère des moindres carrés ne coïncide pas nécessairement avec le critère subjectif de la qualité d'une image, a sans doute détourné les théoriciens du signal d'une telle approche systématique, et a incité de nombreux auteurs à développer des algorithmes heuristiques (HABIBI, PRATT, SILVERMAN et POWELL ...).

Nous considérons néanmoins que les algorithmes de traitement aux moindres carrés présentés ci-dessus peuvent constituer l'élément de "débruitage" dans une chaîne complète de traitement d'image comprenant éventuellement des transformations tenant compte d'un modèle de l'oeil, des algorithmes spécifiques d'amélioration de contraste etc ...

REFERENCES :

- S. ATTASI "Modélisation et traitement des suites à deux indices". Thèse de Doctorat d'Etat, Paris VI (Mai 1975).
- A. HABIBI "Two Dimensional Bayesian Estimate of Images" Proc. de IEEE, Vol. 60, N° 7, July 72, p. 878-883.
- M.F. HORST "Digital Image Enhancement". Mathematical F.C. SCHOOTE Instituut Rijksuniversiteit, Groningen, Report TW-141.
- J. PONCIN "Codage de signaux d'image avec réduction du débit binaire". Note du CCETT, DIR/T/4/74.
- W.K. PRATT "Generalized Wiener Filtering Computation Techniques" IEEE Trans. on Computers, Vol. C.21, N° 7, July 1972, p. 636-641.
- D.J. SAKRISON "Properties of the Human Visual System as related to the Encoding of Images, Proc. of NATO Advanced Study Institute at Darlington U.K. (August 74).

L.M. SILVERMAN "Modeling of two Dimensional Covariance Functions with Applications to Image Restoration" IEEE Trans. AC 19, N° 1, Fev. 74, p. 8-13.