

# COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 16 au 21 JUIN 75

---



DECONVOLUTION NUMERIQUE EN TEMPS REEL.

RON SIN Joseph

LABORATOIRE D'AUTOMATIQUE - I.N.S.A., 20 Avenue des Buttes de Coësmes 35031 RENNES Cedex

---

## RESUME

Le problème concerne le calcul numérique, avec quelques périodes de retard, de l'entrée d'un système analogique à partir de la connaissance de la fonction de transfert du système et de sa sortie échantillonnée.

La structure sous forme de filtre numérique est souhaitée pour l'opération de déconvolution. La synthèse de l'algorithme de déconvolution fait appel à la méthode des moindres carrés. Diverses applications sont proposées sur des processus physiques et des manipulations en présence de bruit.

## SUMMARY

The problem is the numerical calculation, with a few periods lag, of the input of an analog system knowing its transfer function and its sampled output. The digital filtering structure is aimed at operating a deconvolution.

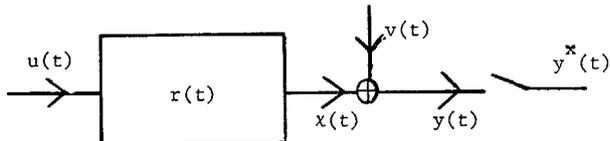
The synthesis of the algorithm uses a least square error method. Diverse applications to physical processes are offered, as well as to manipulations in the presence of noise.

INTRODUCTION

Toute transmission, toute mesure effectuées à travers un système linéaire donnent comme résultat la convolution de l'entrée de ce système avec sa réponse impulsionnelle. D'autre part la connaissance de la sortie se trouve très souvent, comme toute mesure, entachée d'erreurs. La déconvolution consiste en la restauration de la grandeur d'entrée à partir de mesures sur la sortie et de la connaissance du système. La déconvolution sera "numérique" si elle s'opère sur des grandeurs discrétisées dans le temps, "temps réel" si la reconstitution de l'entrée se fait en ligne avec quelques périodes de retard par rapport à la connaissance de la sortie.

EXPOSE DU PROBLEME

On considère le schéma suivant :



dans lequel :

- v(t) est un bruit blanc aléatoire gaussien stationnaire et centré.
- r(t) est déterministe et connu. Il représente la réponse impulsionnelle du système.
- u(t) est déterministe mais inconnu.
- y\*(t) est la grandeur mesurée en sortie par échantillonnage.

Le problème consiste à l'instant j, à obtenir u(j - l), avec "l" ∈ {0, ..., n}, à partir de l'ensemble d'observations : y(j - n), ..., y(j), "n" étant donc la longueur de la fenêtre d'observation. La déconvolution s'opère ainsi avec "l" périodes de retard.

SOLUTION

La relation liant l'entrée et la sortie s'écrit :

$$y(t) = \int_0^t r(\tau) u(t - \tau) d\tau + v(t)$$

ou, sous forme discrète, si l'on considère l'entrée constante entre les instants d'échantillonnage,

$$y(k) = (h * u)(k) + v(k)$$

h étant la séquence de pondération du système pour une période d'échantillonnage T :

$$h(i) = \int_{(i-1)T}^{iT} r(\tau) d\tau$$

Le vecteur d'observation peut se mettre sous la forme :

$$\begin{pmatrix} y(j) \\ y(j-1) \\ \vdots \\ y(j-n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(0), h(1), \dots, h(m), 0, \dots, 0 \\ 0, h(0), \dots, h(m) \\ \vdots \\ 0, \dots, h(0), \dots, h(m), 0 \\ \vdots \\ 0, \dots, 0, \dots, h(0), \dots, h(m), 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(j) \\ u(j-1) \\ \vdots \\ u(j-n-m) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v(j) \\ v(j-1) \\ \vdots \\ v(j-n) \end{pmatrix}$$

soit encore matriciellement :

$$\underline{Y}(J) = H \underline{U}(J) + \underline{V}(J)$$

Posons :  $\underline{U}(J) = \underline{U}'(J) + \underline{U}''(J)$

avec

$$\underline{U}'(J) = \begin{pmatrix} u(j) \\ u(j-l+1) \\ 0 \\ u(j-l-1) \\ \vdots \\ u(j-n-m) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{U}''(J) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u(j-l) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il vient :

$$\underline{Y}(J) = H \underline{U}'(J) + H \underline{U}''(J) + \underline{V}(J)$$

et alors

$\underline{U}''(J)$ , tel que  $\| \underline{Y}(J) - H \underline{U}'(J) - H \underline{U}''(J) \|$  soit minimal au sens des moindres carrés, sera :

$$\underline{U}''(J) = H^T (HH^T)^{-1} (\underline{Y}(J) - H \underline{U}'(J))$$

La grandeur que l'on désire restituer est ici :

$$\hat{u}(j - l)$$

or  $u(j - l) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \underline{U}''(J) = \underline{C}^T \underline{U}''(J)$

$\underline{C}^T$  étant le vecteur ligne dont toutes les composantes sont nulles à l'exception de celle de rang "l + 1"

Donc

$$\hat{u}(j - l) = \underline{C}^T H^T (HH^T)^{-1} \underline{Y}(J) \quad (I)$$

soit encore

$$\hat{u}(j - l) = \underline{F}^T \underline{Y}(J) \text{ en posant } \underline{F}^T = (\underline{C}^T H^T (HH^T)^{-1})$$

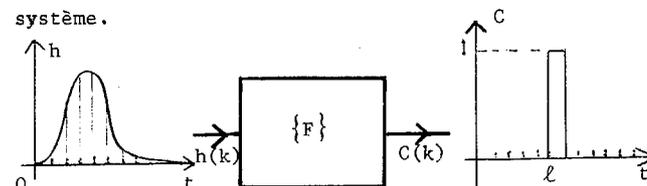
avec

$$\underline{F} = (H H^T)^{-1} H \underline{C} \quad (II)$$

La déconvolution consistera par conséquent à appliquer la grandeur d'observation à l'entrée d'un filtre numérique non récursif admettant le vecteur  $\underline{F}$  pour séquence de pondération.

REMARQUES

- Une autre définition du filtre "déconvolveur" consiste à considérer le filtre numérique restituant, avec "l" périodes de retard, une impulsion unité si l'on applique sur son entrée la séquence de pondération du système.





On aboutit de cette façon à l'écriture matricielle suivante :

$$\underline{C} = \underline{H}^T \underline{F}$$

et la recherche d'un tel filtre  $\underline{F}$ , optimal au sens des moindres carrés, donnera l'équation (II)

- L'estimateur obtenu suivant le critère des moindres carrés est aussi optimal suivant le critère du maximum de vraisemblance en raison des hypothèses faites sur le bruit.

#### METHODE DE CALCUL

Il existe diverses méthodes numériques permettant la résolution du système d'équations (II). Dans le cas présent la méthode de CHOLESKI programmée sur ordinateur C I I 10070 est utilisée.

Divers essais ont montré qu'il était inutile que la largeur de la fenêtre d'observation sur la sortie : "(n + 1)", n'exède le double de la longueur de la séquence de pondération du système : "(2 x (m + 1))". D'autre part, pour un système donné, les divers filtres de déconvolution obtenus par variation du nombre de périodes de retard à l'estimation : "l" ont révélé posséder la même séquence de pondération décalée dans le temps du nombre de périodes de retard qui leur est attribué.

#### ETUDE SIMULEE DES PERFORMANCES DE LA METHODE EN FONCTION DU NIVEAU DE BRUIT ET DE LA CADENCE D'ECHANTILLONNAGE

Les performances des filtres de déconvolution obtenus par la méthode précédente ont été testées par simulation sur ordinateur de diverses fonctions de transfert et cela à différents niveaux de bruit sur la sortie du système.

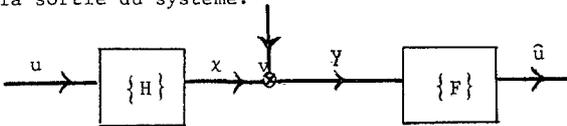


Schéma de la simulation numérique.

Pour tester la méthode, on applique comme signal d'entrée une séquence binaire pseudo aléatoire de période élémentaire de 3,2 secondes. Une telle période conduit à une densité spectrale, du signal d'entrée, qui déborde d'environ une octave la bande passante à 3 dB des fonctions de transfert choisies.

Le critère de test de la méthode est le suivant :

$$W = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{M-1} (u(i) - \hat{u}(i))^2}{\sum_{i=0}^{M-1} (u(i) - u_M)^2}}$$

avec

$$u_M = \frac{\sum_{i=0}^{M-1} u(i)}{M}$$

W représente la racine de l'erreur quadratique moyenne normalisée à la puissance du signal d'entrée. Les simulations ont été réalisées sur des fonctions de transfert du second ordre possédant les différentes formes de réponses impulsionnelles possibles.

$$H_1(P) = \frac{G}{(P+a)(P+b)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} G = 2 \\ a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$H_2(P) = G \frac{(P+c)}{(P+a)(P+b)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} G = 4 \\ a = 1 \\ b = 2 \\ c = 0.5 \end{cases}$$

$$H_3(P) = \frac{G}{\frac{P^2}{\omega_n^2} + 2 \frac{\zeta}{\omega_n} P + 1} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} G = 1 \\ \zeta = 0,2 \\ \omega_n = 1 \end{cases}$$

Les filtres de déconvolution ont été calculés pour diverses cadences d'échantillonnage de la sortie et toujours pour une seule période de retard à l'estimation. Ces cadences se répartissent dans un domaine limité supérieurement par le théorème de Shannon et inférieurement par la longueur excessive de la séquence de pondération du système résultant d'une faible période d'échantillonnage. Le tableau ci-après donne la valeur du critère pour les trois sortes de fonction de transfert considérées et cela à divers niveaux de bruit. Sur  $H_3(P)$  on s'est limité à des cadences moins faibles, par rapport aux deux autres sortes de fonction de transfert, en raison de la longueur excessive de la séquence de pondération liée à son caractère oscillant.



DECONVOLUTION NUMERIQUE EN TEMPS REEL

niveau de bruit	période d'échantillonnage	W		
		H <sub>1</sub>	H <sub>2</sub>	H <sub>3</sub>
0 %	1.5	3.10 <sup>-6</sup>	1.10 <sup>-6</sup>	3.10 <sup>-5</sup>
	1	5.10 <sup>-6</sup>	3.10 <sup>-6</sup>	4.10 <sup>-3</sup>
	0.7	1.10 <sup>-5</sup>	3.10 <sup>-6</sup>	5.10 <sup>-3</sup>
	0.5	8.10 <sup>-5</sup>	4.10 <sup>-6</sup>	
	0.4	2.10 <sup>-4</sup>	1.10 <sup>-5</sup>	
	0.3	8.10 <sup>-4</sup>	1.10 <sup>-4</sup>	
	0.2	6.10 <sup>-3</sup>	2.10 <sup>-3</sup>	
1 % soit 40 dB	1.5	1.10 <sup>-2</sup>	9.10 <sup>-3</sup>	3.10 <sup>-2</sup>
	1.	3.10 <sup>-2</sup>	9.10 <sup>-3</sup>	0.12
	0.7	5.10 <sup>-2</sup>	9.10 <sup>-3</sup>	0.32
	0.5	0.13	1.10 <sup>-2</sup>	
	0.4	0.21	1.10 <sup>-2</sup>	
	0.3	0.43	2.10 <sup>-2</sup>	
	0.2	0.78	2.10 <sup>-2</sup>	
6,3 % soit 30 dB	1.5	4.10 <sup>-2</sup>	3.10 <sup>-2</sup>	0.10
	1.	8.10 <sup>-2</sup>	3.10 <sup>-2</sup>	0.36
	0.7	0.16	3.10 <sup>-2</sup>	0.71
	0.5	0.37	4.10 <sup>-2</sup>	
	0.4	0.56	4.10 <sup>-2</sup>	
	0.3	0.84	5.10 <sup>-2</sup>	
	0.2	0.96	7.10 <sup>-2</sup>	
10 % soit 20 dB	1.5	0.13	9.10 <sup>-2</sup>	0.30
	1.	0.26	9.10 <sup>-2</sup>	0.77
	0.7	0.45	9.10 <sup>-2</sup>	
	0.5	0.79	0.11	
	0.4	0.91	0.13	
	0.3	0.98	0.16	
	0.2	0.99	0.22	

Pour les trois fonctions de transfert le meilleur filtre de déconvolution se révèle être celui calculé pour l'échantillonnage le plus lent. L'explication peut être donnée de la façon suivante :

l'entrée reconstituée nous est fournie par la relation :

$$\hat{u}(k) = \sum_{i=0}^n f(i) y(k-i)$$

l'observation "y" étant la somme de la sortie exacte "x" du système et du bruit "v"

$$\hat{u}(k) = \sum_{i=0}^n f(i) x(k-i) + \sum_{i=0}^n f(i) v(k-i)$$

Si l'on appelle "ε" l'erreur sur la reconstruction de "u" :

$$\hat{u}(k) = u(k) + \epsilon(k)$$

avec  $u(k) = \sum_{i=0}^n f(i) x(k-i)$  donc en considérant nulle l'erreur systématique de la méthode.

L'erreur quadratique moyenne de ε(k) est

alors :

$$\sigma_{\epsilon}^2 = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{q+1} \sum_{k=0}^q \epsilon^2(k)$$

Le signal et le bruit sont non corrélés, d'où

$$\sigma_{\epsilon}^2 = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n f(i) f(j) \psi_{vv}(j-i)$$

$$\text{avec } \psi_{vv}(j-i) = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{q+1} \sum_{k=0}^q v(k) v(k-j+i)$$

fonction d'autocorrélation du bruit. Or, le bruit est blanc et de variance σ<sub>v</sub><sup>2</sup>, d'où :

$$\sigma_{\epsilon}^2 = \sigma_v^2 \sum_{i=0}^n f^2(i)$$

$\sum_{i=0}^n f^2(i)$  est le facteur de réduction de variance, c'est à-dire la quantité par laquelle la variance du

bruit à l'entrée se trouve multipliée en sortie. Or, des filtres de déconvolution, calculés pour un même système à des périodes d'échantillonnage différentes, possèdent relativement la même allure de séquence de pondération. Il en résultera que le filtre travaillant à la cadence la plus lente possèdera moins de termes dans sa séquence de pondération et par conséquent un facteur de réduction de variance plus faible.

MISE EN OEUVRE SUR CALCULATEUR TEMPS REEL

La fonction de transfert du système réalisant la convolution est cette fois cablée sur calculateur analogique. Quant au filtre de déconvolution, on l'implante dans un calculateur numérique relié à la sortie du système précédent par un convertisseur analogique - digital (dix bits dont un pour le signe). On assimile le bruit de quantification à un bruit blanc



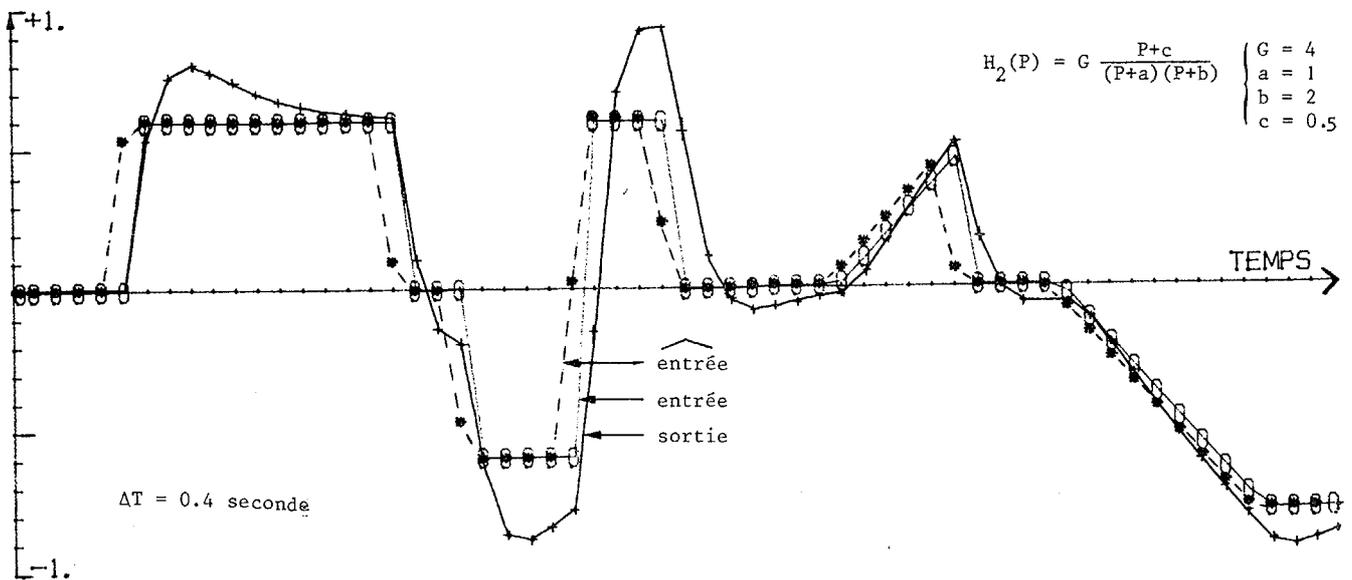
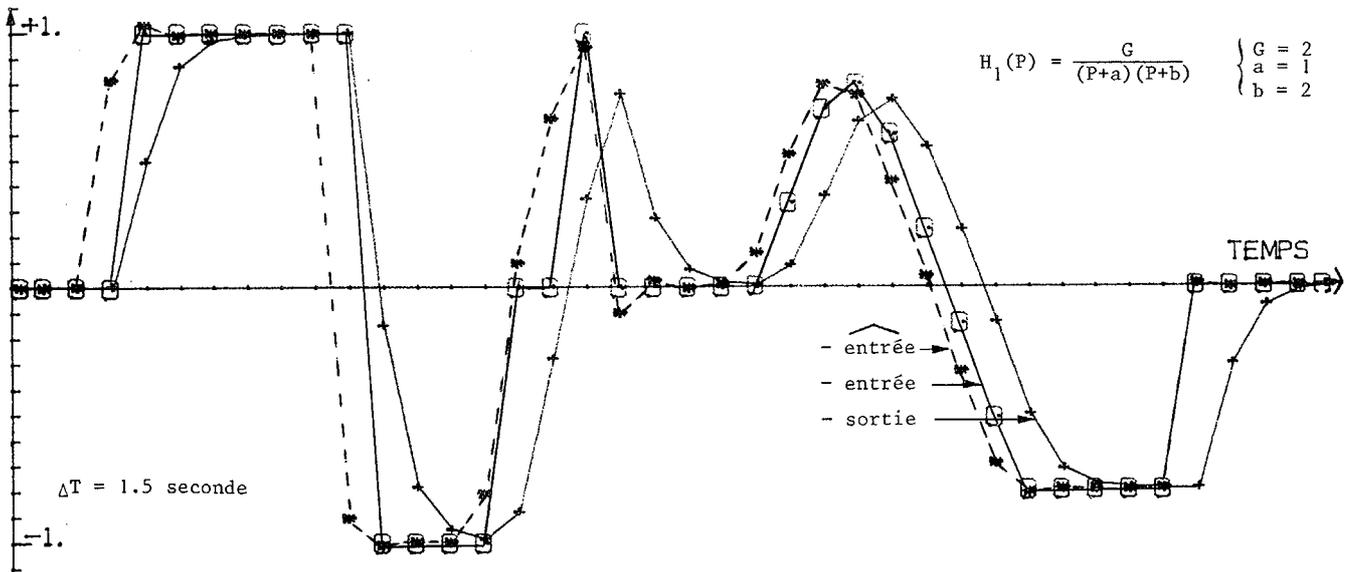
DECONVOLUTION NUMERIQUE EN TEMPS REEL

de variance  $\sigma_v^2 = \frac{q^2}{12}$ ,  $q$  représente l'unité de quantification dans le cas présent elle est de 2mV et donc  $\sigma_v = 6.10^{-4}$ .

La déconvolution est ainsi mise en oeuvre sur des systèmes électroniques de fonctions de transfert identiques aux précédents. Elle s'opère dans le cas présent avec une période de retard.

REMARQUE

L'entrée reconstituée du système apparaît décalée dans le temps par rapport à l'entrée réelle. Cette apparence est due à ce que l'entrée réelle tracée est mesurée par le convertisseur analogique digital à la même période d'échantillonnage que la sortie. Il en résulte que toute variation du niveau de l'entrée produite entre deux instants d'échantillonnage n'apparaît sur le tracé qu'au second instant de mesure. C'est donc l'entrée réelle qui se trouve décalée par rapport à l'entrée estimée.





CONCLUSION

La méthode des moindres carrés permet donc le calcul du filtre de déconvolution à partir de la connaissance de la séquence de pondération. Les simulations et manipulations montrent que ce filtre fonctionne en présence de bruit. La structure sous forme de filtre numérique permet d'une part la facilité d'implantation sur minicalculateur ou microprocesseur et d'autre part une rapidité d'exécution supérieure aux méthodes par Transformation de Fourier. Le caractère non récursif du filtre assure sa stabilité. Enfin l'opération se réalise avec peu de retard sur la connaissance de la sortie et permet ainsi une reconstruction "en ligne" de l'entrée du système.

Je remercie Messieurs les Professeurs GERBER, ARQUES et DE LARMINAT pour leur contribution à ce travail.

NOTATIONS

$x(k)$  : valeur de  $x$  à l'instant  $t_k$

$\underline{x}^T(j)$  : vecteur ligne  $(x(j), \dots, x(j-n))$

$\hat{u}(j)$  : estimation de  $u(j)$

BIBLIOGRAPHIE

BRIE C. - Détermination de l'entrée d'un système linéaire par déconvolution de la sortie - Thèse de l'Université Claude Bernard - LYON 1971.

GOLD&RADER - *Digital processing of signals* - Mac Graw Hill.

MONROE A.J. - *Digital processes for sampled data systems* - Wiley & Sons.

NAHI N.E. - *Estimation Theory and applications* - John Wiley & Sons.

RADIX J.L. - *Introduction au filtrage numérique* - Eyrolles.

BIRAUD, LECOMTE, GARDERET, GILLY, MUNIER, MAX. - *Etude préliminaire de quelques problèmes relatifs à la déconvolution.* - Rapport MNMR n° 1 CEA - CENG

MARCE L. *Etude de quelques méthodes d'identification : application à un processus hydraulique* - Thèse de Docteur Ingénieur - Université de Rennes - 1973.