

# COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 16 au 21 JUIN 75



UTILISATION DES "PROLATE SPHEROIDAL WAVE FUNCTIONS" EN VUE  
DE LA RECONSTITUTION D'UN OBJET A PARTIR DE SES PROJECTIONS

Jacques WOLF

Univ. Scientifique et Médicale, Labo. de Mathématiques Appliquées, B.P. 53 — 38041 GRENOBLE FRANCE

## RESUME

Après avoir rappelé que le "projection-slice" théorème permet théoriquement d'obtenir la transformée de Fourier d'un objet, la pratique fait que — dans le cas de  $\mathbb{R}^2$  par exemple — la valeur de cette transformée n'est connue que sur un domaine fini et de plus en un nombre restreint de points répartis sur des angles polaires. Ces constatations rendent difficile la transformation inverse de Fourier.

Les "prolate spheroidal wave functions" à plusieurs variables définies sur tout  $\mathbb{R}^n$  ont des transformées de Fourier à support compact, de plus un élément  $f$  de  $L^2$  peut se développer sur une base de telles fonctions et surtout les coefficients de ce développement se calculent à partir de la seule connaissance de  $f$  sur un compact.

Ce sont ces quelques propriétés, ajoutées à des domaines bien choisis qui font que ces fonctions peuvent être utilisées pour la reconstitution d'objets à partir de leurs projections. Les méthodes de projections sont surtout utilisées actuellement en tomographie, en radiographie,...

## SUMMARY

The projection-slice theorem, theoretically, allows to get the Fourier transform of a multi-dimensional object. However, practically, this two dimensional Fourier transform is known only on a finite polar raster.

Then it is difficult to compute the inverse Fourier transform.

The two dimensional prolate spheroidal wave functions have Fourier transform with compact support, and this set of functions is also complete in  $L^2$ .

These prolate functions, with their numerous properties, will be used to infer the structure of a two dimensional object from a set of projections. The methods of projections are used in electron micrography, tomography,...



UTILISATION DES "PROLATE SPHEROIDAL WAVE FUNCTIONS" EN VUE DE LA RECONSTITUTION D'UN OBJET A PARTIR DE SES PROJECTIONS

Jacques WOLF

Dans de nombreuses disciplines on essaye de reconstituer un objet à partir de ses "projections" : tomographie, tests non destructifs d'objets usinés, ... [1].

Projection

Par reconstitution d'un objet on entend la recherche d'une fonction densité  $\rho(M)$  — où  $M \in \mathbb{R}^n$ . (Dans ce qui suit on se placera uniquement dans le cas où  $n = 2$ ).

Les axes XOY du plan étant fixés, la détermination de  $\rho(M)$  revient à la recherche d'une fonction de deux variables  $f(X,Y) = \rho(M)$  avec  $M \begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$ , à partir d'un certain nombre de projections.

Soit  $\alpha$  l'angle de la droite sur laquelle se fait la projection : on appelle projection la quantité (figure 1) :

$$\varphi_\alpha(x) = \int_{d_x} f(X,Y)dy \quad (1)$$

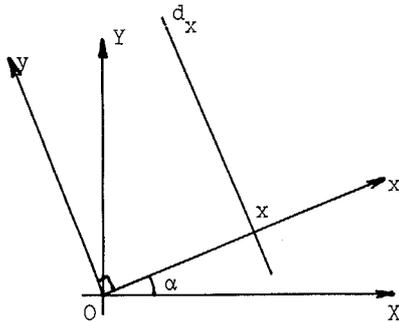


figure 1

Supposons  $f$  définie sur tout  $\mathbb{R}^2$  éventuellement

$$f(X,Y) = 0 \quad \forall (X,Y) \in \mathcal{D}$$

On a alors

$$\varphi_\alpha(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x\cos\alpha - y\sin\alpha, x\sin\alpha + y\cos\alpha)dy \quad (2)$$

Pour trouver une estimation correcte de  $f$ , il faut, en général, se donner plusieurs angles de projections.

Projection-slice théorème

On note par

$L^2_A$  la classe des fonctions définies sur  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  et dont le carré du module est intégrable. Le produit scalaire est

$$\forall f,g \in L^2_A \quad (f,g)_A = \int_A f(x)\bar{g}(x)dx$$

(La norme correspondante sera notée  $\|f\|_A$ ).

Toute fonction de  $L^2_{\mathbb{R}^2}$  possède une transformée de Fourier

$$f(x) = f(x_1,x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\langle x,y \rangle} F(y)dy$$

et

$$F(y) = F(y_1,y_2) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\langle x,y \rangle} f(x)dx$$

où  $\langle , \rangle$  est le produit scalaire habituel de  $\mathbb{R}^2$ . On peut montrer

Projection-slice théorème [2]

La transformée de Fourier d'une projection est une "tranche" de la transformée de Fourier de l'objet.

Ce qui se traduit par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\alpha(u) e^{-iu\omega} du = F(\omega \cos \alpha, \omega \sin \alpha)$$

On voit ainsi que si on fait prendre à  $\omega$  les valeurs  $\omega_j^i$   $i=0, \dots, p$  pour  $\alpha = \alpha_j$  ( $j=0, \dots, L$ ), la transformée de Fourier — qui n'est pas à support compact si l'objet est de dimension finie — de l'objet est connue sur un maillage polaire (figure 2).

A ce moment il ne reste plus qu'à calculer la transformée inverse de  $F$ . Mais de nombreuses difficultés apparaissent. En général on essaye de se ramener à un maillage rectangulaire (pour utiliser la FFT), ou on emploie des techniques d'interpolation... .

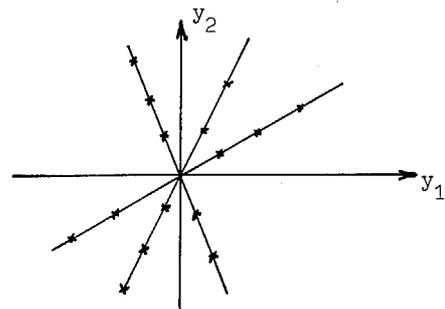


figure 2

Prolate spheroidal wave functions

Soit  $\mathcal{B} \subset L^2_{\infty}$  l'ensemble des fonctions dont la transformée de Fourier s'amortit à l'extérieur du domaine  $C$  ( $\subset \mathbb{R}^2$ ) donné, soit :

$$h \in \mathcal{B} \iff H(y) = 0 \quad \forall y \in C$$

Soit  $S \subset \mathbb{R}^2$ , il est alors connu que,

$$\|h\|_S^2 < \|h\|_{\infty}^2 \quad \text{si } h \in \mathcal{B}.$$

$S$  et  $C$  étant donnés, on cherche pour quel(s) élément(s) de  $\mathcal{B}$  le rapport

$$\rho = \|h\|_S^2 / \|h\|_{\infty}^2 \quad \text{est maximum.}$$



UTILISATION DES "PROLATE SPHEROIDAL WAVE FUNCTIONS" EN VUE  
DE LA RECONSTITUTION D'UN OBJET A PARTIR DE SES PROJECTIONS

Jacques WOLF

Introduisant l'opérateur linéaire défini sur  $L_C^2$  par

$$\mathcal{K}G = \int_C k(x,y) G(y) dy$$

où

$$k(x,y) = K_S(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_S e^{i\langle x-y, z \rangle} dz,$$

on peut montrer que :  $\rho$  a une valeur maximum qui est la plus grande valeur caractéristique  $\lambda_0$  de l'équation intégrale

$$\lambda \phi(y) = \int_C K_S(y-u) \phi(u) du \quad \forall y \in C \quad (3)$$

La valeur maximum de  $\rho$  est atteinte lorsque  $h = \varphi_0 \in \mathcal{B}$ . La transformée de Fourier de  $\varphi_0$  satisfaisant l'équation propre correspondant à  $\lambda_0$ .

(On peut montrer que l'opérateur linéaire  $\mathcal{K}$  est un opérateur hermitique, défini positif ce qui donne un sens au paragraphe précédent, et ce qui va permettre d'obtenir de nombreuses propriétés sur les fonctions propres  $\phi$  de l'équation intégrale (3)).

Dans ce qui suit, on supposera, en vue des applications, que

$$(H1) \quad S = aC \text{ et que } C \text{ est symétrique / } O$$

Dans ces conditions on peut aussi montrer que  $\varphi$ , qui a pour transformée de Fourier  $\phi$  satisfaisant (3) satisfait l'équation intégrale

$$\lambda \varphi(x) = \int_S K_C(x-z) \varphi(z) dz \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \quad (4)$$

On peut alors montrer les résultats suivants [3], à propos des solutions de (4) (ou de (3)):

$S$  et  $C$  étant donnés satisfaisant  $(H_1)$ , on peut trouver un ensemble infini dénombrable de fonctions réelles

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots \in L_C^2$$

et un ensemble de nombres positifs

$$\lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > 0$$

possédant les propriétés suivantes :

i) les  $\varphi_i \in \mathcal{B}$ , sont orthonormales sur  $\mathbb{R}^2$ , et forment un système complet dans  $\mathcal{B}$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \delta_{ij} \quad i, j = 0, 1, 2, \dots$$

ii) Les  $\varphi_i$  sont orthogonales sur  $S$  et forment un système complet dans  $L_S^2$

$$\int_S \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \lambda_i \delta_{ij} \quad i, j = 0, 1, 2, \dots$$

iii) Pour tout  $x \in \mathbb{R}^2$

$$\lambda_i \varphi_i(x) = \int_S K_C(x-z) \varphi_i(z) dz$$

La fonction  $\varphi$  est appelée "prolate spheroidal wave function".

Sous l'hypothèse  $(H_1)$  on peut aussi montrer que :

$$\phi(y) = \begin{cases} v \varphi(ay) & \forall y \in C \\ 0 & \forall y \notin C \end{cases}$$

où  $v$  est un coefficient précisé ultérieurement.

#### Application au problème de projection

Soit  $f$  la fonction densité que l'on cherche à reconstituer. On supposera :

$$f(x_1, x_2) = 0 \quad \forall (x_1, x_2) \notin C$$

où  $C$  est le cercle de centre l'origine et de rayon 1.

$f$  a pour transformée de Fourier  $F$ , qui est connue (théorème de projection) uniquement en des points intérieurs au cercle  $S$  (figure 2).

Puisque l'ensemble  $\{\varphi_i\}$  est complet dans  $\mathcal{B}$  on peut écrire :

$$F(y) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k \varphi_k(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^2$$

puisque les  $\varphi_k$  sont orthogonales sur  $S$  on a :

$$\int_S F(y) \varphi_j(y) dy = \sum_{k=0}^{\infty} F_k \int_S \varphi_k(y) \varphi_j(y) dy = \lambda_j F_j$$

donc

$$F(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\int_S F(y) \varphi_k(y) dy}{\lambda_k} \varphi_k(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^2$$

Prenant la transformée de Fourier inverse des deux membres on peut écrire :

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\int_S F(y) \varphi_k(y) dy}{\lambda_k} \varphi_k(x) & \forall x \in C \\ 0 & \forall x \notin C \end{cases}$$

UTILISATION DES "PROLATE SPHEROIDAL WAVE FUNCTIONS" EN VUE  
DE LA RECONSTITUTION D'UN OBJET A PARTIR DE SES PROJECTIONS  
Jacques WOLF

ou encore

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v_k}{\lambda_k} \int_S F(y) \varphi_k(y) dy \varphi_k(ax) & \forall x \in C \\ 0 & \forall x \notin C \end{cases} \quad (5)$$

ou encore une autre expression n'utilisant que  $\phi$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a}{v_k} \frac{1}{\lambda_k} \int_C F(au) \phi_k(u) du \phi_k(x)$$

On peut aussi montrer en se servant des propriétés d'orthonormalité des  $\phi_k$  que

$$|v_k|^2 = 4\pi^2 \frac{a^2}{\lambda_k} \quad \forall k$$

Etude des fonctions propres

On pose  $\eta = 4\pi^2 / v$

et on considère l'équation intégrale

$$\eta G(t) = \int_C e^{ia \langle t, y \rangle} G(y) dy \quad \forall t \in C \quad (6)$$

On peut montrer [4]

- j) si  $G(t)$  est solution de (6) correspondant à la valeur caractéristique  $\eta$ ,  $G(-t)$  est aussi solution de (6) correspondant à la même valeur caractéristique  $\eta$
- jj) à  $G$  fonction paire correspond une valeur caractéristique réelle de (6) et à  $G$  impaire correspond une valeur caractéristique imaginaire pure ;
- jjj) les fonctions propres de (6) peuvent être choisies réelles.

Tenant compte de ces résultats, il est alors équivalent de chercher les solutions de l'équation intégrale (3) ou de rechercher les solutions de l'équation intégrale (6).

Fonctions propres et valeurs propres

Deux cas sont particulièrement intéressants.

Le cas où  $C$  serait un rectangle, et le cas où  $C$  est un cercle (cas choisi ici). En effet, dans ces deux systèmes de coordonnées (cartésiennes et polaires) il y a "séparation des variables". C'est-à-dire on peut se ramener à la recherche de solutions d'équations intégrales à une seule dimension.

Cas où  $C$  est le cercle unité :

Les fonction propres sont alors :

$$\begin{aligned} G_{0n}(r, \theta) &= R_{0n}(r) & \alpha_{0n} &= 2\pi \beta_{0n} \\ G_{Nn}(r, \theta) &= R_{Nn}(r) \begin{cases} \cos N\theta \\ \sin N\theta \end{cases} & \alpha_{Nn} &= 2\pi i^N \beta_{Nn} \end{aligned}$$

$N = 1, 2, \dots$   
 $n = 0, 1, 2, \dots$

où

$$\beta_{Nn} R_{Nn}(r) = \int_0^1 J_N(ar r') R_{Nn}(r') r' dr' \quad r \in [0, 1]$$

$J_N(x)$  étant la fonction de Bessel d'ordre  $N$ . Cette équation intégrale se transforme, après les changements

$$\begin{cases} \gamma = \sqrt{a} \beta \\ \varphi(r) = \sqrt{r} R(r) \end{cases}$$

en

$$\gamma \varphi(r) = \int_0^1 J_N(c r r') \sqrt{c r r'} \varphi(r') dr' \quad r \in [0, 1] \quad (7)$$

Equation intégrale sur laquelle seront conduites les expériences numériques qui ont été entreprises.

Calcul numérique des fonctions propres

Le calcul des valeurs caractéristiques et des fonctions propres de (7), c'est-à-dire de l'opérateur intégral symétrique

$$f(\rho) \rightarrow \int_0^1 J_N(a \rho \rho') \sqrt{a \rho \rho'} f(\rho') d\rho'$$

peut s'effectuer en approchant cet opérateur par des formules de quadrature (Gauss par exemple) c'est-à-dire en résolvant le problème approché : [5]

$$\gamma \varphi(\rho) = \sum_{j=0}^p w_j J_N(a \rho \rho_j) \sqrt{a \rho \rho_j} \varphi(\rho_j) \quad (8)$$

$w_j$  et  $\rho_j$  étant les poids et les abscisses de la formule de quadrature.

Résoudre (8) revient à calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice  $A$  de terme général

$$a_{ij} = w_j J_N(a \rho \rho_j) \sqrt{a \rho \rho_j}$$



UTILISATION DES "PROLATE SPHEROIDAL WAVE FUNCTIONS" EN VUE  
DE LA RECONSTITUTION D'UN OBJET A PARTIR DE SES PROJECTIONS

Jacques WOLF

Remarque :

Au vecteur propre  $u = (u_0, \dots, u_p)$  de la matrice  $A$  est associée la fonction propre :

$$\varphi(\rho) = \sum_{i=0}^p u_i J_N(a\rho_i) \sqrt{a\rho_i}$$

(Les valeurs propres sont calculées par la méthode de Jacobi).

Les résultats numériques sont encore trop peu nombreux pour être présentés ici, mais sont encourageants malgré les difficultés dans les divers choix des paramètres ( $a$ , nombre de fonctions propres).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D.J. DEROSIER, A. KLUG  
"Reconstruction of three-dimensional structures from electron micrographs".  
Nature vol.217, pp. 130-134 (1968).
- [2] R. MERSEREAU, A. OPPENHEIM  
"Digital reconstruction of multidimensional signals from their projections".  
Proceedings of the IEEE, vol. 62, n°10, (oct. 1974)
- [3] D. SLEPIAN  
"Prolate spheroidal wave functions IV. Extensions to many dimensions".  
Bell. Syst. Tech. J (nov. 1964).
- [4] J. WOLF  
"Quelques idées sur la reconstitution d'un objet à partir de ses projections".  
Séminaire, Laboratoire de Mathématiques Appliquées de Grenoble, n° 218 (1975).
- [5] P.M. ANSELME  
"Collectively compact operator approximation theory". Prentice-Hall.