

COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 16 au 21 JUIN 75



UN ALGORITHME DE RESOLUTION PAR QUASI MOMENTS
DE L'EQUATION DE FOKKER-PLANCK
SON APPLICATION AU FILTRAGE OPTIMAL (*)

MM. DARMON et DELABBAYE

LABORATOIRE CENTRAL DE TELECOMMUNICATIONS - B.P. n° 40 - 78140 - VELIZY-VILLACOUBLAY

RESUME

Le présent article résume les résultats obtenus par les auteurs concernant l'application des développements en série de polynômes d'HERMITE à la résolution de l'équation de FOKKER-PLANCK et de l'équation d'évolution de la probabilité conditionnelle en théorie du filtrage.

Soit l'équation de FOKKER-PLANCK :

$$(1) \quad \frac{\partial p}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ f(x, t) p(x, t) \right\} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \sigma^2(x, t) p(x, t) \right\} = 0$$

dont la solution $p(x, t)$ est la densité de probabilité de l'état du processus de diffusion :

$$(2) \quad dx = f(x, t) dt + \sigma(x, t) dw$$

Soit également l'équation de filtrage :

$$(3) \quad dp(x, t, \omega) + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (f(x, t) p(x, t, \omega)) \right\} dt - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \sigma^2(x, t) p(x, t, \omega) \right\} dt = p(x, t, \omega) \times \left\{ h(x, t) - \int_R h(x, t) p(x, t, \omega) dx \right\} \times \frac{1}{r^2} \left\{ dz - dt \int_R h(x, t) p(x, t, \omega) dx \right\}$$

dont la solution $p(x, t, \omega)$ est la densité de probabilité du processus (2) conditionnée par les mesures :

$$dz = h(x, t) dt + r(t) dw$$

SUMMARY

In this paper the solutions of FOKKER-PLANCK and filtering equations are derived, using HERMITE polynomial series expansions.

The solution $p(x, t)$ of the FOKKER-PLANCK equation :

$$(1) \quad \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ f(x, t) p(x, t) \right\} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \sigma^2(x, t) p(x, t) \right\} = 0$$

is the state density function of the diffusion process :

$$(2) \quad dx = f(x, t) dt + \sigma(x, t) dw$$

and the density function $p(x, t, \omega)$ of the process (2) conditioned by the measuring process.

$$dz = h(x, t) dt + r(t) dw$$

is given by the KUSHNER-STRATONOVITCH filtering equation :

$$(3) \quad dp(x, t, \omega) + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (f(x, t) p(x, t, \omega)) \right\} dt - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \sigma^2(x, t) p(x, t, \omega) \right\} dt = p(x, t, \omega) \times \left\{ h(x, t) - \int_R h(x, t) p(x, t, \omega) dx \right\} \times \frac{1}{r^2} \left\{ dz - dt \int_R h(x, t) p(x, t, \omega) dx \right\}$$



UN ALGORITHME DE RESOLUTION PAR QUASI MOMENTS
DE L'EQUATION DE FOKKER-PLANCK
SON APPLICATION AU FILTRAGE OPTIMAL (*)

Les équations (1) et (3) sont résolues par une méthode de semi-discrétisation basée sur le développement de la densité de probabilité en série de GRAM-CHARLIER :

$$p(x, t) = \sum_0^{\infty} c_n \frac{K_n}{n!} P_N(x, t)$$

et le développement de f, σ^2 et h en séries de polynômes d'HERMITE :

$$\sum_0^{\infty} a_n \frac{K_n}{n!}$$

La programmation des deux algorithmes issus de cette méthode a été effectuée et justifiée de façon encourageante les résultats théoriques obtenus.

(*)

Cette étude est effectuée pour le groupe "Théorie du Signal" du Centre d'Etudes Théoriques de la Détection et des Communications.

Both equations (1) and (3) are solved using a semi-discretisation method (GALERKIN) obtained by expanding the density function $p(x,t)$ in GRAM-CHARLIER series :

$$p(x,t) = \sum_0^{\infty} c_n \frac{K_n}{n!} P_N(x,t)$$

and f, σ^2 and h in HERMITE polynomial series :

$$\sum_0^{\infty} a_n \frac{K_n}{n!}$$

Both algorithms have been successfully programmed on a digital computer and the theoretical results have been confirmed.



UN ALGORITHME DE RESOLUTION PAR QUASI MOMENTS
DE L'EQUATION DE FOKKER-PLANCK
SON APPLICATION AU FILTRAGE OPTIMAL

INTRODUCTION

Ainsi que l'ont montré KUSHNER [1] et STRATONOVITCH [2], le problème du filtrage non-linéaire de systèmes dynamiques markoviens se réduit à la résolution de l'équation aux dérivées partielles stochastique

$$(1) \quad dp(x, t, \omega) + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ f(x, t) p(x, t, \omega) \right\} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \sigma^2(x, t) p(x, t, \omega) \right\} dt = p(x, t, \omega) \times \left\{ h(x, t) - \int_{\mathbb{R}} h(x, t) p(x, t, \omega) dx \right\} \times \frac{1}{r} \left\{ dz - dt \int_{\mathbb{R}} h(x, t) p(x, t, \omega) dx \right\}$$

dont la solution $p(x, t, \omega)$ est la densité de probabilité du processus :

$$(2) \quad dx = f(x, t) dt + \sigma(x, t) dw$$

conditionné par les mesures :

$$(3) \quad dz = h(x, t) dt + r(t) dw$$

effectuées jusqu'à l'instant t

L'estimée optimale à l'instant t est en effet la moyenne de la densité $p(x, t, \omega)$:

$$\hat{x}(t, \omega) = \int_{\mathbb{R}} x p(x, t, \omega) dx$$

La plupart des auteurs (cf JAZWINSKI [3]) ont supposé, la densité de probabilité $p(x, t, \omega)$ gaussienne, ont linéarisé les fonctions f et h , et remplacé σ^2 par une grandeur constante.

L'on a pu montrer que les résultats obtenus s'avéraient souvent satisfaisants ; L. SCHWARTZ [4] montre d'autre part que les performances obtenues par les différents filtres précédents sont très semblables.

Si l'on désire obtenir une meilleure précision, il devient indispensable de ne plus considérer que la probabilité est gaussienne et parallèlement de tenir compte des non-linéarités éventuelles de :

$$f, \sigma^2 \text{ et } h$$

Plusieurs approches ont été choisies :

BUCY [5] représente les densités de probabilité par des fonctions en escalier.

MALLINCKRODT, BUCY, et CHENG [6] appliquent dans le cas de la boucle de phase une représentation par séries de FOURIER. Enfin plusieurs auteurs FISHER [7], KUZNETSOV etc [8] et DASHEVSKII [9] ont utilisé un développement de la densité $p(x, t, \omega)$

en série de GRAM-CHARLIER (cf. CRAMER [10]).

C'est cette dernière approche qui est reprise ici, avec la différence suivante : les fonctions f , σ^2 et h sont également développées en série de polynômes d'HERMITE. Cette méthode permet de réduire considérablement le temps de calcul nécessaire à la détermination de l'estimée courante.

Quelques résultats préliminaires sur le développement en polynômes d'HERMITE sont exposés dans la partie I.

La partie II applique les résultats précédents à la résolution de l'équation de FOKKER-PLANCK qui s'identifie à l'équation de filtrage (1) privée de son second membre.

Les résultats acquis dans cette partie ont permis de dégager une classe de processus aléatoires auxquels s'applique l'algorithme choisi.

La partie III étend les résultats obtenus dans II à la résolution de l'équation de Filtrage.

I - RAPPEL : DEVELOPPEMENTS EN SERIES DE POLYNOMES D'HERMITE

L'ensemble des (classes de) fonctions réelles de la variable réelle de carré sommable, par rapport à la mesure $p_N dx$ où p_N est la densité de probabilité gaussienne

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\Sigma} \exp \left\{ -\frac{(x-\bar{x})^2}{2\Sigma} \right\}$$

constitue l'espace de HILBERT $H = L^2(\mathbb{R}; p_N)$ séparable dont une base hilbertienne non normée est formée par les polynômes d'HERMITE généralisés K_n ($n=0, 1, \dots$) définis par l'égalité :

$$(4) \quad K_n(x) p_N(x) = (-1)^n \Sigma^n \frac{d^n}{dx^n} \left\{ p_N(x) \right\}$$

Les premiers polynômes d'HERMITE sont :

$$K_0 = 1 ; K_1 = x - \bar{x} ; K_2 = (x-\bar{x})^2 - \Sigma ;$$

$$K_3 = (x-\bar{x})^3 - 3(x-\bar{x})\Sigma$$

$$K_4 = (x-\bar{x})^4 - 6(x-\bar{x})^2\Sigma + 3\Sigma^2 \text{ etc...}$$

Si la fonction f appartient à H , elle admet le développement :

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{K_i}{i!}$$

$$\text{où } a_i = \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{K_i(x)}{\Sigma^i} p_N dx ,$$



que l'on peut encore écrire [1] :

$$(5) a_i = \frac{d^i}{dx^i} \int_R f(x) p_N dx \text{ avec } \int_R f(x) p_N dx = a_0.$$

$M_i = a_i \Sigma^i$ sera appelé quasimoment d'ordre i associé à f .

Dans la suite nous emploierons les notations suivantes :
pour une fonction $p = \rho p_N$, la dérivation par rapport à x donne :

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d\rho}{dx} p_N + \rho \frac{dp_N}{dx} = \left\{ \frac{d\rho}{dx} - \frac{K_1 \rho}{\Sigma} \right\} p_N.$$

on définit l'opérateur différentiel D . par :

$$(6) D\rho = \frac{d\rho}{dx} - \frac{K_1 \rho}{\Sigma}.$$

Pour une fonction appartenant à H , on appelle développement tronqué à l'ordre n de ρ noté ρ_n , la projection de ρ sur le sous espace de H engendré par les polynômes d'HERMITE K_0, K_1, \dots, K_n .

En d'autres termes :

$$\rho = \sum_{i=0}^{\infty} C_i \frac{K_i}{i!}$$

et
$$\rho_n = \sum_{i=0}^n C_i \frac{K_i}{i!}$$

La projection sur le sous espace précédent sera notée $\left\{ \cdot \right\}_n$:

donc
$$\rho_n = \left\{ \rho \right\}_n$$

On appellera "tronqué à l'ordre n du produit de deux développements à l'ordre n f_n et g_n ", l'expression $\left\{ f_n g_n \right\}_n$.

Si
$$f_n = \sum_{i=0}^n a_i \frac{K_i}{i!}$$

$$g_n = \sum_{j=0}^n b_j \frac{K_j}{j!} \text{ et } M_j = b_j \Sigma^j,$$

les quasimoments associés à $\left\{ f_n g_n \right\}_n$ sont donnés par :

$$(7) N_i = \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^{\inf(n-j, n-i+j)} C_i^j a_{j+k} M_{i-j+k} \frac{\Sigma^j}{k!}$$

II - RESOLUTION DE L'EQUATION DE FOKKER-PLANCK -

1 - Equation de FOKKER-PLANCK

L'équation de FOKKER-PLANCK monodimensionnelle que l'on se propose de résoudre ici est donnée par :

$$(8) \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial \{ f(x,t) p(x,t) \}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \{ \sigma^2(x,t) p(x,t) \}}{\partial x^2} = 0.$$

avec
$$p(\infty, t) = p(-\infty, t) = 0$$

$$p(x, 0) = p_0(x).$$

La solution de cette équation aux dérivées partielles est la densité de probabilité de l'état du processus de diffusion (2)

$$dx = f(x,t) dt + \sigma(x,t) dw$$

où $w(t)$ est un mouvement brownien sur R de covariance $E\{w(t)w(\tau)\} = \inf(t, \tau)$ et de moyenne nulle.

Si l'on pose $p(x,t) = \rho(x,t) p_N(x,t)$

où $p_N(x,t)$ est la densité de probabilité gaussienne de moyenne $\lambda(t)$ et de variance $\Sigma(t)$, $\rho(x,t)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$(9) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left\{ \lambda \frac{K_1}{\Sigma} + \frac{\dot{\lambda} K_2}{2\Sigma^2} \right\} + D(f\rho) - \frac{1}{2} D^2(\sigma^2 \rho) = 0$$

où K_1 et K_2 sont les deux premiers polynômes d'HERMITE généralisés et D . l'opérateur précédemment défini.

C'est cette équation en ρ que l'on cherche à résoudre.

2 - Résolution approchée de l'équation (9)

Le principe de la méthode est le suivant : à t fixé on cherche $\rho(x,t)$ dans l'espace H . $\rho(x,t)$ s'écrira donc :

$$\rho(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i \frac{K_i}{i!}$$

La résolution approchée de (9) à l'ordre n consiste à "projeter" l'équation (9) sur le sous espace V_n de H engendré par K_0, K_1, \dots, K_n .

(Méthode de GALERKIN).



UN ALGORITHME DE RESOLUTION PAR QUASI MOMENTS
DE L'EQUATION DE FOKKER-PLANCK
SON APPLICATION AU FILTRAGE OPTIMAL (*)

L'équation résultante s'écrit :

$$(10) \left\{ \frac{\partial \rho_n}{\partial t} + \rho_n \left(\dot{x} \frac{K_1}{\Sigma} + \dot{\Sigma} \frac{K_2}{2\Sigma^2} \right) \right\}_n + \left\{ D(f \rho_n) \right\}_n - \frac{1}{2} \left\{ D^2(\sigma_n^2 \rho_n) \right\}_n = 0$$

qui se décompose sur la base K_0, K_1, \dots, K_n en un système différentiel qui régit l'évolution des quasimoments M_0, M_1, \dots, M_n associés à ρ_n .

Afin de simplifier le calcul des quasimoments associés aux produits $f \rho_n$ et $\sigma_n^2 \rho_n$, f et σ^2 sont remplacés dans l'équation précédente par leur développement f_n et σ_n^2 à l'ordre n . (nous supposons dans la suite, sans perte de généralité, que f et σ^2 appartiennent à H).

Ainsi l'équation approchée devient :

$$(11) \left\{ \frac{\partial \rho_n}{\partial t} + \rho_n \left(\dot{x} \frac{K_1}{\Sigma} + \dot{\Sigma} \frac{K_2}{2\Sigma^2} \right) \right\}_n + \left\{ D(f_n \rho_n) \right\}_n - \frac{1}{2} \left\{ D^2(\sigma_n^2 \rho_n) \right\}_n = 0.$$

Le choix de f_n et σ_n^2 à la place de f et σ^2 résulte de la remarque suivante : f et σ^2 sont des fonctions de l'état du processus $dx = f(x,t)dt + \sigma(x,t)dw$; la valeur x est prise avec la probabilité $p(x,t)$ et il serait normal d'approximer f et σ^2 au sens de la norme :

$$\left(\int_R f^2(x) p(x) dx \right)^{1/2}$$

$p(x,t)$ étant inconnu nous remplacerons cette dernière norme par

$$\left(\int_R f^2(x) p_N dx \right)^{1/2} \text{ ou } p_N \text{ est la}$$

densité de probabilité gaussienne ayant même moyenne et même variance que $p(x,t)$.

La meilleure approximation de f par un polynôme de degré n au sens de cette dernière norme est précisément f_n .

Soit : $M_k = C_k \Sigma^k$ ($0 \leq k \leq n$)

les quasimoments associés à ρ_n , N_k ceux de $f_n \rho_n$ et P_k ceux de $\sigma_n^2 \rho_n$, l'équation (11) se décompose en le système différentiel :

$$(12) \begin{aligned} \dot{M}_0 &= 0 \\ \dot{M}_1 &= N_0 - \dot{x} M_1 \\ \dot{M}_k &= k(N_{k-1} - \dot{x} M_{k-1}) \\ &+ \frac{k(k-1)}{2} (P_{k-2} - \dot{\Sigma} M_{k-2}) \quad 2 \leq k \leq n \end{aligned}$$

en effet l'équation (11) donne par transformation de FOURIER et en notant $(.)$ le développement au n^o ordre en iu :

$$\int_R e^{iux} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_n p_N) dx \Big|_* + \int_R e^{iux} \left\{ D(f_n \rho_n) \right\}_n p_N dx - \frac{1}{2} \int_R e^{iux} \left\{ D^2(\sigma_n^2 \rho_n) \right\}_n p_N dx = 0.$$

Sachant que $\left\{ D(f_n \rho_n) \right\}_n = D(\left\{ f_n \rho_n \right\}_{n-1})$

et que $\left\{ D^2(\sigma_n^2 \rho_n) \right\}_n = D^2(\left\{ \sigma_n^2 \rho_n \right\}_{n-2})$

on obtient successivement :

$$\int_R e^{iux} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_n p_N) dx \Big|_* + \int_R e^{iux} \frac{\partial}{\partial x} (\left\{ f_n \rho_n \right\}_{n-1}) p_N dx - \frac{1}{2} \int_R e^{iux} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\left\{ \sigma_n^2 \rho_n \right\}_{n-2}) p_N dx = 0.$$

L'intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_R e^{iux} \rho_n p_N dx \Big|_* \\ & - iu \int_R e^{iux} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{N_k}{\Sigma^k} \frac{K_k}{k!} p_N dx \\ & - \frac{1}{2} (iu)^2 \int_R e^{iux} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{P_k}{\Sigma^k} \frac{K_k}{k!} p_N dx = 0 \end{aligned}$$

L'utilisation de la formule (7) conduit à :



$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \phi_N \sum_{k=0}^n \frac{(iu)^k}{k!} M_k \right\} \right) - iu \phi_N \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(iu)^k}{k!} N_k - \frac{(iu)^2}{2} \phi_N \left\{ \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(iu)^k}{k!} P_k \right\} = 0$$

l'identification à 0 du coefficient de $(iu)^k$ donne le système différentiel (12).

Les équations (12) sont résolues sur ordinateur à partir de conditions initiales $M_k(0)$.

Deux solutions sont envisageables pour le choix de l'algorithme :

1°- solution

on fixe à priori \hat{x} et $\hat{\Sigma}$ qui alors seront indépendants du temps et on résout les équations (12) en supprimant les termes \hat{x} et $\hat{\Sigma}$.

2°-solution

on adapte à tout instant \hat{x} et $\hat{\Sigma}$ de telle façon qu'ils soient respectivement la moyenne et la variance de ρ_n^p ; ceci est obtenu en annulant M_1 et M_2 .

\hat{x} et $\hat{\Sigma}$ vérifient alors les équations différentielles :

$$(13) \quad \begin{cases} \dot{\hat{x}} = N_0 \\ \dot{\hat{\Sigma}} = 2 N_1 + P_0 \end{cases}$$

C'est cette dernière solution qui a été retenue pour les expérimentations : Elle présente l'avantage de mieux approximer la densité de probabilité $p(x,t)$ ainsi que les fonctions f et σ^2 .

3 - Résultats de convergence

La convergence de l'algorithme a été étudiée dans le cas de la 1ère solution et l'on a de plus supposé que f et σ^2 sont des polynômes en x indépendants du temps.

La recherche d'une forme affaiblie de coercivité pour l'opérateur de diffusion a permis de dégager, sous les hypothèses simplificatrices précédentes, des classes de fonctions f et σ^2 auxquelles s'applique la méthode :

$$(14) \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sigma^2 \geq c^{te} > 0 \\ D(f) - \frac{1}{2} D^2(\sigma^2) \geq c^{te} \text{ réelle.} \end{cases}$$

Cette classe de fonctions f et σ^2 contient en particulier les polynômes f de degré impair dont le coefficient de plus haut degré est négatif et les fonctions σ^2 qui sont des polynômes de degré pair n'ayant pas de racines réelles et telles que $d^2 \sigma^2 \leq d^2 f - 1$

Avec l'hypothèse (14), le résultat final de convergence est le suivant :

Il existe une sous-suite $\{\rho_\mu\}$ de la suite $\{\rho_n\}$ qui converge faiblement vers ϕ élément de l'espace $L^2(0,T;V)$ où V est l'espace de SOBOLEV d'ordre 1 associé à $L^2(R;p_N)$. ϕ est "solution de l'équation (9)" au sens suivant :

Soit S l'espace des fonctions s réelles de la variable réelle, telles que pour tout polynôme $Q(x)$ et tout entier m

$$\sup_{\substack{x \in R \\ p \leq m}} \left| Q(x) \frac{d^p s(x)}{dx^p} \right| p_N^{1/2} < \infty$$

S étant muni de l'ensemble dénombrable de normes :

$$\|s\|_{(1+x^2)^n, m} = \sup_{\substack{x \in R \\ p \leq m}} (1+x^2)^n \left| \frac{d^p s(x)}{dx^p} \right| p_N^{1/2}$$

peut être considéré comme un espace de fonctions "à décroissance rapide" sur R et tout élément de V définit une "distribution tempérée" sur S .

Alors pour presque tout t dans $[0,T]$ $\phi(t)$ appartient à V et vérifie :

$$\text{pour tout } s \text{ dans } S : \frac{d}{dt} (\phi, s) + (A \phi, s) = 0$$

où A est l'opérateur de diffusion de l'équation de FOKKER-PLANCK.

En d'autres termes plus physiques : la propriété précédente nous assure que chaque quasimoment associé à ρ_μ tend vers le quasimoment associé à ϕ

4 - Résultats numériques

L'algorithme de résolution de l'équation de FOKKER-PLANCK a été appliqué à l'exemple de la boucle de phase du 1er ordre.

$$dx = -K \sin x \, dt + dw$$

pour lequel on connaît la densité de probabilité de l'état en régime établi. Celle-ci est donnée par (cf VITERBI [13] et VAN TREES [14])

$$p(x) = \frac{\exp(2K \cos x)}{\int_{-\pi}^{+\pi} \exp(2K \cos x) \, dx}$$



UN ALGORITHME DE RESOLUTION PAR QUASI MOMENTS
DE L'EQUATION DE FOKKER-PLANCK
SON APPLICATION AU FILTRAGE OPTIMAL (*)

Bien que ce processus n'entre pas dans la classe pour laquelle les résultats de convergence ont été établis, l'on peut montrer que l'algorithme est stable en dessous d'une valeur limite de bruit obtenue au quatrième ordre pour $K = 1,5$.

Les tableaux I et II présentés ci-dessous donnent les valeurs limite de la variance et des différents quasi-moments pour les premiers ordres d'approximation avec comme références :

- a) - les valeurs exactes calculées d'après l'expression de $p(x)$
- b) - les valeurs obtenues en assimilant $\sin x$ à x , dans ce dernier cas l'analyse de la boucle donne une variance $\Sigma = \frac{1}{2K}$

		Σ $\times 10^2$	$M_{4,4}$ $\times 10^4$	$M_{6,6}$ $\times 10^5$	$M_{8,8}$ $\times 10^6$
Modèle exact		8,717	7,711	7,136	4,255
Modèle linéarisé		8,333	0	0	0
Résolution par quasimoments à l'ordre :	2	8,704	0	0	0
	4	8,717	7,621	0	0
	6	8,717	7,700	6,348	0
	8	8,717	7,710	7,062	3,721
	10	8,717	7,711	7,120	4,133

Tableau I : Valeurs des quasimoments pour $K = 6$

		Σ $\times 10$	$M_{4,2}$ $\times 10^2$	$M_{6,2}$ $\times 10^2$
Modèle exact		2,983	6,124	12,96
Modèle linéarisé		2,500	0	0
Résolution par quasimoments à l'ordre :	2	2,890	0	0
	4	2,982	4,797	0
	6	2,983	6,650	10,8

Tableau II : Valeurs des quasimoments pour $K = 2$

Les valeurs obtenues montrent l'efficacité de la méthode et permettent de conclure à une bonne précision sur les premiers moments dès l'ordre 4.

III - RESOLUTION DE L'EQUATION DE FILTRAGE

L'équation de filtrage (1) est résolue par la méthode qui a été utilisée pour l'équation de FOKKER-PLANCK.

En posant $p(x,t,\omega) = \rho(x,t,\omega) p_N(x,t,\omega)$

on obtient l'équation aux dérivées partielles en

$$\rho(x,t,\omega) :$$

$$(15) \frac{1}{p_N} \left\{ d(\rho p_N) \right\} + \left\{ D(f\rho) - \frac{1}{2} D^2(\sigma^2\rho) \right\} dt$$

$$= (dz - \int_R h \rho p_N dx) \frac{1}{R} (h - \int_R h \rho p_N dx) \rho$$

qui est ensuite approximée à l'ordre n par l'équation :

$$(16) \frac{1}{p_N} \left\{ d(\rho_n p_N) \right\}_n + \left\{ D(f_n \rho_n) - \frac{1}{2} B^2(\sigma_n^2 \rho_n) \right\}_n dt$$

$$= (dz - \int_R h_n \rho_n p_N dx) \frac{1}{R} \left(h_n \rho_n \left\{ \rho_n - \rho_n \right\} h_n \rho_n \right)_n$$

En utilisant le calcul d'ITO et en notant que x et Σ sont des processus de diffusion,

$$(17) d(\rho_n p_N) = \frac{\partial \rho_n}{\partial t} p_N dt + \rho_n \left[d\tilde{x} \frac{K_1}{\Sigma} + d\Sigma \frac{K_2}{2\Sigma^2} \right] p_N$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 (\rho_n p_N)}{\partial x^2} \sigma_x^2 + 2 \frac{\partial^2 (\rho_n p_N)}{\partial x \partial \Sigma} \sigma_x \sigma_\Sigma + \frac{\partial^2 (\rho_n p_N)}{\partial \Sigma^2} \sigma_\Sigma^2 \right\} dt$$

où σ_x et σ_Σ sont définis par :

$$d\tilde{x} = \dots dt + \sigma_x dw$$

$$(18) d\Sigma = \dots dt + \sigma_\Sigma dw$$

Après simplification on obtient :

$$(19) \frac{1}{p_N} d(\rho_n p_N) = \frac{\partial \rho_n}{\partial t} dt + \rho_n \left[d\tilde{x} \frac{K_1}{\Sigma} + d\Sigma \frac{K_2}{2\Sigma^2} \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ D^2(\rho_n) \sigma_x^2 - D^3(\rho_n) \sigma_x \sigma_\Sigma + \frac{D^4(\rho_n)}{4} \sigma_\Sigma^2 \right\}$$

Comme précédemment, soit M_k , P_k et Q_k les quasimoments associés à ρ_n , $f_n \rho_n$, $\sigma_n \rho_n$ et $h_n \rho_n$.



L'annulation des quasimoments M_1 et M_2 entraîne :

$$(20) \quad d\hat{x} = \dots dt + (dz - \rho_0 dt) \frac{1}{R} \rho_1$$

$$d\Sigma = \dots dt + (dz - \rho_0 dt) \frac{1}{R} \rho_2$$

et par identification de (20) et de (18)

$$\sigma_x^2 = \frac{\rho_1^2}{R}; \quad \sigma_\Sigma^2 = \frac{\rho_2^2}{R}; \quad \sigma_x \sigma_\Sigma = \frac{\rho_1 \rho_2}{R}$$

L'équation (19) est équivalente au système différentiel :

$$d\hat{x} = N_0 dt + (dz - \rho_0 dt) \frac{\rho_1}{R}$$

$$d\Sigma = (2N_1 + P_0 - \frac{\rho_1^2}{R}) dt + (dz - \rho_0 dt) \frac{\rho_2}{R}$$

$$M_0 = 1, \quad M_1 = 0; \quad M_2 = 0$$

$$dM_3 = 3N_2 dt + 3P_1 dt - 3 \frac{\rho_1 \rho_2}{R} dt$$

$$+ (dz - \rho_0 dt) \frac{1}{R} (\rho_3 - \rho_0 M_3)$$

(21) et pour $k \geq 4$:

$$dM_k = k (N_{k-1} dt - d\hat{x} M_{k-1})$$

$$+ \frac{k(k-1)}{2} (P_{k-2} dt - d\Sigma M_{k-2})$$

$$- \frac{1}{2} \left\{ k(k-1) \frac{\rho_1^2}{R} M_{k-2} + k(k-1)(k-2) \frac{\rho_1 \rho_2}{R} M_{k-3} \right.$$

$$\left. + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4} \frac{\rho_2^2}{R} M_{k-4} \right\}$$

$$+ (dz - \rho_0 dt) \frac{1}{R} (\rho_k - \rho_0 M_k) .$$

N_k , P_k et ρ_k s'expriment linéairement en fonction des quasimoments M_k et des coefficients du développement de f , σ^2 et h par la formule (7).

Résultats de convergence

Des résultats de convergence semblables à ceux trouvés pour la résolution de l'équation de FOKKER-PLANCK sont en cours d'établissement.

Relation entre le filtre à quasimoments d'ordre 2 et le filtre de SUNAHARA [12]

Le filtre de SUNAHARA est donné par les équations :

$$(22) \quad \begin{cases} d\hat{x} = a_0 dt + \Sigma b_1 \frac{1}{R} (dz - b_0 dt) \\ d\Sigma = dt \left\{ 2a_1 \Sigma + c_0 - b_1^2 \frac{\Sigma^2}{R} \right\} \end{cases}$$

où a_i est le i -ème coefficient de f

b_i le i -ème coefficient de h

c_i le i -ème coefficient de σ^2

Le filtre à quasimoment d'ordre 2 est donné par

$$(23) \quad \begin{cases} d\hat{x} = N_0 dt + (dz - \rho_0 dt) \frac{\rho_1}{R} \\ d\Sigma = (2N_1 + P_0 - \frac{\rho_1^2}{R}) dt + (dz - \rho_0 dt) \frac{\rho_2}{R} \end{cases}$$

$$\text{et } M_0 = 1; \quad M_1 = 0; \quad M_2 = 0$$

comme $\rho_n = 1; \quad N_0 = a_0; \quad \rho_0 = b_0; \quad P_0 = c_0$

$$N_1 = a_1 \Sigma; \quad \rho_1 = b_1 \Sigma; \quad P_1 = c_1 \Sigma,$$

et les deux filtres (22) et (23) sont identiques à condition de poser $\rho_2 = 0$ ou encore de développer h à l'ordre 1 et non pas à l'ordre 2.

Résultats numériques

L'algorithme de filtrage à quasimoments a été programmé sur l'exemple suivant :

$$\text{processus : } dx = -K x^3 dt + \sigma dw$$

$$\text{mesures : } dz = x dt + r dw'$$

et comparé à l'algorithme de SUNAHARA [12] dont des expérimentations antérieures ont permis de montrer qu'il constituait le meilleur des filtres non-linéaires du second ordre.

Les résultats obtenus montrent que dans tous les cas :

a) - l'estimée \hat{x}_4 obtenue par le filtre à quasimoments du n° ordre est toujours plus proche de l'état du processus que celle (\hat{x}_2) obtenue par le filtre de SUNAHARA ;



UN ALGORITHME DE RESOLUTION PAR QUASI MOMENTS
DE L'EQUATION DE FOKKER-PLANCK
SON APPLICATION AU FILTRAGE OPTIMAL (*)

b) - la variance d'erreur d'estimation Σ_4 du filtre à quasimoments est toujours plus faible que celle (Σ_2) donnée par le filtre de SUNAHARA.

Les figures 1 et 2 représentent chacune l'état $x(t)$ et les estimées $\hat{x}_2(t)$ et $\hat{x}_4(t)$ pour une réalisation.

Elles correspondent aux valeurs numériques suivantes : $K = 1$; $\sigma = 0$ et $r = 0,5$. A partir de $t = 0,5$ s \hat{x}_4 est beaucoup plus proche de x que ne l'est \hat{x}_2 . Il est à noter que le choix d'un bruit nul sur l'état ($\sigma = 0$) entraîne une convergence très lente des estimées vers l'état.

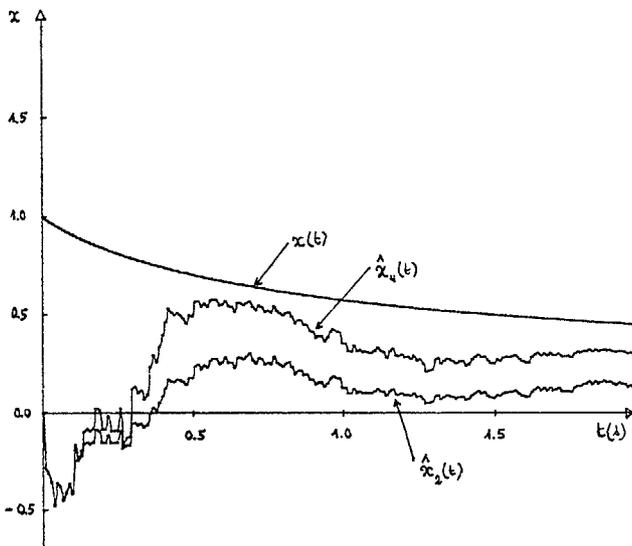


Figure 1 : première réalisation de $x(t)$, $\hat{x}_2(t)$ (SUNAHARA) et $\hat{x}_4(t)$ (filtre à quasimoments d'ordre 4). $K = 1$, $\sigma = 0$, $r = 0,5$

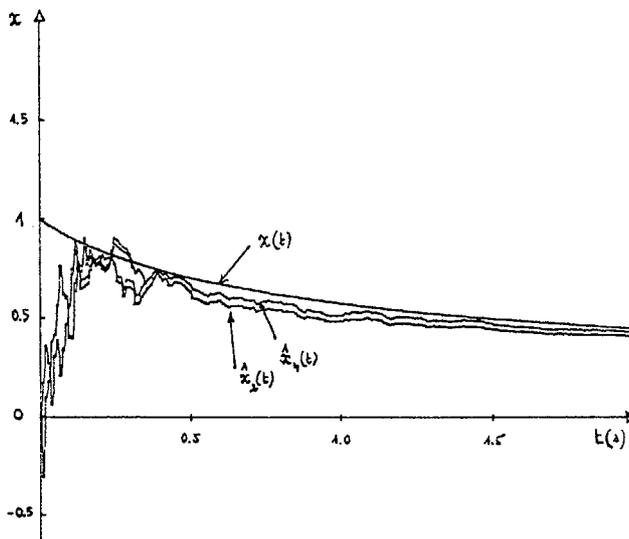


Figure 2 : deuxième réalisation pour $K = 1$, $\sigma = 0$, $r = 0,5$

CONCLUSION

Les algorithmes de résolution des équations de FOKKER-PLANCK et de filtrage présentés dans cet article permettent un important gain de précision sur les méthodes basées sur une simple linéarisation. L'on a de plus pû montrer que dès l'ordre 4 on obtenait une excellente précision pour une classe très large de cas.

Ces algorithmes sont cependant plus rapides et plus simples à programmer que les algorithmes à quasimoments déjà existants ([7] et [8]).

De par leurs équations ces algorithmes s'éten- dent sans difficulté au cas où le processus est multidimensionnel et grâce à leur faible encombrement mémoire devraient pouvoir être utilisés jus- qu'à des dimensions du vecteur d'état de 5 à 10.

Les algorithmes à un ordre élevé ne sont bien sûr programmables que sur ordinateurs de grande capacité mais peuvent être utilisés comme référence pour des algorithmes moins performants.

Aux ordres 3 et 4 l'algorithme de filtrage peut être utilisé à des fins opérationnelles.

REMERCIEMENTS :

Les auteurs remercient Monsieur le Professeur R. FORTET, Ingénieur-Conseil au Laboratoire Central de Télécommunications, pour ses nombreux encourage- ments au cours du développement de cette étude.



BIBLIOGRAPHIE
=====

- (1) - H.J. KUSHNER :
" On the differential equations satisfied by conditional probability densities of Markov processes, with applications " SIAM Journal on Control-Serie A - Vol.2 n° 1 pp 106 - 119 (1964)
- (2) - R.L. STRATONOVITCH :
" Conditional Markov processes". Theor. Probability Appl. 5, pp 156 - 178 (1960).
- (3) - A.H. JAZWINSKI :
" Stochastic Processes and Filtering Theory" Acad. Press. (1970).
- (4) - L. SCHWARTZ :
" Non-linear Filtering and Comparison with Kalman Filtering ". AGARDograph 139 pp 145-161 (1970).
- (5) - R.S. BUCY et K.D. SENNE :
" Digital Synthesis of non-linear Filters" Automatica 7, pp 287- 298 (1971).
- (6) - A.J. MALLINCKRODT, R.S. BUCY et S.Y. CHENG :
" Final Project Report for a Design Study for an Optimal Non-linear Receiver/ Demodulator NASA Contract NAS 5 - 10789, Goddard Space Flight Center, Maryland,(1970).
- (7) - J.R. FISHER :
" Conditional Probability Density Functions and Optimal Non-linear Estimation". Ph. D. Dissertation, Department of Engineering, University of California, Los Angeles (1966)
- (8) - P.I. KUZNETSOV, R.L. STRATONOVITCH et V.I. TIKHONOV :
" Some Problems with conditional Probability and Quasi-moment Functions". Theor. Probability Appl. 6 (4) , pp 422-427 (1961).
- (9) - M.L. DASHEVSKII :
" Method of Semi-Invariants in the Non-linear Filtering of Markov Processes". Automatika i Telemekhanika n° 7 pp 24-32 . Juillet 1968.
- (10) - H. CRAMER :
" Mathematical Methods of Statistics" Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. (1961).
- (11) - C.A. DARMON :
" Polynômes de Régression en Moyenne Quadratique d'une Fonction de Variable Gaussienne". Revue du CETHEDDEC n° 37 pp 1.20 - 4ème trimestre 1973.
- (12) - Y. SUNAHARA :
" An Approximate Method of State Estimation for Non-linear Dynamical Systems". Journal of Basic Engineering, June 1970 pp 385-393.
- (13) - A.J. VITERBI :
" Principles of Coherent Communications" pp. 76-95 Mac Graw Hill - (1966).
- (14) - H.L. VAN TREES :
" Detection, Estimation and Modulation Theory". Part II pp. 55-62. J. Wiley (1971).