COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL
ET SES APPLICATIONS

NICE du 16 au 21 JUIN 75

ETUDE D'UNE CLASSE DE DISTRIBUTIONS LIMITES

G. BANON - A. FOURNIE

Laboratoire d'Automatique et d'Analyse des Systèmes du C.N.R.S.
7, Avenue du Colonel Roche - 31400 Toulouse - France

RESUME

Dans une première partie, on étudie la densité de probabilité $f_{y(k)}(z)$ de la sortie y à l'instant k d'un système dynamique linéaire et discret, parfaitement connu, initialement au repos ($y(k)=0$ $\forall k<0$), soumis à partir de l'instant 0 à une entrée aléatoire e uniformément répartie entre $\pm\frac{1}{2}$.

Une expression de $f_{y(k)}(z)$ est donnée en fonction de la réponse impulsionnelle du système.

Dans une deuxième partie on étudie quelques propriétés de $f_{y(k)}(z)$. Par un calcul de cumulants on vérifie que la densité limite de $f_{y(k)}(z)$ pour k infini existe et est unique. Enfin, dans le cas des systèmes du premier ordre, on établit que cette densité limite satisfait l'équation différentielle $f'(u)=\frac{1}{\alpha}f\left(\frac{u}{\alpha}\right)$ pour $u\leqslant 1$.

Dans une dernière partie on donne quelques résultats numériques obtenus par programmation de l'algorithme de calcul de $f_{y(k)}(z)$.

SUMMARY

In part one, one studies the probability density function $f_{y(k)}(z)$ of the output y, at time k, of a known linear discrete dynamical system with zero initial condition ($y(k)=0$ $\forall k<0$), when a uniformly distributed random signal e is applied as an input.

An explicit expression of $f_{y(k)}(z)$ is given in terms of the delta response.

In part two, some properties of $f_{y(k)}(z)$ are studied. Using the expression of the cumulants, it can be verified that the limit of $f_{y(k)}(z)$ exists and is unique, as k goes to infinity.

For the first order systems, it is shown that this limit is a solution of the diferential equation $f'(u)=\frac{1}{\alpha}f\left(\frac{u}{\alpha}\right)$ for $u\leqslant 1$

Finally, some numerical results obtained by algorithm implementation of $f_{y(k)}(z)$ are given.

PREMIERE PARTIE

INTRODUCTION

On sait que pour les systèmes linéaires invariants, l'application à l'instant zéro d'une entrée strictement stationnaire, produit une sortie asymptotiquement stationnaire.

On se propose ici d'étudier, pour un cas particulier d'entrée strictement stationnaire (cas d'une entrée uniformément distribuée), la densité de probabilité de la sortie à chaque instant et après un temps infini.

Le choix d'un tel type d'entrée peut être intéressant dans certaines applications où les seules connaissances a priori que l'on peut avoir sur l'entrée sont les bornes inférieures et supérieures entre lesquelles l'entrée est toujours située.

Plus précisément, soit le système dynamique linéaire et discret représenté par l'équation aux différences :

(1) $\alpha_p y(k) + \alpha_{p-1} y(k-1) + \cdots + \alpha_0 y(k-p) = u(k)$

où p est l'ordre du système
$u(k)$ l'entrée à l'instant
$y(k)$ la sortie à l'instant
α_i les paramètres du système
(on suppose $\alpha_p = 1$).

Soit $a(k)$ la réponse impulsionnelle du système (réponse du système initialement au repos auquel on applique à l'instant zéro la séquence d'entrée $1, 0, 0, \ldots$).

On sait que l'expression de la sortie du système soumis depuis l'instant zéro à une séquence d'entrée $u(0), u(1), \ldots u(k)$ quelconque est donnée par :

(2) $$y(k) = \sum_{i=0}^{k} a(i)\, u(k-i).$$

On se propose donc d'étudier les propriétés probabilistes de la sortie du système soumis à une séquence d'entrée aléatoire $e(0), e(1), \ldots$ $\ldots e(k)$ indépendante ; où les $e(i)$ sont identiquement distribués suivant la densité

(3) $$f_e(z) = \begin{cases} 0 & \text{pour } z \geq \frac{1}{2} \text{ et } z < -\frac{1}{2} \\ 1 & \text{pour } -\frac{1}{2} \leq z < \frac{1}{2} \end{cases}$$

On note $f_{y(k)}(z)$ la densité de la sortie.

CALCUL DE $f_{y(k)}(z)$

Pour établir l'expression de la densité de la sortie à l'instant k, connaissant parfaitement l'état du système à l'instant 0 (ici on a choisi le système au repos), on peut utiliser plusieurs techniques mathématiques, par exemple employer la technique de la transformée de Fourier. Ici on se sert principalement des propriétés des fonctions Gamma et Bêta.

Rappels :

Soit $U_{-k}(z)$ la fonction définie par

(4) $$U_{-k}(z) = \begin{cases} 0 & \text{pour } z < 0 \\ \dfrac{z^{k-1}}{(k-1)!} & \text{pour } z \geq 0 \end{cases}$$

En utilisant les propriétés des fonctions Gamma et Bêta, on démontre ([1] page 114) le résultat suivant :

(5) $$U_{-\lambda}(z) * U_{-\mu}(z) = U_{-(\lambda+\mu)}(z)$$

où $*$ désigne un produit de convolution.

Dans le cas de fonction translatée, on démontre, par un changement de variable que :

(6) $$U_{-\lambda}(z+\alpha) * U_{-\mu}(z+\beta) = U_{-(\lambda+\mu)}(z+\alpha+\beta)$$

CALCUL DE $f_{y(k)}(z)$ PROPREMENT DIT

D'après (2) la sortie peut s'exprimer comme la somme de $k+1$ variables aléatoires :

(7) $$y(k) = \sum_{i=0}^{k} a(i)\, e(k-i).$$

A cause de la propriété d'indépendance de la séquence d'entrée la densité de la sortie peut s'écrire :

(8) $$f_{y(k)}(z) = f_{a(0)e}(z) * f_{a(1)e}(z) * \cdots * f_{a(k)e}(z).$$

D'après (3) et (4) la densité de probabilité $f_{a(i)e}(z)$ a son tour peut s'écrire :

(9) $$f_{a(i)e}(z) = \frac{1}{a(i)}\left(U_{-1}\left(z + \frac{a(i)}{2}\right) - U_{-1}\left(z - \frac{a(i)}{2}\right)\right),$$

finalement, en utilisant le résultat donné en (6), on obtient l'expression cherchée de la densité de probabilité de la sortie à l'instant k ;

$$\boxed{(10) \quad f^{p}_{y(k)}(z) = \frac{1}{\prod_{i=0}^{k} a(i)} \sum_{i=0}^{2^{k+1}-1} S(i)\, U_{-(k+1)}\left(z + \frac{b(i)}{2}\right). \qquad \forall k = 0, 1, 2, \dots}$$

où
$$\begin{array}{ll} b(0) = a(0) + \cdots + a(k-1) + a(k) & S(0) = 1 \\ b(1) = a(0) + \cdots + a(k-1) - a(k) & S(1) = -1, \\ b(2) = a(0) + \cdots - a(k-1) + a(k) & S(2) = -1, \\ b(3) = a(0) + \cdots - a(k-1) - a(k) & S(3) = 1, \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

et d'une manière générale :

$$b(i) = \sum_{j=0}^{k} 2\left(\frac{1}{2} - i_j\right) a(j)$$

et

$$S(i) = \prod_{j=0}^{k} 2\left(\frac{1}{2} - i_j\right),$$

avec i_j tel que : $i = \sum_{j=0}^{k} i_j 2^{k-j} = \overline{i_0\, i_1 \cdots i_k}$ (écriture en base 2).

Cas particulier du 1er ordre :

Il est intéressant de voir ce que devient l'expression générale (10) dans le cas du 1er ordre ($p=1$) avec $\alpha_0 = -\frac{1}{2}$, la réponse impulsionnelle devient alors :

$$a(k) = \frac{1}{2^k}$$

on trouve ainsi :

$$(11) \quad f^{p}_{y(k)}(z) = 2^{\frac{k(k+1)}{2}} \sum_{i=0}^{2^{k+1}-1} S(i)\, U_{-(k+1)}\left(z + 1 - \frac{1}{2^{k+1}} - \frac{i}{2^k}\right)$$

En utilisant la définition (4), le résultat précédent (11) peut se mettre sous la forme suivante:

$$(12) \quad f_{y(k)}(z) = \frac{2^{\frac{k(k+1)}{2}}}{k!} \sum_{i=0}^{[z2^k + 2^k - \frac{1}{2}]} S(i)\left(z + 1 - \frac{1}{2^{k+1}} - \frac{i}{2^k}\right)^k$$

pour $|z| \leq 1 - \frac{1}{2^{k+1}}$,

et $\qquad = 0 \qquad$ pour $|z| > 1 - \frac{1}{2^{k+1}}$,

où les crochets $[\cdot]$ représentent l'opérateur "partie entière de".

DEUXIEME PARTIE

QUELQUES PROPRIETES DE $f^{p}_{y(k)}(z)$

On montre sans difficultés que :

1) $f^{p}_{y(k)}(z) = f^{p}_{y(k)}(-z)$ (parité),

2) $f^{p}_{y(k)}(z)$ est uniformément continue pour $k > 0$

3) $f^{p}_{y(k)}(z) = 0$ pour $z < -\sum_{i=0}^{k} \frac{|a(i)|}{2}$,

ou $z \geq \sum_{i=0}^{k} \frac{|a(i)|}{2}$

(support borné),

4)

$$(13) \quad M_{y(k)}(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{hz} f^{p}_{y(k)}(z)\, dz = \prod_{i=0}^{k} \frac{\operatorname{sh} \frac{a(i)h}{2}}{\frac{a(i)h}{2}}$$

(fonction génératrice des moments).

DENSITE LIMITE

Un important et intéressant problème est celui de l'étude de la densité limite obtenue en faisant k infini.

On se propose de vérifier qu'une telle densité limite que l'on note $f^{p}_{y(\infty)}(z)$ ou $f_y(z)$ existe et est unique.

A partir de (13), par exemple, on peut calculer la fonction génératrice des cumulants de la sortie, on trouve :

(14)

$$K_{y(k)}(h) = \operatorname{Log} M_{y(k)}(h) = \sum_{i=0}^{r} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} B_r \frac{a^{2r}(i)}{2r} \frac{h^{2r}}{(2r)!}$$

où les B_r sont des nombres positifs (appelés nombres de Bernoulli) qui apparaissent dans le développement en série entière de :

$$(15) \quad 1 - \frac{h}{2} \cot g \frac{h}{2} = \sum_{r=1}^{\infty} B_r \frac{h^{2r}}{(2r)!}$$

Les premiers nombres de Bernoulli sont :

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30}$$

En faisant k infini dans (14) on trouve la fonction génératrice limite :

$$(16) \quad K_y(h) = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} B_r \frac{h^{2r}}{(2r)!} \frac{1}{2r} \sum_{i=0}^{\infty} a^{2r}(i)$$

Pour s'assurer que la série entière (16) est convergente on démontre qu'elle est absolument convergente.

A condition que le système linéaire (1) soit strictement stable ; c'est-à-dire que

(17) $$\sum_{i=0}^{\infty} |a(i)| < \infty$$

on a :

$$\exists I \quad i > I \implies |a(i)| \leq 1,$$

et $$\exists R \quad r > R \implies \frac{1}{2r} \sum_{i=I}^{\infty} a^{2r}(i) \leq 1,$$

ce qui permet d'établir (pour tout h), que :

(18)

$$B_r \frac{h^{2r}}{(2r)!} \frac{1}{2r} \sum_{i=0}^{\infty} a^{2r}(i) \leq \sum_{i=0}^{I-1} B_r \frac{(h\,a(i))^{2r}}{(2r)!} + B_r \frac{h^{2r}}{(2r)!}$$

Puisque dans le second membre de l'inégalité (18) on reconnaît la somme de $I+1$ termes généraux de séries entières du type (15) et donc convergentes on a vérifié une condition suffisante de convergence absolue de la fonction génératrice des cumulants.

L'expression (16) fournit les cumulants:

(19) $$K_{2r} = \frac{B_r}{2r} \sum_{i=0}^{\infty} a^{2r}(i)$$

et $K_{2r+1} = 0$ pour $r > 0$

Dans le cas du premier ordre ($p=1$) avec $\alpha_0 = -\frac{1}{2}$, les premiers cumulants de la densité $f_y(z)$ sont :

$$K_2 = \frac{1}{9} = \sigma_y^2 = 0.1111,$$
$$K_4 = -\frac{2}{225} = -0.0089,$$
$$K_6 = \frac{8}{63^2} = 0.0020, \ldots$$

Finalement puisque la fonction génératrice limite existe et est unique, et que dans ce cas les cumulants définissent de manière unique la densité de probabilité on conclue que la densité limite $f_y(z)$ existe et est unique.

On établit maintenant, dans le cas du premier ordre ($p=1$) avec $\alpha_0 = -\alpha$, que cette densité limite satisfait une équation différentielle fonctionnelle particulière.

En écrivant, à partir de (1) et de (2), $y(k+1)$ sous deux formes différentes on a :

(20) $$\sum_{i=0}^{k} \alpha^i e(k+1-i) + \alpha^{k+1} e(0) = \alpha\, y(k) + e(k+1)$$

Comme conséquence de l'indépendance de la séquence d'entrée on obtient l'équation de convolution :

(21) $$f_{y(k)}(z) * f_{\alpha^{k+1}e}(z) = f_{\alpha y(k)}(z) * f_e(z)$$

En tenant compte de la forme de la densité de l'entrée (3), l'expression (21) devient :

(22) $$\frac{1}{\alpha^{k+1}} \int_{-\frac{\alpha^{k+1}}{2}}^{\frac{\alpha^{k+1}}{2}} f_{y(k)}(z-x)\,dx = f_{\alpha y(k)}(z) * f_e(z)$$

Enfin, sachant que $f_{y(k)}(z)$ est uniformément continue pour tout $k > 0$ et admet $f_y(z)$ comme limite lorsque k est infini, on trouve que cette fonction limite vérifie l'équation de convolution :

(23) $$f_y(z) = f_{\alpha y}(z) * f_e(z)$$

AUTRES ECRITURES DE L'EQUATION FONCTIONNELLE

En utilisant la propriété (3) relative à la densité de l'entrée, l'équation (23) peut se mettre sous la forme de l'équation différentielle :

(24) $$f_y'(z) = \frac{1}{\alpha} f_y\left(\frac{z}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha} f_y\left(\frac{z}{\alpha} - \frac{1}{2\alpha}\right)$$

Finalement, en désignant par $f(z)$ la densité de la variable aléatoire $y + \frac{1}{2(1-\alpha)}$, et en utilisant le fait que cette densité est nulle pour $z < 0$ on trouve que cette densité translatée vérifie l'équation différentielle simplifiée :

(25) $$f'(z) = \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{z}{\alpha}\right)$$

pour $z \leq 1$.

TROISIEME PARTIE

A partir des expressions (4) et (10) on peut construire un algorithme de calcul de la densité de la sortie à l'instant k. Cet algorithme a été programmé sur minicalculateur HP 9810A.

A titre d'exemple, on donne le résultat du calcul de $f_{y(4)}(z)$, sous forme graphique dans le cas d'un système du 1er ordre ($p = 1$) avec $\alpha_0 = -\frac{1}{2}$ (cf. figure 1) puis avec $\alpha_0 = -.8$ (cf. figure 2), et enfin dans le cas d'un système du 2ème ordre ($p = 2$) avec $\alpha_1 = -1.5$ et $\alpha_0 = .7$ (cf. figure 3).

REFERENCE

[1] I. M. GUELFAND et G. E. CHILOV
Les distributions, Tome 1
DUNOD (1972).

BIBLIOGRAPHIE (et sujets d'intérêt)

[1] G. CAGNAC
Mathématiques spéciales, Tome 2, Analyse. Masson et Cie (1961).
(Intégrale fonction d'une extrémité du segment d'intégration page 166).

[2] H. CRAMER
Mathematical methods of statistics.
Princeton University Press (eleventh printing 1966).
(Sequence of moments page 176).

[3] W. B. DAVENPORT and W. L. ROOT
An introduction to the theory of random signals and noise.
Mc Graw Hill (1958).
(Derivatives of impulse functions page 369).

[4] N. I. JOHNSON and S. KOTZ
Discrete distributions.
Houghton Mifflin (1969).
(Bernoulli numbers page 10).

[5] N. L. JOHNSON and S. KOTZ
Continuous univariable distributions - 2
Houghton Mifflin (1970).
(Uniform or rectangular distribution page 57).

[6] E. S. KEEPING
Introduction to statistical inference.
D. Van Nostrand (1962).
(Bernoulli numbers page 395).

[7] A. PAPOULIS
Probability, random variables and stochastic processes.
Mc Graw Hill (1965).
(Stationary processes page 300).

[8] A. RENYI
Calcul des probabilités
Dunod (1966).
(Composition des distributions page 180).

[9] L. A. ZADEH and C. A. DESOER
Linear system theory.
Mc Graw Hill (1963).
(Stability of discrete time systems page 491).

10 W. FELLER
An introduction to probability theory and its applications.
Volume II.
John Wiley and Sons (1966) (p. 26-27)

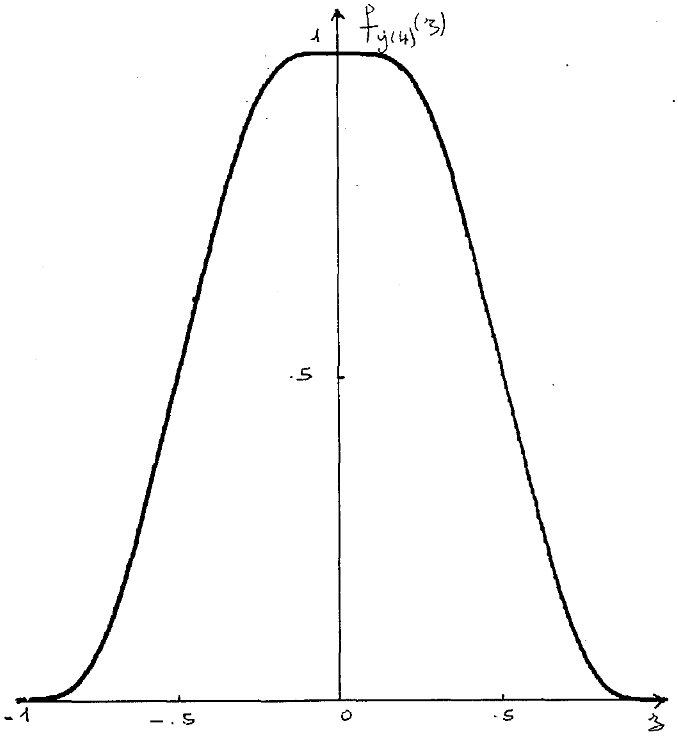

Figure 1 - Tracé de la densité de probabilité de la sortie à l'instant $k = 4$ dans le cas :

$p = 1$

$\alpha_0 = -\frac{1}{2}$

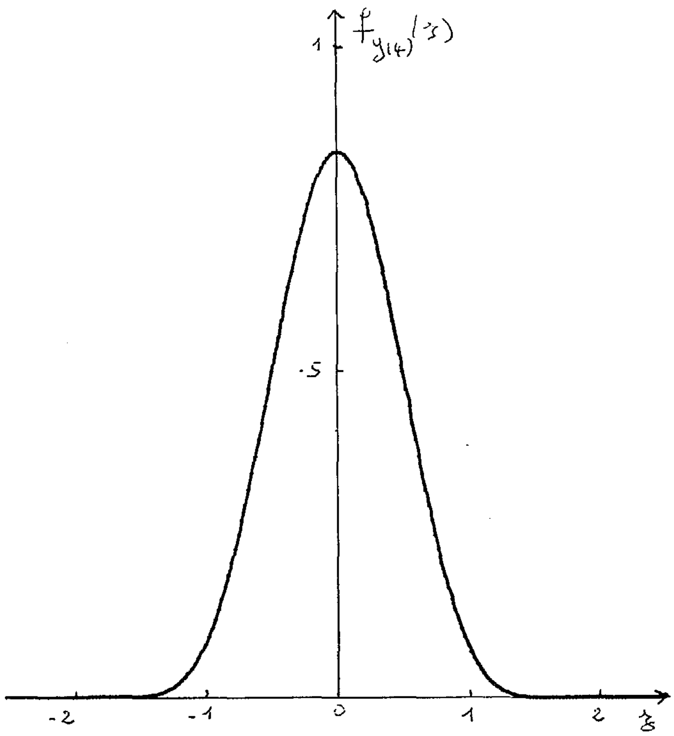

Figure 2 - Tracé de la densité de probabilité de la sortie à l'instant $k = 4$ dans le cas :

$p = 1$

$\alpha_0 = -.8$

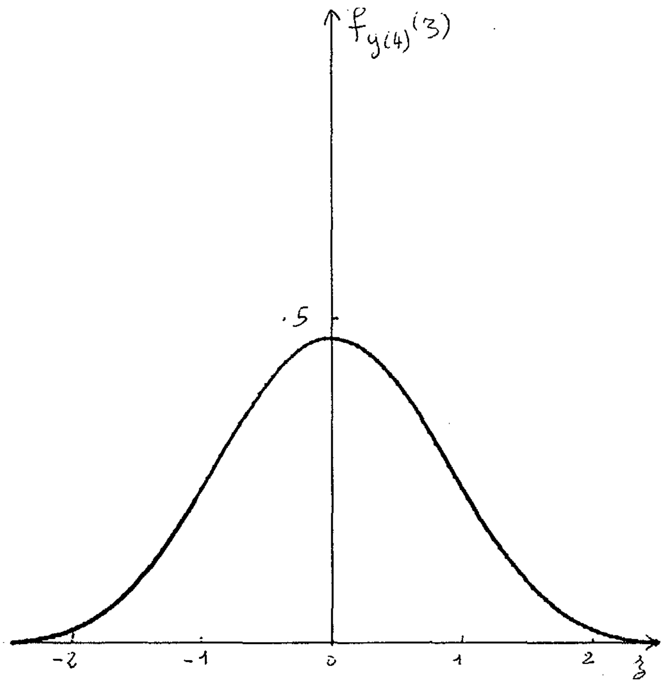

Figure 3 - Tracé de la densité de probabilité de la sortie à l'instant $k = 4$ dans le cas :

$p = 2$

$\alpha_1 = -1.5$

$\alpha_0 = .7$