COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL
ET SES APPLICATIONS

NICE du 16 au 21 JUIN 75

APPLICATION DES PROBABILITES GEOMETRIQUES AU POSITIONNEMENT D'UN RESEAU FIXE DE DETECTEURS

Alain de QUAY

Société d'Etudes et Conseils AERO 3, avenue de l'Opéra 75001 PARIS

RESUME

Soit une zone dont la frontière est un polygone convexe et qui doit être traversée par des mobiles dont les trajectoires sont des lignes droites quelconques, coupant deux côtés quelconques du polygone.

On veut placer à l'intérieur de cette zone un réseau fixe de détecteurs dont les rayons de détection sont connus, de façon à maximiser la probabilité de détection des mobiles par le réseau.

La probabilité de détection correspondant aux trajectoires coupant deux côtés du polygone est égale au rapport de la mesure de l'ensemble des droites coupant à la fois les deux côtés et au moins un des cercles de détection, sur la mesure de l'ensemble des droites coupant à la fois les deux côtés. Ces mesures peuvent se calculer automatiquement à partir d'une théorie ébauchée au 19ème siècle en généralisant la solution du fameux "problème de l'aiguille de Buffon".

L'exploitation d'un programme informatique permet de rechercher le nombre de détecteurs et leurs positions optimales pour une probabilité de détection minimale donnée.

SUMMARY

Consider an area whose frontier is a convex polygon and which is to be crossed by moving bodies whose trajectories are any straight lines intersecting any two sides of the polygon.

We want to place inside this area a fixed array of detectors whose radii of detection are known, so as to maximize the probability of detection of the moving bodies by this array.

The probability of detection corresponding to the trajectories intersecting two sides of the polygon equals the ratio of the measure of the set of straight lines intersecting these two sides and at least one of the circles of detection over the measure of the set of straight lines intersecting these two sides. These measures can be computed automatically from a theory outlined in the 19th century by generalizing the solution of the famous "Buffon's problem of the needle".

The exploitation of a software program gives the number of detectors and their optimal positions for a given minimal probability of detection.

1.- INTRODUCTION

Soit une zone géographique limitée par un polygone convexe. Cette zone doit être traversée par des mobiles dont les trajectoires sont des lignes droites quelconques. On veut placer à l'intérieur de cette zone un réseau fixe de detecteurs dont les rayons de détection sont connus et pas nécessairement égaux, de façon à maximiser la probabilité de détection pour l'ensemble des mobiles traversant possibles.

Il s'agit alors d'optimiser le nombre et la position des détecteurs placés dans la zone. Le problème posé est purement géométrique : quelle est la probabilité qu'une droite quelconque d'un certain ensemble de droites, coupe un au moins parmi plusieurs domaines ? Les domaines étant les cercles de rayons égaux à la portée des détecteurs et l'ensemble des droites étant l'ensemble de toutes les sécantes possibles de deux côtés quelconques du polygone, par exemple, ou l'ensemble de toutes les sécantes possibles du polygone.

2.- MESURE D'UN ENSEMBLE

En calcul des probabilités, la principale difficulté est le choix des probabilités élémentaires permettant de définir exactement le problème. Pour les problèmes géométriques, il est nécessaire que le résultat du calcul reste inchangé par un déplacement d'ensemble de la figure, constituant ainsi une propriété intrinsèque de cette figure.

Ceci rattache les probabilités géométriques à la théorie de la mesure des ensembles.

La mesure d'un ensemble est un nombre attaché à l'ensemble et vérifiant les conditions suivantes :

a. Ce nombre est positif ou nul.

b. Deux ensembles superposables ont même mesure.

c. La mesure d'un ensemble formé par la réunion d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles sans parties communes deux à deux est égale à la somme des mesures de ces ensembles.

Pour les problèmes de probabilités portant sur des droites prises au hasard dans le plan, ces trois conditions conduisent à la probabilité élémentaire égale au produit :

$$dp \cdot d\theta$$

si une droite du plan est représentée par son équation canonique :

$$x \cos\theta + y \sin\theta - p = 0$$

3.- SECANTES D'UN CONTOUR

On peut donc associer à tout ensemble (E) de droites :

$$x \cos\theta + y \sin\theta - p = 0$$

l'ensemble (E') des points (p, θ) : (E) sera mesurable si (E') est mesurable.

(E') constitue l'ensemble des pieds des perpendiculaires issues de l'origine, aux droites de l'ensemble (E).

Prenons, par exemple, pour ensemble (E) celui des sécantes d'un segment de droite AB de longueur l : nous ne diminuerons pas la généralité en prenant ce segment à partir de l'origine, le long de Ox. Et nous aurons toutes les sécantes en faisant varier θ de $-\pi/2$ à $\pi/2$, p croissant, pour chaque valeur de θ, de 0 à $l \cos\theta$.

L'ensemble (E') est alors celui des points intérieurs à l'arche de sinusoïde $p = l \cos\theta$, obtenue pour :

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$$

la mesure est $M = 2l$.

Si nous considérons maintenant un contour polygonal, l'ensemble des droites qui coupent chaque côté a pour mesure le double de la longueur de ce côté. Donc l'ensemble des sécantes du contour a pour mesure le double de la longueur totale du contour, à condition de compter chacune de ces sécantes un nombre de fois égal au nombre de ses points d'intersection avec le contour.

Si celui-ci est un polygone fermé et convexe, toutes les sécantes envisagées le coupent en deux points. Elles forment un ensemble ayant pour mesure le périmètre du polygone.

Il est facile d'étendre les résultats qui précèdent à la mesure de l'ensemble des sécantes d'un contour (C) ouvert ou fermé, formé d'un nombre fini d'arcs analytiques. Cette mesure est égale au double de la longueur du contour, pourvu que chaque sécante soit comptée un nombre de fois égal au nombre n de ses points d'intersection avec le contour.

Si le contour envisagé est fermé et convexe, n est toujours égal à 2 ; il en résulte que l'intégrale :

$$M = \iint dp.d\theta$$

étendue à toutes les sécantes de la courbe, est égale à la longueur L de cette courbe.

On peut alors simplifier considérablement le problème relatif au contour quelconque (C).

Imaginons un fil tendu autour de (C), ce fil réalise un contour qui répond à la définition suivante :

. il limite le plus petit domaine convexe tel que tout point de (C), soit intérieur à ce domaine ou situé sur sa frontière. Il en résulte que les sécantes de (C) forment un ensemble identique à celui des sécantes du contour réalisé par le fil, et par conséquent on a :

$$\iint dp.\,d\theta = L$$

en désignant par L la longueur du fil.

4.- APPLICATION AUX PROBABILITES

Donnons pour exemple le problème suivant :

Soit deux contours convexes fermés (C) et (C') de longueurs respectives L et L', le contour (C') étant intérieur au contour (C).

La probabilité pour qu'une sécante du contour (C) soit sécante du contour (C') est égale à :

$$P = \frac{L'}{L}$$

rapport des mesures des ensembles correspondant aux cas favorables et aux cas possibles.

Si (C') est un segment de droite de longueur ℓ, il faut prendre L' = 2ℓ pour pouvoir considérer (C') comme la limite d'un contour fermé convexe. Si, dans les mêmes conditions, (C) est une circonférence de diamètre a, la probabilité est :

$$P = \frac{2\ell}{\pi a}$$

Considérons la figure constituée par une circonférence et un segment de droite intérieur, et lançons-la sur un parquet dont les lames équidistantes ont pour écartement a. Une rainure coupera à coup sûr la circonférence : la probabilité pour qu'elle coupe le segment de droite est $2\ell/\pi a$.

C'est là la solution (à la différence près de l'intervention explicite de la notion de mesure) donnée en 1860 par BARBIER, du problème célèbre de l'aiguille, par lequel BUFFON mérite d'être considéré comme le fondateur de la théorie des probabilités géométriques.

5.- CAS DE PLUSIEURS CONTOURS

Examinons maintenant le cas plus général où il existe plusieurs contours fermés et convexes, et où l'on veut calculer la mesure de l'ensemble de leurs sécantes.

On considérera les mesures de deux ensembles :

a. l'ensemble des sécantes coupant tous les contours donnés, sa mesure sera positive ou nulle ;

b. l'ensemble des sécantes coupant au moins un des contours donnés.

Ces deux mesures seront notées : $\hat{M}_n^n$ pour la première et $\check{M}_n^n$ pour la seconde, si n est le nombre de contours.

Par suite du théorème classique de combinaison des événements [3], [4] on peut écrire :

$$(1)\ \hat{M}_n^n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \check{M}_n^i \qquad (2)\ \check{M}_n^n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \hat{M}_n^i$$

où $\hat{M}_n^i$ et $\check{M}_n^i$ représentent les mesures respectivement des ensembles de sécantes coupant tous les i contours pris parmi n et au moins un des i contours pris parmi n . Donc le nombre de termes de chacun sera égal au nombre de combinaisons possibles C_n^i et on peut écrire :

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{M}_n^i &= \sum_{k=1}^{C_n^i} \hat{M}_{in}^{ik} \\ \check{M}_n^i &= \sum_{k=1}^{C_n^i} \check{M}_{in}^{ik} \end{aligned} \right.$$

k étant le numéro de la combinaison parmi les C_n^i possibles.

On a, par suite de la réciprocité de ces deux formules :

$$\hat{M}_n^1 = \check{M}_n^1$$

Associons maintenant à chacune des n figures convexes A données, les points d'intersection de chacun des couples de tangentes croisées, communes à la figure considérée et à chacune des $n-i$ autres figures.

En prenant un fil tendu autour de chaque figure et des $n-i$ points qui lui sont associés, on obtient n nouvelles figures convexes B, qui sont au minimum toutes adjacentes, certaines étant sécantes entre elles.

De la même façon que pour les figures A, on peut écrire pour les figures B :

$$\begin{cases} \hat{N}_n^n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \check{N}_n^i \\ \check{N}_n^n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \hat{N}_n^i \end{cases}$$

La première relation pouvant s'écrire :

$$\hat{N}_n^n = (-1)^{n+1} \check{N}_n^n + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} \check{N}_n^i$$

D'autre part, puisque toutes les figures B sont au moins adjacentes, elles ne forment qu'une seule figure, et la mesure des sécantes coupant au moins une figure B est donc égale à la longueur du fil tendu autour de toutes les figures B :

$$\check{N}_n^n = L_n^n$$

Par construction, les sécantes coupant toutes les figures A, couperont aussi toutes les figures B et inversement, on peut donc écrire :

$$\hat{N}_n^n = \hat{M}_n^n$$

En combinant les trois dernières équations, on obtient :

$$\hat{M}_n^n = (-1)^{n+1} L_n^n + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} \check{N}_n^i$$

Comme pour $\check{M}_n^i$ on a :

$$\check{N}_n^i = \sum_{k=1}^{C_n^i} \check{N}_{in}^{ik}$$

$\check{N}_{in}^{ik}$ étant la mesure des sécantes coupant au moins une des i figures B, prise parmi les n figures B, suivant la combinaison k .

Puisque ces i figures B sont au moins toutes adjacentes on a :

$$\check{N}_{in}^{ik} = L_{in}^{ik}$$

longueur du fil tendu autour d'elles.

On peut alors écrire simplement :

$$\boxed{\hat{M}_n^n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \sum_{k=1}^{C_n^i} L_{in}^{ik}}$$

La mesure des sécantes coupant toutes les figures A dépend uniquement des longueurs des fils tendus autour des n figures B, formées à partir des figures A, comme décrit ci-dessus.

Pour connaître la mesure des sécantes coupant au moins une figure A, on utilise la relation donnée au début :

$$\boxed{\check{M}_n^n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \sum_{k=1}^{C_n^i} \hat{M}_{in}^{ik}}$$

En effet, dans cette relation, on considère chaque combinaison de i figures A parmi n , mais en ignorant les $n-i$ autres, donc les $\hat{M}_{in}^{ik}$ peuvent se calculer par la relation précédente.

6.- CAS DE PLUSIEURS ENSEMBLES DE CONTOURS

Dans le problème posé, on cherche la mesure des sécantes coupant à la fois deux côtés du polygone et au moins un des cercles de détection.

Notons E le côté d'entrée, S le côté de sortie et D l'ensemble des cercles de détection situés dans la zone. Notons EDS l'ensemble des contours d'entrée et de sortie associés aux contours des surfaces de détection.

La relation (1) se traduit alors par :

$$\widehat{EDS} = \check{E} + \check{D} + \check{S} - \check{ED} - \check{DS} - \check{ES} + \check{EDS}$$

tous les termes du second membre pouvant se calculer à l'aide de la relation (2).

La probabilité de détection du mobile par au moins un détecteur est alors :

$$P = \frac{\widehat{EDS}}{\widehat{ES}}$$

avec :

$$\widehat{ES} = \check{E} + \check{S} - \check{ES}$$

7.- CALCUL AUTOMATIQUE

Ce calcul peut parfaitement être automatique car il ne s'effectue qu'à partir des L_{in}^{ik}, donc à partir des contours extérieurs d'ensembles de figures B, c'est-à-dire de figures formées d'associations de cercles et de points dont les positions sont calculables d'une façon systématique.

On aura donc un sous-programme de calcul, cherchant la longueur du fil tendu autour de cercles dont on connait les positions des centres et dont les rayons sont positifs ou nuls.

Un autre sous-programme énumérera les différentes combinaisons C_n^i possibles, tandis que le programme principal effectuera les différentes boucles de sommation pour $\hat{M}_n^n$ et $\check{M}_n^n$.

Puisque l'on n'a à mesurer que des contours extérieurs la méthode est encore valable si les figures A données sont sécantes entre elles, ou intérieures les unes aux autres. Dans ce cas les figures B sont réduites aux figures A elles-mêmes.

8.- CONCLUSION

Dans le programme réalisé correspondant aux formules ci-dessus, il existe quatre boucles multiplicatives; de plus, le nombre de combinaisons possibles pour les contours augmente rapidement avec le nombre de détecteurs, aussi les calculs deviennent rapidement importants. Par exemple sur UNIVAC 1108, un seul détecteur conduit à un temps d'exécution de 4 s, avec trois détecteurs il faut 16 s et avec 6 détecteurs il faut 6 mn.

Il serait intéressant de trouver un algorithme rapide pour ces calculs, car le programme actuel recalcule un certain nombre de fois les mêmes contours. Ceci demande une étude plus approfondie, au niveau de la théorie pour chercher une formule récurrente, et au niveau de la programmation.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] KENDALL (M.G), MORAN (P.A.P). Geometrical Probability.
Charles Griffin, Statistical Monographs and Courses, 1963, 125 pp.

[2] DELTHEIL (R). Probabilités Géométriques. Tome 2 Fasc. 2 du "Traité du Calcul des Probabilités et de ses applications" par BOREL (E).
Gauthier-Villars, 1926, 123 pp.

[3] SYLVESTER (J.J). On a Funicular Solution of Buffon's "Problem of the Needle" in its Most General Form.
Acta Mathematica, V. 14, 1891, pp. 185-205.

[4] FELLER (W). An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol. 1.
Wiley Interscience, 1957, 461 pp.