COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 16 au 21 JUIN 75

PERTE D'INFORMATION EN DETECTION - A PARAITRE -

LOSS OF INFORMATION IN DETECTION THEORY - TO BE PUBLISHED

M. GRANGER

CETHEDEC - DRME - 26 Boulevard Victor 75996 PARIS-ARMEES.

RESUME

On considère deux probabilités P_0 et P_1 sur un espace mesurable $(\Omega,\mathcal{A})$ et un processus stochastique $x(t,\omega)$ mesurable distribué suivant la loi P_0 ou P_1. Ce cas se présente dans la détection d'un signal noyé dans un bruit. Le transfert des lois P_0 et P_1 sur l'espace fonctionnel des trajectoires (que nous prendrons du type L_2) se traduit en général par une perte d'information. Ainsi l'absolue continuité (ou l'équivalence) des mesures images n'implique pas l'absolue continuité (où l'équivalence) des probabilités P_0 et P_1.

Des conditions suffisantes sont données pour qu'il n'y ait pas de perte d'information. Ellesfont appel à des propriétés de régularité du processus $x(t,\omega)$. On n'utilise que des propriétés du second ordre, comme dans le cas gaussien, qui autorisent des décompositions du processus $x(t,\omega)$ du type Karhunen-Loeve. Comme dans le cas gaussien encore, on s'intéresse aux propriétés des espaces à noyau autoreproduisant associés aux noyaux de covariance du processus.

SUMMARY

We consider two probability measures P_0 and P_1 on a measurable space $(\Omega,\mathcal{A})$ and a measurable stochastic process which is distributed according to P_0 et P_1. This happens when we want to detect a signal in a noise. The probability measures induced by the process $x(t,\omega)$, on the functional space of paths (L_2 - kind) may have not the same properties as the original ones.
For instance absolute continuity (or equivalence) of induced measures does not imply absolute continuity (or equivalence) of P_0 and P_1.

Sufficient conditions ave given for no loss of information. They are expressed in terms of regularity of $x(t,\omega)$. As in the gaussian case, only second order properties are used allowing decomposition of x (t,ω) in Karhunen-Loeve type representation. Again as in the gaussian case we are interested with properties of the reproducing Kernel Hilbert spaces associated to the covariance kernels of $x(t,\omega)$

Perte d'information en détection - M.GRANGER.

Loss of information in detection theory - M.GRANGER.

Transport de mesures

Soit $(\Omega,\mathcal{A})$ un espace mesurable et $\{x(t,\omega), t\in T, T\subset\mathbb{R}\}$ une famille de fonctions réelles sur Ω qui engendre $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} = \sigma\text{-}\{x(t,\omega), t\in T\}$$

Soient P_0 et P_1 deux mesures de probabilité sur $(\Omega,\mathcal{A})$ pouvant régir le processus $x(t,\omega)$. Nous désignerons par $\sigma_i\text{-}\{\ \}$ la complétée de la σ-algèbre engendrée par $\{\ \}$ par rapport à P_i, $i = 1,0$

$$\mathcal{A}_i = \sigma_i\text{-}\{x(t,\omega), t\in T\}$$

$$\text{si } P_0 \sim P_1 \Rightarrow \mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_1$$

Nous supposerons que le processus $x(t,\omega)$ est du second ordre par rapport à P_0 et P_1

$$R_i(t,s) = E_{P_i}\left[x(t,\omega)x(s,\omega)\right] < +\infty \qquad i = 1,0$$

Soit $\mathcal{B}(T)$ le σ-algèbre des ensembles Lebesgue-mesurables de T

Définition

Soit N l'ensemble des mesures σ-finies sur $(T,\mathcal{B}(T))$ qui sont

- d'une part équivalentes à la mesure de Lebesgue,
- d'autre part telles que

$$\int_T R_i(t,t)\,d\nu(t) < \infty \quad , \forall \nu\in N \qquad i = 1,0$$

N est non vide

Il faut remarquer que N peut ne pas contenir la mesure de Lebesgue, comme par exemple dans le cas où T est non borné et $x(t,\omega)$ est stationnaire au sens large ou bien dans le cas où le processus $x(t,\omega)$ est le mouvement brownien.

$$\text{Si } \nu\in N \Rightarrow x(\cdot,\omega)\in L_2(T,\mathcal{B}(T),\nu) \triangleq H^\nu \quad P_i \text{ p.s}$$

Nous savons que les H^ν sont séparables.

Nous allons maintenant transporter les mesures P_0 et P_1 sur l'espace des trajectoires H^ν.

Pour cela considérons l'application $\mathcal{T}$: $(\Omega,\mathcal{A}) \to (H^\nu, \mathcal{B}(H^\nu))$ (où $\mathcal{B}(H^\nu)$ est la σ-algèbre engendrée par les ouverts de H^ν) définie par

$$\mathcal{T}(\omega) = \begin{cases} x(\cdot,\omega) & \text{si } x(\cdot,\omega)\in H^\nu \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\mathcal{T}$ induit sur $(H^\nu, \mathcal{B}(H^\nu))$ des mesures μ_i^ν

$$\forall B\in\mathcal{B}(H^\nu) \quad , \quad \mu_i^\nu(B) \triangleq P_i\left[\mathcal{T}^{-1}(B)\right] = P_i\{\omega \mid \mathcal{T}(\omega)\in B\} \qquad i = 1,0$$

En détection nous considérons que P_0 et la loi du bruit seul et P_1 la loi du signal + bruit.

La pratique impose de travailler sur les trajectoires, donc sur les lois images

Perte d'information

En général on ne peut transposer automatiquement les propriétés existant entre les P_i (absolue continuité, équivalence, orthogonalité) sur les mesures μ_i^ν.

Ceci résulte du fait que

$$\sigma_i\text{-}\left(\mathcal{T}^{-1}(\mathcal{B}(H^\nu))\right) \subset \mathcal{A}_i$$

l'égalité n'ayant pas toujours lieu.

On sait cependant que

$$- \quad P_1 \ll P_0 \quad \Rightarrow \quad \mu_1^\nu \ll \mu_0^\nu$$

(P_1 absolument continue par rapport à P_0)

donc

$$P_1 \sim P_0 \quad \Rightarrow \quad \mu_1^\nu \sim \mu_0^\nu$$

(P_1 équivalente à P_0)

$$- \quad \mu_1^\nu \perp \mu_0^\nu \quad \Rightarrow \quad P_1 \perp P_0$$

(μ_1^ν orthogonale à μ_0^ν)

Les implications inverses n'ont pas lieu en général, c'est ce que nous appellerons la perte d'information par transport de mesures.

Rappelons que l'orthogonalité des mesures permet en principe une détection parfaite (détection singulière). L'absolue continuité d'une mesure par rapport à une autre permet d'écrire la dérivée de Radon-Nikodym et de détecter la présence ou l'absence de signal grâce à un seuil sur cette dérivée.

Remarquons enfin que nous ne sommes plus dans le cas gaussien. Il n'y a donc plus la dichotomie qui simplifie bien les choses : mesures équivalentes ou mesures orthogonales.

Il est facile de construire un exemple où

$$P_1 \perp P_0 \quad \Rightarrow \quad \mu_1^\nu \sim \mu_0^\nu$$

c'est le cas de perte maximale d'information. Sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{A},P)$ considérons deux processus $x_0(t,\omega)$ et $x_1(t,\omega)$ t.q

(1) $x_0(t,\omega) = x_1(t,\omega)$ p.p Leb T

(2) $x_0(t,\omega)$ et $x_1(t,\omega)$ appartiennent à des sous ensembles disjoints de $\mathbb{R}^T$, p.s P

$$\mathbb{P} \text{ sur } (\Omega, \mathcal{A}) \xrightarrow{x_i(t,\omega)} \mathbb{P}_i \text{ sur } (\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T))$$

$$(2) \Rightarrow \mathbb{P}_0 \perp \mathbb{P}_1$$

$$(1) \Rightarrow \mu_0^{Leb} \approx \mu_1^{Leb}$$

Nous allons voir que le problème de la perte d'information par transport de mesures est lié à la régularité du processus $x(t,\omega)$. L'exemple donné plus haut en est une illustration.

Représentation du processus $x(t,\omega)$

Soit $H_i(x)$ l'espace de Hilbert constitué par les variables aléatoires réelles de la forme

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x(t_j,\omega) \quad , \quad \alpha_j \in \mathbb{R} \quad , t_j \in T$$

et leurs limites pour la norme $\|u\|_{H_i(x)} = E_{\mathbb{P}_i}|u|^2$

On notera $H_i(x) = \overline{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x(t_j,\omega)}^{L_2(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}_i)}$

Dans le cas où le processus $x(t,\omega)$ est gaussien c'est l'espace gaussien engendré par $x(t,\omega)$ (1)

H^ν étant séparable, considérons une famille complète dans H^ν, soit $\{f_k^\nu(t)\}_{k=1}^{\infty}$

Définissons $\eta_k^\nu(\omega) = \int_T x(t,\omega) f_k^\nu(t) d\nu(t)$, $\mathbb{P}_i$ p.s

$$\eta_k^\nu(\omega) \in L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_i)$$

Considérons maintenant le sous espace de $L_2(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}_i)$ engendré par les variables aléatoires $\{\eta_k^\nu(\omega)\}_k$

$$H_i(x,\{f_k^\nu\}_\nu, \nu) = \overline{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \eta_j^\nu(\omega)}^{L_2(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}_i)}$$

où $\eta_j^\nu \in \{\eta_k^\nu\}_k$

et $\alpha_j \in \mathbb{R}$

Par le procédé de Schmidt on peut trouver un système orthonormé dans $L_2(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}_i)$, soit $\{\xi_k^\nu(\omega)\}_{k=1}^{\infty}$

où $\xi_k^\nu(\omega) = \sum_{j=1}^{k} c_{kj}\, \eta_j^\nu(\omega)$

donc $\xi_k^\nu(\omega) = \int_T x(t,\omega)\, g_k^\nu(t)\, d\nu(t)$, $\mathbb{P}_i$ p.s

avec $g_k^\nu(t) = \sum_{j=1}^{k} c_{k,j} f_j^\nu(t)$

Utilisons des résultats obtenus par Cambanis (2)

Théorème 1

Le processus mesurable $x(t,\omega)$, du second ordre par rapport à P_0 et P_1, admet les représentations suivantes :

$$x(t,\omega) \underset{m.q.\mathbb{P}_i}{=} \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,i}^\nu(t)\, \xi_k^\nu(\omega) + w(t,\omega) \ , \ \forall t \in T$$

où $a_k^\nu(t) = \int_T R_i(t,s)\, g_k^\nu(s)\, d\nu(s)$

et le processus $w(t,\omega)$ est tel que

$$E_{\mathbb{P}_i}\left[|w(t,\omega)|^2\right] = R_{w_i}(t,t) = 0 \text{ p.p. Leb sur } T$$

$R_i(t,s)$ admet de la même façon la représentation

$$R_i(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,i}^\nu(t)\, a_{k,i}^\nu(s) + R_{w_i}(t,s)$$

la convergence de la série étant absolue en t et s sur TxT.

Si on définit $H_i(w) = \overline{\sum \alpha_j w(t_j,\omega)}^{L_2(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}_i)}$

on a alors

$$H_i(x) = H_i(x,\{f_k^\nu\}_k, \nu) \oplus H_i(w)$$

Théorème 2

$H(x,\{f_k^\nu\}_k, \nu)$ est indépendant de la mesure $\nu \in N$, et de la famille complète $\{f_k^\nu\}_k$

Ceci veut dire que la décomposition de $x(t,\omega)$ en deux termes orthogonaux est unique, mais la représentation du premier terme $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,i}^\nu(t)\, \xi_k^\nu(\omega)\right)$ dépend de ν et de $\{f_k^\nu\}_k$

On écrira donc

$$H_i(x,\{f_k^\nu\}_k, \nu) \triangleq H_i(x \text{ régulier})$$

On peut particulariser la famille $\{f_k^\nu\}_k$

Soit $\{\phi_{k,i}^\nu(t)\}_{k=1}^{\infty}$ la famille des vecteurs propres de l'opérateur intégral sur H^ν (opérateur de Hilbert-Schmidt) de noyau $R_i(t,s)$, $i=0,1$, et $\{\lambda_{k,i}^\nu\}_k$ non nulles les valeurs propres correspondantes

$$\lambda_{k,i}^\nu\, \phi_{k,i}^\nu = \int_T R_i(t,s)\, \phi_{k,i}^\nu(s)\, d\nu(s) \qquad i=0,1$$

alors $x(t,\omega) \underset{m.q.\mathbb{P}_i}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \phi_{k,i}^\nu(t)\, \xi_k^\nu(\omega) + w(t,\omega)$

avec $\xi_k^\nu(\omega) = \int_T x(t,\omega)\, \phi_{k,i}^\nu\, d\nu(t)$ $\mathbb{P}_i$ p.s

On a aussi

$$R_i(t,s) = \sum \lambda_{k,i}^\nu\, \phi_{k,i}^\nu(t)\, \phi_{k,i}^\nu(s) + R_{w_i}(t,s)$$

Ce sont des décompositions du type de Karhunen-Loeve et de Mercer dans le cas où T est non borné et le processus $x(t,\omega)$ n'est pas continu en moyenne quadratique, mais simplement du second ordre et t.q $\int_T R_i(t,t)d\nu(t) < \infty$

Conditions suffisantes pour ne pas avoir de perte d'information.

Nous avons vu qu'il fallait, pour éviter la perte d'information, que

$$\sigma_i\{\mathcal{T}^{-1}(\mathcal{B}(H^\nu)\} = \mathcal{A}_i$$

$\mathcal{B}(H^\nu)$ est la plus petite σ_ algèbre de sous-ensembles de H^ν rendant mesurables les fonctionnelles linéaires $\{F_k^\nu(.)\}_k$ sur H^ν définies par

$$\forall \in H^\nu \longrightarrow F_k^\nu(v) = \langle v, f_k^\nu\rangle_{H^\nu} = \int_T v(t) f_k^\nu(t) d\nu(t)$$

les variables aléatoires $\eta_k^\nu(\omega)$ étant définies commeplus haut, on a

$$\eta_k^\nu(\omega) = (F_k^\nu \circ \mathcal{T})(\omega) \quad P_i \text{ p.s}$$

On a donc

$$\sigma_i\text{-}(\mathcal{T}^{-1}(\mathcal{B}(H^\nu)) = \sigma_i(\{\eta_k^\nu(\omega)\}_{k=1}^\infty)$$

Si le processus est régulier pour P_0 et pour P_1

$$H_i(x) = H_i \quad (x \text{ régulier})$$

$$\Rightarrow x(t,\omega) \underset{m.q.P_i}{=} \sum_{k=1}^\infty a_{k,i}^\nu(t)\,\zeta_k^\nu(\omega) \quad \forall t \in T$$

Il existe donc une sous suite indicée par k' telle que

$$x(t,\omega) = \sum_{k'} a_{k',i}^\nu(t)\,\zeta_{k'}^\nu(\omega) \quad \forall t \in T$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}_i = \sigma_i\text{-}\{x(t,\omega), t \in T\} \subset \sigma_i\{\zeta_{k'}^\nu(\omega)\}_{k'} \subset \sigma_i\{\zeta_k^\nu(\omega)\}_k$$

On a donc

Théorème 3

Si $x(t,\omega)$ est régulier par rapport à P_0 et P_1, il n'y a pas de perte d'information. Donc, $\forall \nu \in \mathbb{N}$

$$P_1 \ll P_0 \Leftrightarrow \mu_1^\nu \ll \mu_0^\nu$$
$$(\Rightarrow P_1 \approx P_0) \Leftrightarrow \mu_1^\nu \approx \mu_0^\nu$$
$$\text{et } P_1 \perp P_0 \Leftrightarrow \mu_0^\nu \perp \mu_1^\nu$$

Rappelons cependant que la décomposition de P_1 donne en général une partie absolument continue par rapport à P_0 et une partie étrangère à P_0.

Espaces auto-reproduisants associés à $R_i(t,s)$

La covariance est une fonction de type non négatif

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \alpha_j R(t_i,t_j) \geq 0 \quad \forall n \in N, \ \forall (t_1,\dots,t_n) \in T^n, \ \forall (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in R^n$$

Définissons l'espace autoreproduisant associé à $R_i(t,s)$, soit $H\ (R_i,T)$ comme l'image de $H_i(x)$ par l'application linéaire u : $H_i(x) \longrightarrow R^T$ définie par

$$\forall z(\omega) \in H_i(x), \quad u[z(\omega)](t) = E_{P_i}[z(\omega)x(t,\omega)], \forall t \in T$$

L'application u est injective car $\{x(t,\omega), t \in T\}$ engendre $H_i(x)$. L'espace de fonctions $H(R_i,T)$ peut être muni du produit scalaire

$$\langle f,g\rangle_{H(R_i,T)} = \langle u^{-1}f, u^{-1}g\rangle_{H_i(x)}, \ \forall f,g \in H(R_i,T)$$

$H(R_i,T)$ devient un espace de Hilbert isomorphe à $H_i(x)$ par u. Les fonctions $R_i(t,.)$ engendrent $H\ (R_i,T)$ quand t parcourt T.

$\forall h \in H(R_i,T)$, on a

$$\langle h(.), R_i(t,.)\rangle_{H(R_i,T)} = \langle z(\omega), x(t,\omega)\rangle_{H_i(x)} = u[z(\omega)](t) = h(t)$$

où on a posé $z(\omega) = u^{-1}(h)$

En particulier le noyau R_i joint dans $H\ (R_i,T)$ de la propriété d'auto-reproduction

$$\langle R(t,.), R(s,.)\rangle_{H(R_i,T)} = R_i(t,s) \quad \forall s,t \in T\times T$$

Nous savons que l'espace auto-reproduisant est déterminé de façon unique par son noyau de covariance.

Soit S_i l'opérateur intégral sur H^ν de noyau $R_i(t,s)$

$$S_i f = g \Leftrightarrow g(t) = \int_T R_i(t,s) f(s) d\nu(s)$$

Schwartz $\Longrightarrow |R_i(t,s)|^2 \leq R_i(t,t) R_i(s,s)$

$$\Rightarrow \int_T\int_T |R_i(t,s)|^2 d\nu(t) d\nu(s) < +\infty$$

$R_i(t,s)$ appartient à $L_2(T\times T, \mathcal{B}(T)\otimes\mathcal{B}(T), \nu\times\nu)$

Soit $\{\phi_{k,i}^\nu(t)\}_k$ la famille déjà considérée de vecteurs propres de S_i correspondant aux valeurs propres positives $\{\lambda_{k,i}\}_k$ (nous savons que les valeurs propres sont non négatives et ne peuvent admettre que 0, comme point d'accumulation). Soit $\{\psi_{k',i}^\nu(t)\}_{k'}$ une famille complète dans le complémentaire orthogonal (correspondant à la valeur propre 0) du sous espace de H^ν engendré par les $\{\phi_{k,i}(t)\}_k$. Tout f appartenant à H^ν se décompose sous la forme

$$f(t) = \sum_k \alpha_k \phi_{k,i}^\nu(t) + \sum_{k'} \beta_{k'} \psi_{k',i}^\nu(t)$$

Comme $S_i \psi_{k',i}(t) = 0, \ \forall k'$

S_i est un opérateur de Hilbert Schmidt,

car $R_i(t,s) \in L_2(T\times T, \mathcal{B}(T)\otimes\mathcal{B}(T), \nu\times\nu)$

$$\sup_k d^\nu_{k,i} = \|S_i\|_{L_2} \leq \|S_i\|_{H.S} = \sum d^\nu_{k,i} < \infty$$

$$\Rightarrow S_i\left(\sum_{k'} \beta_{k'} \psi^\nu_{k',i}\right) = 0$$

et $$(S_i f)(t) = \sum \alpha_k d^\nu_{k,i} \phi^\nu_{k,i}(t) \quad \forall t \in T$$

S_i est un opérateur positif. On peut en prendre la racine carrée

$$h(t) = (S_i^{1/2} f)(t) = \sum \alpha_k (d^\nu_{k,i})^{1/2} \phi^\nu_{k,i}(t)$$
$$= \sum \gamma_k \phi^\nu_{k,i}(t)$$

$f \in H^\nu$ et les $\{\phi^\nu_{k,i}(t)\}$ sont orthonormés

$$\|h\|^2_{H^\nu} = \sum_k \alpha_k^2 + \|\sum \beta_{k'} \psi^\nu_{k',i}\|_{H^\nu} < \infty$$

$$\sum_k \alpha_k^2 = \sum_k \frac{\gamma_k^2}{d^\nu_{k,i}} < \infty$$

Notons $S_i^{1/2}(H^\nu)$ l'image de H^ν par $S_i^{1/2}$

$$S_i^{1/2}(H^\nu) = \left\{g \in H^\nu \mid g(t) = \sum \gamma_k \phi^\nu_{k,i}(t) \text{ avec } \sum \frac{\gamma_k^2}{d^\nu_{k,i}} < \infty\right\}$$

Munissons $S_i^{1/2}(H^\nu)$ d'un produit scalaire de la façon suivante :

$$f = \sum_k a_k \phi^\nu_{k,i} \qquad \text{avec } \sum \frac{a_k^2}{d^\nu_{k,i}} < \infty$$

$$g = \sum_k b_k \phi^\nu_{k,i} \qquad \text{avec } \sum \frac{b_k^2}{d^\nu_{k,i}} < \infty$$

$$\langle f, g \rangle_{S_i^{1/2}(H^\nu)} = \sum \frac{a_k b_k}{d^\nu_{k,i}} < \infty$$

Si $x(t,\omega)$ est régulier par rapport à $P_i, i=0,1$

$$R_i(t,\cdot) = \sum d^\nu_{k,i} \phi^\nu_{k,i}(t) \phi^\nu_{k,i}(\cdot)$$

$R_i(t,\cdot)$ appartient à $S_i^{1/2}(H^\nu)$ car

$$\sum \frac{[d^\nu_{k,i} \phi^\nu_{k,i}(t)]^2}{d^\nu_{k,i}} = R_i(t,t) < \infty$$

On a $$\langle f, R_i(t,\cdot) \rangle_{S_i^{1/2}(H^\nu)} = \sum \frac{a_k d^\nu_{k,i} \phi^\nu_{k,i}(t)}{d^\nu_{k,i}} = f(t)$$

$S_i(H^\nu)$ muni du produit scalaire $\langle \ \rangle_{S_i^{1/2}(H^\nu)}$ est donc un espace de Hilbert admettant $R_i(t,s)$ comme noyau reproduisant. Comme l'espace auto-reproduisant associé à $R_i(t,s)$ et T est unique on a le théorème suivant.

<u>Théorème 4</u>

Si $x(t,\omega)$ est régulier par rapport à P_0 et P_1

$$S_i^{1/2}(H^\nu) = H(R_i, T) \quad \forall \nu \in N$$

<u>Remarque</u>

Dans le cas de la détection d'un signal certain dans un bruit gaussien sur un intervalle compact $[0,T]$

$$\mathcal{H}_0 \quad x(t,\omega) = b(t,\omega) \longrightarrow P_0$$
$$\mathcal{H}_1 \quad x(t,\omega) = A(t) + b(t,\omega) \longrightarrow P_1$$

avec $R(t,s) = E[b(t,\omega) b(s,\omega)]$ et $R(t,s)$ continu sur $[0,T] \times [0,T]$

la condition $\sum \frac{A_k^2}{d_k} < \infty$ assurait la détection non singulière et donc l'existence d'une densité de Radom-Nikodym

$$\frac{dP_1}{dP_0}(x) = \exp\left(\sum \frac{a_k \xi_k}{d_k} - \frac{1}{2} \sum \frac{a_k^2}{d_k}\right)$$

Signalons enfin un résultat de Cambanis (2)

$$\left.\begin{array}{l} x(t,\omega) \text{ régulier} \\ \text{par rapport à } P_i \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{si } f \in H(R_i,T) \text{ et } f(t) = 0 \text{ p.p } T \\ \text{alors } f(t) = 0 \quad \forall t \in T \end{array}\right.$$

Cette condition nécessaire et suffisante de régularité du processus $x(t,\omega)$ est une condition plus faible que la continuité en moyenne quadratique car la continuité en moynne quadratique entraîne la continuité de la covariance sur TxT donc la continuité des fonctions de l'espace autoreproduisant sur T tout entier.

La continuité des fonctions de $H(R_i,T)$ est équivalente à la continuité faible du processus $x(t,\omega)$, c'est à dire

$$\forall t \in T, \quad \forall z(\omega) \in H_i(x)$$

$$\lim_{\substack{\tau \to t \\ \tau \in T}} E_{P_i}[x(\tau,\omega) z(\omega)] = E_{P_i}[x(t,\omega) z(\omega)]$$

Ainsi la continuité en moyenne quadratique entraîne la continuité faible qui entraîne elle même la régularité.

<u>Références</u>

1 - J.NEVEU - Processus aléatoires gaussiens
Les Presses de l'Université de Montréal
1968.

2 - S.CAMBANIS - Representation of stochastic processus of second order and linear opérations.
Journal of Mathematical analysis and applications 41,603-620. (1973)