



TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

Nice 7 au 12 mai 1973

SIGNAL ANALYTIQUE ET SIGNAL EXPONENTIEL

Claude GIRAUDON et François RODON

CIT-ALCATEL - Division Marine - 94 -ARCUEIL

RESUME

L'utilisation du signal analytique est maintenant fort répandue, et apparaît comme un outil d'analyse que l'on emploie sans plus très bien se soucier des conditions de validité de ce concept.

En particulier, dans l'utilisation de signaux à bande finie mais non étroite on qualifie volontiers d'analytiques des signaux qui ne sont que complexes.

Il paraît donc utile d'effectuer un retour aux sources, sans prétentions théoriques particulières, afin de clarifier certaines assimilations abusives.

SUMMARY

Analytic signals are nowadays of common use and appear to be a tool in signal analysis, that is employed without anymore taking much care of the conditions of validity of this concept.

In particular, when band limited signals are used which are not narrow banded the qualification "analytic" may often be found for signals that are simply complex. It seems therefore useful to go back to the origin of the concept, not with specific theoretical pretentions but in order to clarify certain abusive assimilations.

1. - OBJET

Nous avons essayé de faire la synthèse sur les notions de "signal analytique" et de "signal exponentiel" qui sont identiques en bande étroite, mais qui prêtent à confusion en bande large.

Déjà, nous voyons apparaître une première difficulté : qu'appelle-t-on un signal à bande étroite et un signal à bande large ? Nous serons donc amené à faire certaines hypothèses qui sont heureusement pratiquement toujours vérifiées dans la réalité.

2. - DEFINITION DU SIGNAL ANALYTIQUE2.1. - Symboles utilisés

Fonction du temps : minuscule $s(t)$

Fonction de la fréquence : majuscule $S(f)$

Paires de fonctions transformées de Fourier l'une de l'autre

$$s(t) \longleftrightarrow S(f)$$

Transformée de Fourier de $F [s(t)]$

Transformée inverse de Fourier $F^{-1} [S(f)]$

Partie réelle de : $\text{Re} [\varphi(t)]$ ou $\text{R} [\varphi(t)]$

Partie imaginaire de : $\text{Im} [\varphi(t)]$ ou $\text{J} [\varphi(t)]$

Transformée de Hilbert de : $H [s(t)]$

Signe de : $\text{sgn} []$

Convolution : $s(t) = h(t) * g(t)$ signifie : $s(\tau) = \int h(t).g(\tau-t)dt$

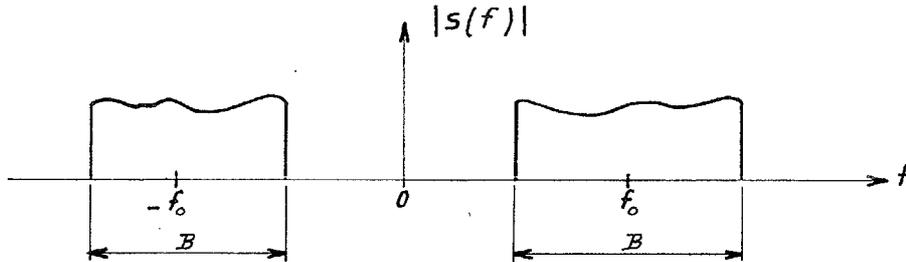
2.2. - Définition d'un signal complexe contenant la même information qu'un signal réel à spectre borné.

On considère un signal $s(t)$ réel à spectre borné. Cette première affirmation est déjà contradictoire puisque : signal équivaut à énergie finie, donc à support temporel limité, donc à spectre non borné.

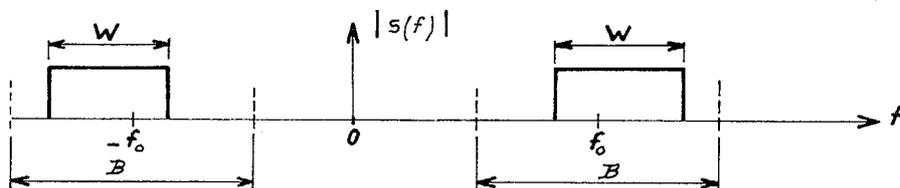


Néanmoins, il suffit de ne pas retenir les domaines spectraux à densité d'énergie de -40 dB ou -60 dB, par exemple, par rapport à la densité maximum, pour se ramener à la définition précédente.

Le module du spectre de $s(t)$: $|S(f)|$ est donc limité à une bande B centrée en f_0 .



Le spectre $S(f)$ peut être, ou ne pas être symétrique par rapport à f_0 . On peut par exemple envisager une bande B qui contiendrait uniquement une fréquence modulée dont la bande W est inférieure à B , mais dont la fréquence centrale est inconnue. C'est le cas que l'on trouve par exemple dans la réception de signaux dopplérisés.



Nous avons la relation suivante : $s(t) \rightleftharpoons S(f)$

$$\begin{aligned} \text{qui s'écrit : } s(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \cdot e^{j2\pi ft} df & (1) \\ &= \int_0^{\infty} S(f) \cdot e^{j2\pi ft} df + \int_0^{\infty} S(-f) \cdot e^{-j2\pi ft} df \end{aligned}$$

Nous faisons alors, l'hypothèse suivante :

$$s(t) \text{ est réel, donc } S^*(f) = S(-f)$$

$$\begin{aligned} \text{nous pouvons alors écrire : } s(t) &= \int_0^{\infty} [S(f) \cdot e^{j2\pi ft} + S^*(f) \cdot e^{-j2\pi ft}] df \\ &= \int_0^{\infty} 2 \operatorname{Re} [S(f) \cdot e^{j2\pi ft}] df \\ &= 2 \operatorname{Re} \left[\int_0^{\infty} S(f) \cdot e^{j2\pi ft} df \right] & (2) \end{aligned}$$

SIGNAL ANALYTIQUE ET SIGNAL EXPONENTIEL

On peut donc considérer le signal $s(t)$, réel, comme la partie réelle d'un signal complexe $\psi(t)$, tel que :

$$\psi(t) = 2 \int_0^{\infty} S(f) \cdot e^{j2\pi ft} df \quad (3)$$

$$s(t) = R [\psi(t)] \quad (4)$$

La relation (3) nous montre que le spectre de $\psi(t)$ pour les fréquences positives est imposé : $2 (S(f))$; mais on peut choisir le spectre de $\psi(t)$ pour les fréquences négatives.

Nous faisons alors une seconde hypothèse : on choisit 0 comme spectre de $\psi(t)$ pour les fréquences négatives :

$$\psi(t) \iff \Psi(f) = \begin{cases} 2 S(f) & \text{si } f > 0 \\ 0 & \text{si } f \leq 0 \end{cases} \quad (5)$$

La relation (3) s'écrit donc :

$$\psi(t) = \int_0^{\infty} \Psi(f) \cdot e^{j2\pi ft} \cdot df \quad (6)$$

2.3. - Quelques relations sur le signal complexe [réf.1]

Nous avons les relations énergétiques suivantes :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \cdot \psi(t) \cdot \psi^*(t) dt$$

d'où l'on tire :

$$E = 2 \int_0^{\infty} |S(f)|^2 df = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} |\Psi(f)|^2 df$$

puisque $\Psi(f)$ est nul pour $f \leq 0$.

Pour la même raison, nous avons les relations de convolution suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1(t) \cdot \psi_2^*(z-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^*(t) \cdot \psi_2(z-t) dt = 0$$

(en appliquant l'égalité : $f * g^* \iff F \cdot G^*(-)$)

La convolution d'un signal complexe avec le conjugué d'un autre signal complexe est nulle.



2.4. - Transformée de Hilbert d'un signal complexe

Nous venons de définir le signal :

$$s(t) = \mathcal{R} \left[\psi(t) \right]$$

$$\text{avec } \mathcal{V}(f) = \begin{cases} 2 S(f) & \text{si } f > 0 \\ 0 & \text{si } f \leq 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{Ecrivons } \psi(t) = s(t) + j \overset{\vee}{s}(t) \quad (7)$$

$\overset{\vee}{s}(t)$ est une partie imaginaire que nous allons expliciter.

Le signal $\psi(t)$ satisfait à sa définition si :

$$\text{pour } f > 0 \quad 2 S(f) = S(f) + j \mathcal{F} \left[\overset{\vee}{s}(t) \right]$$

$$\text{pour } f \leq 0 \quad 0 = S(f) + j \mathcal{F} \left[\overset{\vee}{s}(t) \right]$$

ce qui impose que :

$$\mathcal{F} \left[\overset{\vee}{s}(t) \right] = -j \operatorname{sgn} [f] \cdot S(f)$$

$$\boxed{\overset{\vee}{s}(t) \iff -j \operatorname{sgn} [f] \cdot S(f)} \quad (8)$$

Le signal ainsi défini est la transformée de HILBERT de $s(t)$ et s'écrit encore :

$$\boxed{\overset{\vee}{s}(t) = s(t) * \frac{1}{\pi \cdot t}} \quad (9)$$

Le signal complexe $\psi(t) = s(t) + j \overset{\vee}{s}(t)$ ainsi défini est appelé signal analytique ou modèle analytique de $s(t)$.

2.5. - Limites théoriques d'application de la notion de signal analytique.

Etant donné un signal réel $s(t)$, on pourra lui associer un signal analytique si son spectre est borné. Ceci réduit déjà considérablement le champ d'application de cette théorie, puisque ceci élimine tous les signaux à support temporel limité.

SIGNAL ANALYTIQUE ET SIGNAL EXPONENTIEL

En supposant qu'un signal satisfasse à cette condition, il faudrait calculer le signal analytique associé :

$$\psi(t) = s(t) + j \overset{V}{s}(t)$$

Le calcul de $\overset{V}{s}(t)$ comme transformée de Hilbert de $s(t)$ peut s'avérer difficile dans le cas le plus général, où on est obligé d'utiliser la relation de définition :

$$\overset{V}{s}(t) = s(t) * \frac{1}{\pi t}$$

ou bien
$$\overset{V}{s}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s(\xi)}{t - \xi} d\xi$$

Le seul cas où le calcul de $\overset{V}{s}(t)$ est simple et celui où le signal $s(t)$ peut se mettre sous la forme :

$$s(t) = a(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi(t))$$

En utilisant le théorème de Bedrosian :

$$H[f(t) \cdot g(t)] = f(t) \cdot H[g(t)] \quad \text{si et seulement si les spectres de } f \text{ et } g \text{ sont disjoints,}$$

on a :

$$\begin{aligned} H[s(t)] &= H[a(t) \cdot \cos \varphi(t) \cdot \cos \omega_0 t - a(t) \cdot \sin \varphi(t) \cdot \sin \omega_0 t] \\ &= a(t) \cdot \cos \varphi(t) \cdot H[\cos \omega_0 t] - a(t) \sin \varphi(t) \cdot H[\sin \omega_0 t] \\ &= a(t) \cdot \cos \varphi(t) \cdot \sin \omega_0 t + a(t) \cdot \sin \varphi(t) \cdot \cos \omega_0 t \\ &= a(t) \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi(t)) \end{aligned}$$

ceci n'étant valable que si les spectres de : $a(t) \cdot \sin \varphi(t)$

et : $a(t) \cdot \cos \varphi(t)$

sont différents de 0 seulement en des points de fréquence où $f < f_0$.



Cette condition élimine donc les fonctions "enveloppe" à support temporel limité et les fonctions "phase" $\varphi(t)$ non linéaires.

Il semblerait donc que, théoriquement du moins, le signal analytique soit de peu d'intérêt dans l'analyse des signaux sonars par exemple.

2.6. - Signal analytique et signal exponentiel

Etant donné un signal réel $s(t)$ qui s'écrit :

$$s(t) = a(t) \cos (\omega_0 t + \varphi(t))$$

où en bande étroite, $a(t)$ toujours positif, correspond à la notion physique d'enveloppe, et où $\varphi(t)$ correspond à la fonction phase : on peut toujours lui associer un signal exponentiel :

$$\mathcal{E}(t) = a(t) \cdot e^{j(\omega_0 t + \varphi(t))} \quad (10)$$

$$\text{tel que } s(t) = R [\mathcal{E}(t)] \quad (11)$$

Le signal $\mathcal{E}(t)$ peut être identique au signal analytique $\psi(t) = s(t) + j \mathcal{V}(t)$ dans certains cas. Il en est différent dans la plupart des cas pratiquement intéressants.

Les deux notions se confondent dans le cas du signal à bande étroite, cas pour lequel on possède une notion physique de $a(t)$ et de $\varphi(t)$. En effet, $a(t)$, enveloppe du signal, représente la variation (faible) d'amplitude d'un cycle à un autre de l'oscillation ; $\varphi(t)$, phase du signal, représente la variation (faible) de la phase d'un cycle à un autre. Ceci permet de définir une fréquence instantanée :

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d}{dt} (\omega_0 t + \varphi(t))$$

La différence entre le signal analytique et le signal exponentiel réside dans les parties imaginaires :

$$\mathcal{E}(t) = a(t) \cdot \cos (\omega_0 t + \varphi(t)) + j a(t) \cdot \sin (\omega_0 t + \varphi(t))$$

$$\psi(t) = a(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) + j H \left[a(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) \right]$$

L'erreur commise sur l'amplitude et la phase, lorsqu'on assimile $\psi(t)$ à $\mathcal{E}(t)$, est :

$$\begin{aligned} \delta(t) &= H \left[a(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) \right] - a(t) \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi(t)) \\ &= j \left[\psi(t) - \mathcal{E}(t) \right] \end{aligned}$$

On peut calculer cette erreur (réf. 2). On trouve alors que l'erreur quadratique moyenne sur l'amplitude et la phase est bornée par le même terme.

Par exemple, dans le cas d'un signal de fréquence pure à enveloppe rectangulaire :

$$s(t) = \text{rect} \left(\frac{t}{T} \right) \cdot \cos \omega_0 t$$

on obtient comme borne de l'erreur

$$\beta = 3,18 \sqrt{\frac{100}{T \cdot f_0}}$$

Si l'on a $\frac{1}{T} = \frac{f_0}{2}$, on voit que l'erreur atteint plus de 20%. Par contre, dans le cas où l'enveloppe est gaussienne :

$$s(t) = e^{-t/2\sigma^2} \cdot \cos \omega_0 t,$$

l'erreur, pour une impulsion semblable à la précédente n'est que de 1%.

2.7. - Conclusions

Les notions du signal analytique et de signal exponentiel qui, théoriquement, sont deux notions bien distinctes, se rejoignent en bande étroite. On peut considérer le cas de l'impulsion rectangulaire comme le cas le plus défavorable possible (queues de spectres importantes).



SIGNAL ANALYTIQUE ET SIGNAL EXPONENTIEL

Dans la pratique, tout traitement de signal est précédé d'un filtre d'entrée. Il en résulte une altération de la forme de l'enveloppe ce qui permet d'utiliser la notion de signal analytique en la confondant avec celle de signal exponentiel sans risque d'erreur important.

On utilisera donc la notion de signal complexe en lui appliquant les propriétés d'un signal analytique et en le calculant comme un signal exponentiel.

Il faut remarquer que l'écriture :

$$s(t) = a(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi(t))$$

n'est soumise à aucune hypothèse sur les spectres de $a(t)$ et de $\varphi(t)$. On peut très bien l'employer pour des signaux à large bande. Dans ce cas $a(t)$ et $\varphi(t)$ perdent leur sens physique d'enveloppe et de phase.

3. - DEMODULATION COMPLEXE

3.1. - Transformée de Hilbert d'un signal : obtention du modèle analytique.

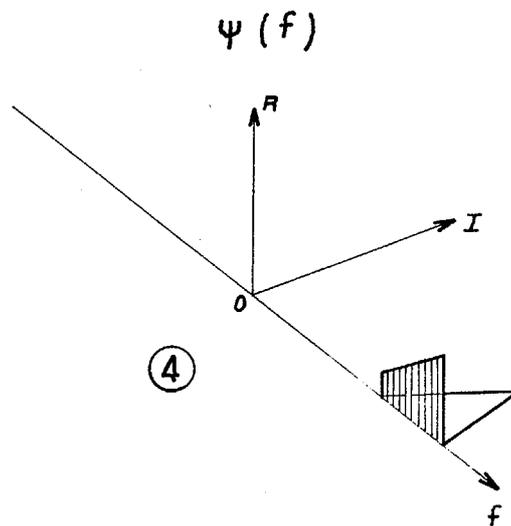
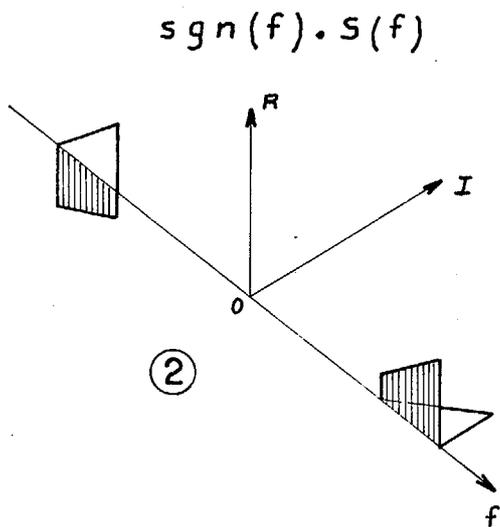
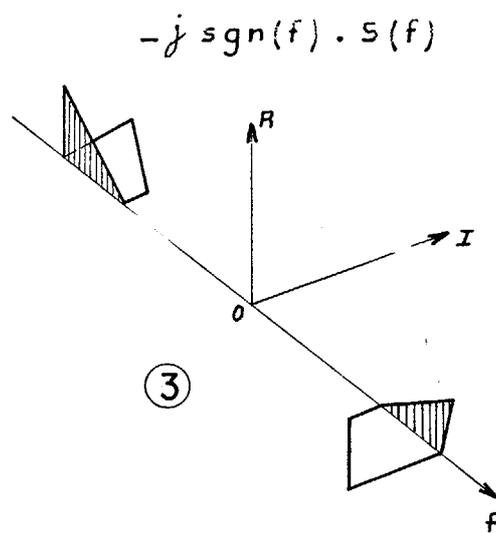
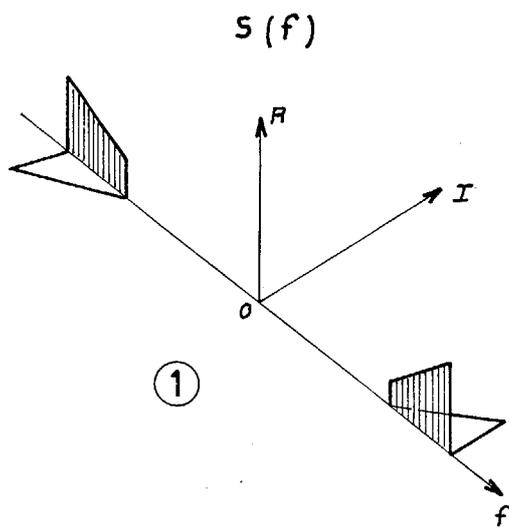
Le modèle analytique $\psi(t)$ ne saurait être réalisé par un seul signal puisqu'il est complexe, on le réalisera par ses deux composantes $s(t)$ et $\overset{v}{s}(t)$:

$$\psi(t) = s(t) + j\overset{v}{s}(t)$$

Les schémas suivants représentent les diverses opérations sur les spectres donnant le signal analytique $\psi(t)$

$$s(t) \rightleftharpoons S(f)$$

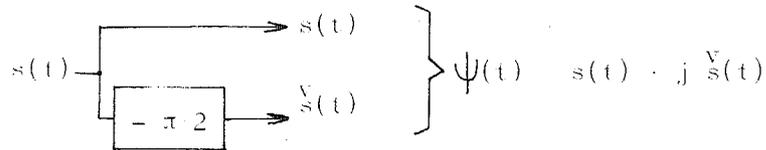
$$\overset{v}{s}(t) \rightleftharpoons -j \operatorname{sgn}[f] \cdot S(f)$$





SIGNAL ANALYTIQUE ET SIGNAL EXPONENTIEL

La composante imaginaire $\overset{V}{s}(t)$ est donc obtenue par un déphasage de $-\frac{\pi}{2}$.



Si l'on utilise la notation exponentielle, avec un signal écrit sous la forme : $s(t) = a(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi(t))$, nous aurons après déphasage de $-\frac{\pi}{2}$:

$$\overset{V}{s}(t) = a(t) \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi(t))$$

donc on obtient bien :

$$\begin{aligned} \psi(t) &= s(t) + j \overset{V}{s}(t) \\ &= a(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) + j a(t) \sin(\omega_0 t + \varphi(t)) \\ &= a(t) \cdot e^{j(\omega_0 t + \varphi(t))} \end{aligned}$$

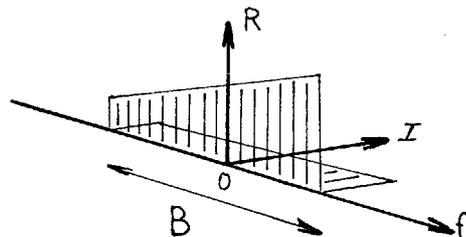
3.2. - Exemple de démodulation complexe

3.2.1. - Théorie

Soit un signal $s(t)$ de largeur de bande B , centré sur f_0 .
Son spectre s'écrit :

$$S(f) = \frac{1}{2} [M(f - f_0) + M^*(-f - f_0)]$$

$M(f)$ est un spectre basse fréquence centré sur 0.



La transformée de Fourier inverse de $M(f)$ donne un signal temporel complexe. On ne pourra donc pas obtenir par démodulation un signal réel unique représentant $M(f)$, on obtiendra deux composantes réelles dont la combinaison représentera $F^{-1} [M(f)]$.

Le signal $\tilde{s}(t)$ a pour transformée de Fourier

$$\tilde{S}(f) = -j \operatorname{sgn}(f), \quad S(f) = \frac{1}{2} \left[-j M(f - f_0) - j M^*(-f - f_0) \right]$$

Formons les produits :

$$s(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) = \cos(t)$$

$$s(t) \cdot \sin(2\pi f_0 t) = \sin(t)$$

Calculons les spectres de $\cos(t)$ et $\sin(t)$. Nous trouvons : (voir annexe)

$$CO(f) = \frac{1}{4} M(f) + \frac{1}{4} M(f - 2f_0) + \frac{1}{4} M^*(-f) + \frac{1}{4} M^*(-f - 2f_0)$$

$$SI(f) = j \left[\frac{1}{4} M(f) - \frac{1}{4} M(f - 2f_0) - \frac{1}{4} M^*(-f) - \frac{1}{4} M^*(-f - 2f_0) \right]$$

Si l'on filtre les signaux $\cos(t)$ et $\sin(t)$ par un filtre de fréquence de coupure $\frac{B}{2}$, on obtient les "composantes basse fréquence" du signal $s(t)$.

Si en théorie le filtrage est toujours possible puisque $\frac{B}{2} \ll f_0$, en pratique cela peut présenter des difficultés dans le cas où $\frac{B}{2}$ est proche de f_0 .

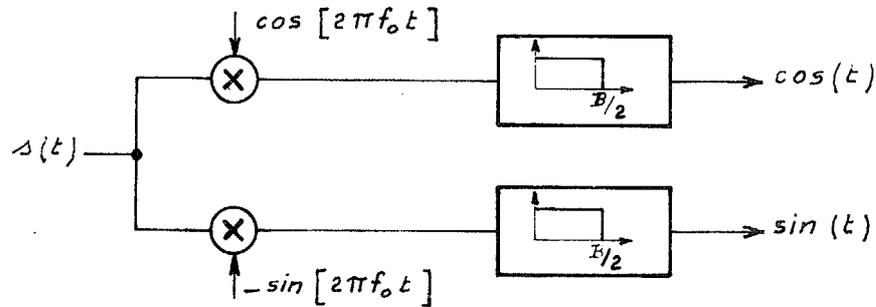
3.2.2. - Réalisation et résultats

En changeant le signe de la fréquence locale $\sin(2\pi f_0 t)$ on obtient des démodulées qui se prêtent mieux à la cohérence des calculs analytiques correspondants.



SEIGNAL ANALYTIQUE ET SIGNAL EXPONENTIEL

C'est le schéma que nous retiendrons :



Appelons $cc(t)$ et $cs(t)$ les composantes basse fréquence ainsi obtenues. Nous avons :

$$\begin{aligned} cc(t) &\rightleftharpoons CC(f) = \frac{1}{4} [M(f) + M^*(-f)] \\ cs(t) &\rightleftharpoons CS(f) = \frac{1}{4} [-M(f) + M^*(-f)] \end{aligned}$$

Le signal analytique $\psi(t)$ a pour spectre :

$$\Psi(f) = M(f) * \delta(f-f_0)$$

Le signal complexe formé par :

$$\mu(t) = 2 (cc(t) + j cs(t))$$

est tel que : $\mu(t) \rightleftharpoons M(f)$

On pourra donc écrire :

$$\psi(t) = \mu(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t}$$

et l'on aura alors :

$$s(t) = \text{R}[\psi(t)] = 2 (cc(t) \cdot \cos 2\pi f_0 t - cs(t) \cdot \sin 2\pi f_0 t)$$

$\mu(t)$ est l'amplitude complexe du signal analytique.

3.3. - Autres procédés de démodulation complexe

Il existe un certain nombre d'autres procédés de démodulation complexe tant analogiques que numériques.

Nous signalerons, à titre d'information, pour la démodulation numérique :

- l'échantillonnage à un sous-multiple de la fréquence porteuse (après un déphasage de $\frac{\pi}{2}$)
- l'échantillonnage à un multiple de 4 fois la fréquence porteuse, suivi d'une combinaison des échantillons obtenus. [3]

4. - UTILISATION DU SIGNAL ANALYTIQUE

4.1. - Filtrage passe bande

On considère le signal réel, à bande étroite :

$$s(t) = a(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t))$$

Le signal analytique associé s'écrit :

$$\psi(t) = a(t) \cdot e^{j\varphi(t)} \cdot e^{j2\pi f_0 t} = \mu(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t}$$

Avec les notations définies en 2.1., nous avons :

$$\begin{aligned} s(t) &\Leftrightarrow S(f) && \text{signal réel} \\ \psi(t) &\Leftrightarrow \Psi(f) && \text{signal analytique} \\ \mu(t) &\Leftrightarrow M(f) && \text{enveloppe complexe} \end{aligned}$$

$$S(f) = \frac{1}{2} (M(f - f_0) + M^*(-f - f_0))$$

$$\Psi(f) = \begin{cases} 2 S(f) & \text{pour } f > 0 \\ 0 & \text{pour } f \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} M(f - f_0) & \text{pour } f > 0 \\ 0 & \text{pour } f \leq 0 \end{cases}$$



SIGNAL ANALYTIQUE ET SIGNAL EXPONENTIEL

Soit le filtre passe-bande, défini par sa fonction de transfert :

$$G(f) = H(f-f_0) + H^*(-f - f_0)$$

$H(f)$ est la fonction de transfert du passe-bas équivalent.

$$H(f) \xLeftrightarrow{\quad} h(t)$$

$$H(f - f_0) \xLeftrightarrow{\quad} h(t), e^{j2\pi f_0 t}$$

$$G(f) \xLeftrightarrow{\quad} g(t) = 2 h(t), e^{j2\pi f_0 t}$$

Supposons que la réponse au système soit de la forme :

$$q(t) = R [v(t), e^{j2\pi f_0 t}]$$

$$q(t) \xLeftrightarrow{\quad} Q(f) = \frac{1}{2} (V(f - f_0) + V^*(-f - f_0))$$

$$Q(f) = S(f) \cdot G(f)$$

$$q(t) = s(t) * g(t)$$

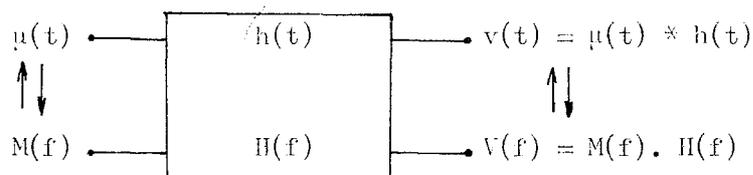
$$\begin{aligned} Q(f) &= \frac{1}{2} [M(f - f_0) + M^*(-f - f_0)] \cdot [H(f - f_0) + H^*(-f - f_0)] \\ &= \frac{1}{2} [M(f - f_0) H(f - f_0)] + \frac{1}{2} [M^*(-f - f_0) + H^*(-f - f_0)] \end{aligned}$$

on pourra définir la réponse du système par un spectre basse-fréquence équivalent :

$$V(f) = M(f) \cdot H(f)$$

Il en résulte que l'enveloppe complexe de la sortie $v(t)$ est la convolution de l'enveloppe complexe d'entrée $\mu(t)$ par la réponse per-cussionnelle complexe $h(t)$ du système passe-bas équivalent :

$$v(t) = \mu(t) * h(t)$$



4.2. - Opérations diverses sur les signaux4.2.1. - Somme

Soient deux signaux, de même fréquence centrale :

$$s_1(t) = \text{R} \left[\mu_1(t) \cdot e^{j \omega_0 t} \right]$$

$$s_2(t) = \text{R} \left[\mu_2(t) \cdot e^{j \omega_0 t} \right]$$

Nous avons :

$$s_1(t) + s_2(t) = \text{R} \left[\mu_1(t) + \mu_2(t) e^{j \omega_0 t} \right]$$

4.2.2. - Produit

Les signaux sont de la forme : (on suppose $f_2 > f_1$)

$$s_1(t) = \text{R} \left[\mu_1(t) \cdot e^{j2\pi f_1 t} \right]$$

$$s_2(t) = \text{R} \left[\mu_2(t) \cdot e^{j2\pi f_2 t} \right]$$

On a alors :

$$s_1(t) \cdot s_2(t) = \text{R} \left[\frac{1}{2} \mu_1(t) \cdot \mu_2(t) e^{j2\pi(f_1 + f_2) t} \right] \\ + \text{R} \left[\frac{1}{2} \mu_1^*(t) \cdot \mu_2(t) e^{j2\pi(f_2 - f_1) t} \right]$$

si le produit est filtré passe-bas :

$$\left[s_1(t) \cdot s_2(t) \right]_{\text{BP}} = \text{R} \left[\frac{1}{2} \mu_1^*(t) \cdot \mu_2(t) \cdot e^{j2\pi(f_2 - f_1) t} \right]$$

si le produit est filtré passe-haut :

$$\left[s_1(t) \cdot s_2(t) \right]_{\text{HP}} = \text{R} \left[\frac{1}{2} \mu_1(t) \cdot \mu_2(t) \cdot e^{j2\pi(f_2 + f_1) t} \right]$$



1.3.3. - Corrélation

Soient deux signaux de même fréquence centrale :

$$s(t) = R \left[\mu(t) \cdot e^{j \omega_0 t} \right] \quad q(t) = R \left[v(t) \cdot e^{j \omega_0 t} \right]$$

Par définition

$$\begin{aligned} C_{sq}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot q(t + \tau) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} R \left[\mu(t) \cdot e^{j \omega_0 t} \right] \cdot R \left[v(t + \tau) \cdot e^{j \omega_0 (t + \tau)} \right] dt \end{aligned}$$

En appliquant les résultats du paragraphe précédent, nous aurons :

$$\begin{aligned} C_{sq}(\tau) &= R \left[\frac{1}{2} e^{j \omega_0 \tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(t) \cdot v(t + \tau) e^{j 2\pi f_0 t} dt \right] \\ &+ R \left[\frac{1}{2} e^{j \omega_0 \tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu^*(t) \cdot v(t + \tau) dt \right] \end{aligned}$$

Le premier terme étant nul, nous obtenons :

$$C_{sq}(\tau) = R \left[\frac{1}{2} e^{j \omega_0 \tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu^*(t) \cdot v(t + \tau) dt \right]$$

Si l'on appelle corrélation complexe, l'expression :

$$B_{\mu v}(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu^*(t) \cdot v(t + \tau) dt$$

nous avons :

$$C_{sq}(\tau) = R \left[B_{\mu v}(\tau) \cdot e^{j 2\pi f_0 \tau} \right]$$

La corrélation complexe est l'enveloppe complexe de la corrélation réelle.

4.3.4. - Convolution

Avec les notations habituelles :

$$C \text{ sq}(\mathcal{Z}) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot q(\mathcal{Z} - t) dt$$

En développant le produit, nous obtenons, de la même manière que dans le paragraphe précédent :

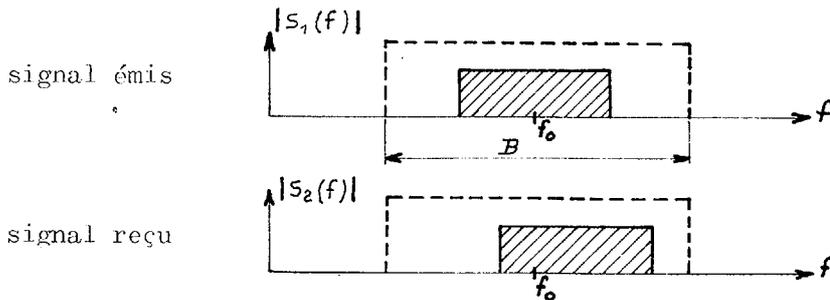
$$C \text{ sq}(\mathcal{Z}) = R \left[\frac{1}{2} e^{j 2\pi f_0 \mathcal{Z}} \mu(t) \cdot v(\mathcal{Z} - t) dt \right]$$

4.4. - Filtrage adapté en composantes "basse fréquence"

Appelons : $s_1(t)$ le signal émis $\rightleftharpoons S_1(f)$
 $s_2(t)$ le signal reçu $\rightleftharpoons S_2(f)$

Pour simplifier, nous supposons que l'effet doppler sur le signal émis se réduit une translation de fréquence.

On aura par exemple la situation suivante :



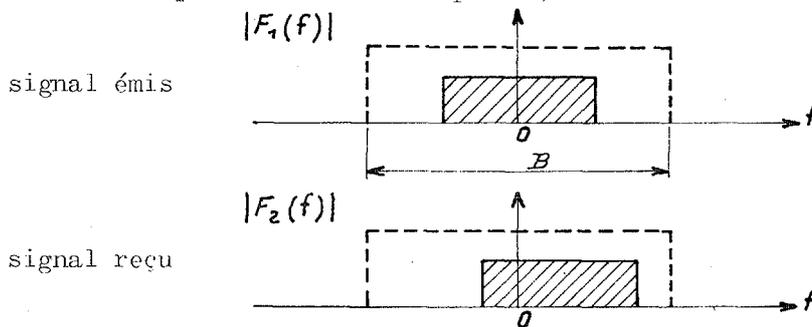
Les spectres des amplitudes complexes, sont de la forme :

$$S(f) = \frac{1}{2} \left[F(f - f_0) + F^*(f + f_0) \right]$$



SIGNAL ANALYTIQUE ET SIGNAL EXPONENTIEL

En composantes basse fréquence, nous aurons la situation suivante :



Si donc, on corrèle le signal émis avec le signal reçu, le support fréquentiel de $F_1^*(f) \cdot F_2(f)$ tend vers 0 avec un doppler croissant. La solution réside soit dans une correction de doppler sur le signal HF reçu, soit sur la copie HF avant démodulation, soit directement sur les copies BF.

Nous allons voir si cette solution est possible en supposant que le signal émis soit une fréquence modulée linéairement :

$$s_1(t) = \text{rect} \left(\frac{t}{T} \right) \cos 2\pi \left(f_0 t + \frac{\alpha^2}{4} t^2 \right)$$

La fréquence varie linéairement de $f_0 - \frac{\alpha^2 T}{4}$ à $f_0 + \frac{\alpha^2 T}{4}$ et la bande est $W = \frac{\alpha^2 T}{2}$

L'amplitude complexe du signal sera donc :

$$\mu_1(t) = \text{rect} \left(\frac{t}{T} \right) e^{j \frac{\pi}{2} \alpha^2 t^2}$$

dont le spectre est :

$$M_1(f) = \frac{\sqrt{2}}{\alpha} e^{j \frac{\pi}{4}} \text{rect} \left(\frac{f}{W} \right) e^{-j \frac{2\pi f^2}{\alpha^2}}$$

Cette expression est approchée et n'est valable que si $WT \gg 1$.

⊙

SIGNAL ANALYTIQUE ET SIGNAL EXPONENTIEL

Les démodulées complexes du signal sont :

$$cc_1(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} a^2 t^2\right)$$

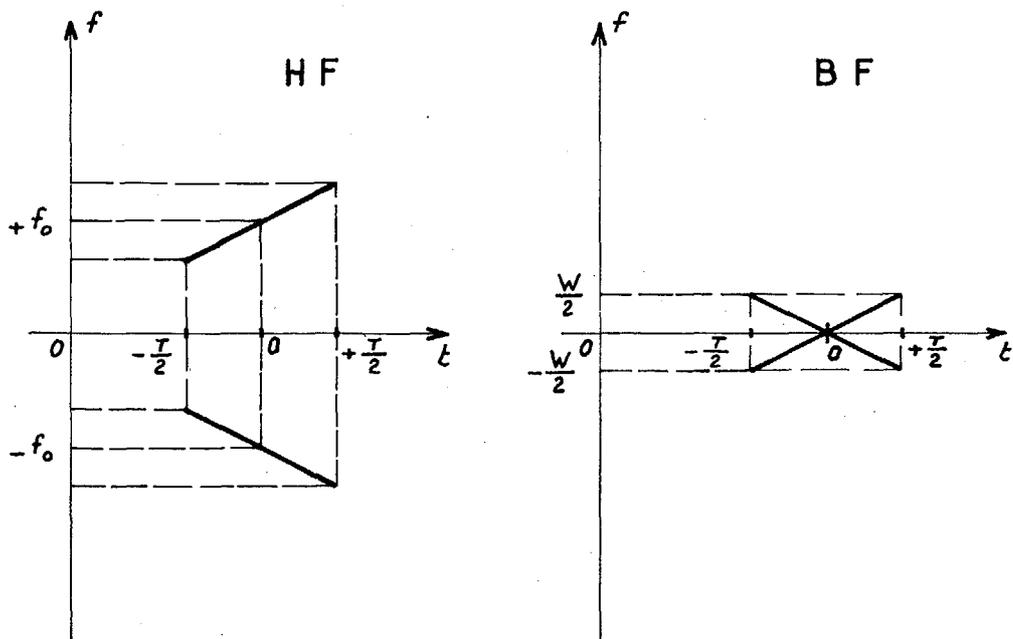
$$cs_1(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} a^2 t^2\right)$$

Leur fréquence instantanée est :

$$f_i = \frac{a^2}{2} |t|$$

Elle varie de $\frac{W}{2}$ à 0 lorsque t croît de $-\frac{T}{2}$ à 0 et de 0 à $\frac{W}{2}$ lorsque t croît de 0 à $+\frac{T}{2}$.

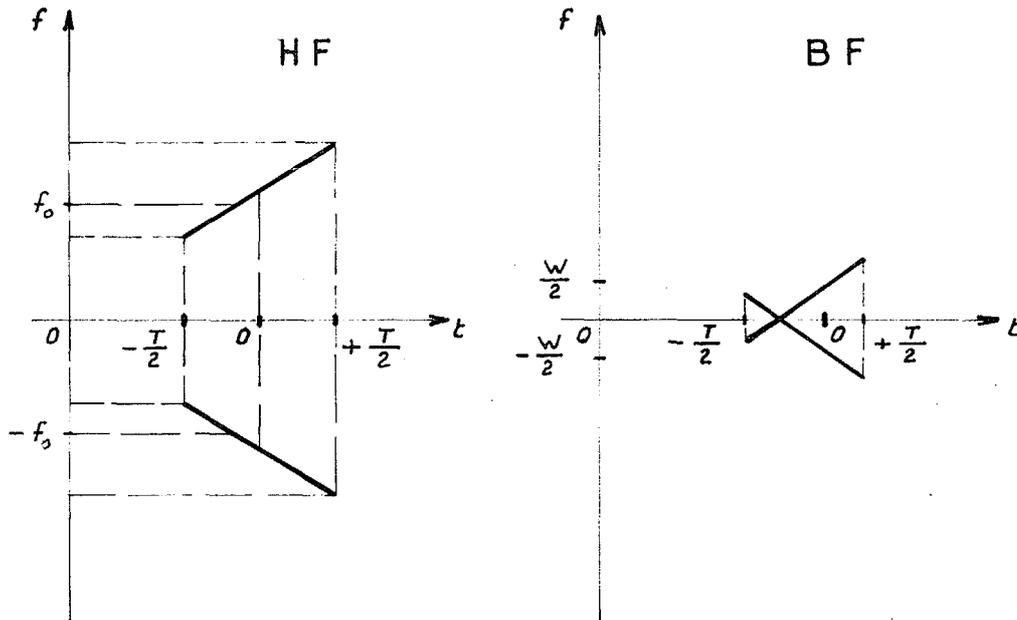
Les composantes BF du signal émis ont donc une modulation en "V", que l'on peut mettre en évidence sur les diagrammes suivants :





SIGNAL ANALYTIQUE ET SIGNAL EXPONENTIEL.

Par un raisonnement identique, nous trouvons que le signal BF dopplérisé présentera des composantes en "V" dissymétriques.



Donc, la correction döppler peut s'effectuer sur les copies BF si l'on sait générer facilement des signaux à modulation de fréquence linéaire en "V" dissymétrique.

5. - CONCLUSIONS

Dans la pratique, on peut dire que les ~~hypothèses~~ hypothèses qui conduisent à la notion de signal analytique sont remplies, notamment en ce qui concerne la réception des signaux sonar. L'utilisation des composantes basses fréquences est donc parfaitement légitime.

L'intérêt de l'utilisation des composantes basses fréquences se manifeste surtout dans le traitement numérique des signaux. En effet, même s'il faut alors traiter deux signaux, la fréquence d'échantillonnage est la plus faible que l'on peut choisir (conditions de Shannon pour des signaux à bande étroite) et le gain en temps de calcul compense le doublement des opérations à effectuer.



ANNEXE : - Spectre de $s(t) \cdot \cos 2\pi f_0 t$ et de $s(t) \cdot \sin 2\pi f_0 t$

Soit $\cos(t) = s(t) \cdot \cos 2\pi f_0 t$. On a les équations suivantes :

$$\cos(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \cdot e^{j2\pi ft} df \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} [\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)] e^{j2\pi ft} df$$

En remplaçant f par u et v dans chacune des intégrales, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \cos(t) &= \iint S(u) \cdot \frac{1}{2} [\delta(v-f_0) + \delta(v+f_0)] e^{j2\pi t(u-v)} du dv \\ &= \int S(u) \cdot du \cdot \left[\frac{1}{2} e^{j2\pi t(u-f_0)} + \frac{1}{2} e^{j2\pi t(u+f_0)} \right] \\ &= \frac{1}{4} \int [F(u-f_0) + F^*(-u-f_0)] \left[e^{j2\pi t(u-f_0)} + e^{j2\pi t(u+f_0)} \right] du \end{aligned}$$

en développant cette expression :

$$\begin{aligned} 4 \cos(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(u-f_0) \cdot e^{j2\pi t(u-f_0)} du + \int_{-\infty}^{+\infty} F(u-f_0) e^{j2\pi t(u+f_0)} du \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(-u-f_0) e^{j2\pi t(u+f_0)} du + \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(-u-f_0) e^{j2\pi t(u-f_0)} du \end{aligned}$$

Faisons les changements de variable suivants :

$$\alpha = u - f_0 \quad \beta = u + f_0$$

nous avons :

$$\begin{aligned} 4 \cos(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) \cdot e^{j2\pi t\alpha} d\alpha + \int_{-\infty}^{+\infty} F(\beta-2f_0) e^{j2\pi t\beta} d\beta \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(-\beta-2f_0) \cdot e^{j2\pi t\beta} d\beta + \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(-\alpha) e^{j2\pi t\alpha} d\alpha \end{aligned}$$

Le spectre de $\cos(t)$ est donc :

$$CO(f) = \frac{1}{4} F(f) + \frac{1}{4} F(f-2f_0) + \frac{1}{4} F^*(-f) + \frac{1}{4} F^*(-f-2f_0)$$

Par des calculs semblables, le spectre de $\sin(t)$ est :

$$SI(f) = \frac{j}{4} F(f) - \frac{j}{4} F(f-2f_0) - \frac{j}{4} F^*(-f) + \frac{j}{4} F^*(-f-2f_0)$$

REFERENCES

1. - RON BRACEWELL

The Fourier Transform and its Applications
Mc Graw-Hill Book Company

2. - RUBIN, DI FRANCO

Analytic Representation of Wide Band Ratio Frequency Signals
Journal of the Franklin Institute (March 63)

3. - FRANCK R. DICKY Jr

Single Algorithms for Approximating the Complex Envelope in
Terms of Real Samples
Proceedings of the IEEE (July 71)