



TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

Nice 7 au 12 mai 1973

ETUDE STATISTIQUE DE LA STABILITE
ET DES FLUCTUATIONS DES OSCILLATEURS.

E. BOILEAU ET B. PICINBONO

Laboratoire d'Etude des Phénomènes Aléatoires

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

Bâtiment n° 210 - 91405 ORSAY (France)

RESUME

La stabilité des oscillateurs est limitée par les fluctuations d'origines diverses (macroscopiques ou microscopiques) qui rendent aléatoire la phase instantanée du signal. L'amplitude instantanée est en général beaucoup mieux stabilisée et peut être considérée comme constante. Nous étudions en détail la relation phase-fréquence en montrant que la phase est un processus à accroissement stationnaires dont on présente certaines propriétés. En particulier on étudie les cas où la fréquence instantanée n'est pas définie. Nous présentons ensuite quelques méthodes possibles de mesures expérimentales de quantités pouvant décrire la stabilité d'un point de vue statistique. Ces méthodes sont comparées et les expressions de stabilité à court ou long terme sont précisées.

SUMMARY

The stability of oscillators is limited by microscopic or macroscopic random fluctuations. In general these fluctuations have no influence about the instantaneous amplitude and only the phase is perturbed. We study with some details the relation phase-instantaneous frequency and we show that the phase is a process with stationary increments. Many properties of such processes are presented. Moreover we study some methods to study experimentally parameters which can give a description of statistical stability. Particularly short term and long term stability can be defined correctly.

I - INTRODUCTION

La stabilité est de toute évidence une des qualités essentielles que l'on attend d'un oscillateur. Toutefois, la caractérisation de cette stabilité par quelques paramètres physiquement accessibles n'est pas un problème simple et de nombreuses études ont été présentées à ce sujet au cours des dernières années. C'est un domaine de recherche de grande importance, dans la mesure où la construction d'étalons de fréquence de plus en plus stables en des lieux différents nécessite un choix de paramètres significatifs pour en permettre la comparaison. Par ailleurs, il est important de savoir si les expressions "stabilité à court terme" ou "stabilité à long terme" ont un sens bien défini tout autant que celles de "dérives lentes de fréquences" ou "fluctuations rapides".

Les problèmes évoqués ci-dessus ont fait l'objet de très nombreuses publications. Une vue d'ensemble à la date de 1966 peut s'effectuer en consultant le numéro spécial de la revue contenant les références [1 - 4]. Depuis lors, on peut également citer quelques références intéressantes [5 - 9].

Toutefois, les points de vue des auteurs sont souvent différents. De plus, de nombreux calculs reposent sur des bases mathématiques fragiles, comme par exemple l'utilisation de fonction de corrélation pour des processus aléatoires qui ne sont ni du second ordre ni stationnaires. C'est pourquoi il est intéressant de faire le point sur la question.

Les résultats présentés dans ce papier ne sont pas tous nouveaux. Mais nous avons tenté de les présenter de la manière la plus correcte du point de vue théorique. Nous avons également tenté de présenter une synthèse faisant apparaître les convergences et les avantages des différents points de vue possibles.

II - MODELES STATISTIQUES

Le signal engendré par un oscillateur est évidemment quasi-monochromatique et peut toujours s'écrire

$$(2-1) \quad X(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \Phi(t)]$$



où ω_0 est la fréquence angulaire fondamentale et $A(t)$ et $\varphi(t)$ l'amplitude et la phase instantanées.

C'est la dépendance en t des fonctions $A(t)$ et $\varphi(t)$ qui rend le signal non rigoureusement monochromatique. Pour représenter la réalité on est alors conduit à utiliser des "modèles" de signaux dépendant si possible d'un nombre limité de paramètres.

Il est important d'insister sur cette notion de modèle. Toutes les propriétés mathématiques développées sont des propriétés du modèle, la réalité physique pouvant toujours être plus complexe. Mais si le modèle n'est qu'une représentation, il doit en contrepartie, être parfaitement bien défini du point de vue mathématique. Indiquons donc les propriétés qu'il est raisonnable d'introduire pour un modèle.

1. Caractère aléatoire (Randomness)

Ce caractère est lié au fait que pour le physicien, l'observation du signal jusqu'à un instant donné ne permet pas de prédire exactement le comportement ultérieur. Il est bien clair que cette constatation d'expérience ne permet nullement de construire correctement un modèle. Pour représenter l'oscillateur par une fonction aléatoire $X(t, \omega)$ où t est le temps et ω représente un point d'un espace de probabilité Ω , il faut au préalable avoir construit cet espace au moyen de quelques hypothèses. Ceci est particulièrement important dans le cas des oscillateurs où l'on fait des mesures souvent très longues sur un seul échantillon. Doit-on en particulier intégrer les dérives lentes dans le modèle, ou considérer, comme certains, [1] que ces dérives ne sont pas aléatoires ? Selon le cas, le modèle statistique sera très différent.

2. Modèle du second ordre.

Une f.a. $X(t)$ est dite du second ordre si $E [X^2(t)]$ est bornée pour tout t . Une grande partie de la théorie des f.a. n'est valable que dans ce cas ; en particulier, tous les résultats concernant la décomposition spectrale.

Ceci implique notamment que les f.a. que l'on utilise aient une densité spectrale $S(\omega)$ intégrale puisque $\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega < \infty$. Or, beaucoup d'auteurs utilisent sans précautions

[†] La lettre ω est classique dans les ouvrages de calcul des Probabilités et ne peut prêter à confusion avec la fréquence angulaire.

des densités spectrales du type $\nu^{-\alpha}$ qui ne sont manifestement pas intégrables soit à cause des basses fréquences soit des hautes. C'est en particulier le cas du "flicker noise" conduisant à une densité spectrale en ν^{-2} . Un moyen très simple d'éviter ces divergences est d'utiliser une fréquence de coupure soit aux basses soit aux hautes fréquences. Mais dans ce cas les calculs effectués à partir du modèle peuvent fortement dépendre de ces fréquences de coupure alors que celles-ci n'étaient qu'un artifice mathématique pour assurer la convergence d'une intégrale. Il se peut toutefois que certaines grandeurs n'en dépendent pratiquement pas et seules ces grandeurs pourront avoir une interprétation physique simple.

On peut également indiquer que s'il est raisonnable d'introduire dans un modèle une "fréquence instantanée" du second ordre, la phase instantanée d'un oscillateur n'est pas généralement de cette classe. L'exemple le plus évident est évidemment celui d'une diffusion de la phase en mouvement brownien, comme ceci apparaît dans presque tous les modèles microscopiques des oscillateurs [10].

3. Stationnarité.

La stationnarité n'est pas une propriété accessible à l'expérience, puisque toutes les mesures physiques ont une durée finie. C'est donc une propriété que l'on donne a priori au modèle statistique et dont on vérifie expérimentalement certaines conséquences. Toutefois il est nécessaire de ne pas abuser de l'hypothèse de stationnarité.

En particulier on peut écrire la relation phase-fréquence d'un oscillateur sous la forme

$$(2-2) \quad \varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t F(\varphi) d\varphi$$

qui montre évidemment que si la fréquence $F(\varphi)$ est stationnaire, la phase $\varphi(t)$ ne l'est pas en général. Le cas où la phase diffuse en mouvement brownien est d'ailleurs un cas classique de non stationnarité.

Ainsi, s'il est raisonnable d'introduire dans un modèle une fréquence $F(t)$ stationnaire, on doit en déduire que la phase n'est pas stationnaire et s'interdire de parler de fonction de corrélation de la phase. Nous reviendrons largement sur ce point au paragraphe suivant.

Le caractère stationnaire des dérives lentes est très problématique. Nous ne parlerons pas des dérives déterministes qu'on peut toujours éliminer puisqu'elles sont parfaitement connues. Les dérives, liées par exemple à de lentes fluctuations thermiques, ne sont pas prédictibles et leur caractère stationnaire ne pourrait être vérifié qu'au moyen d'expériences extrê-



mement longues. Ces dérives étant lentes n'ont des composantes spectrales significatives qu'aux très basses fréquences et peuvent donc être éliminées par filtrage. Si elles ne sont pas stationnaires leur étude n'est possible qu'en faisant fonctionner simultanément plusieurs oscillateurs macroscopiquement identiques ce qui est évidemment très difficile.

Il peut toutefois exister des dérives lentes stationnaires que nous intégrons dans un modèle stationnaire et qu'il sera intéressant d'étudier par une analyse spectrale aux très basses fréquences.

4. Observation sur une durée limitée.

Toute expérience ne dure qu'un temps limité. Ceci pose l'important problème de l'existence physique de la fréquence zéro. Pour la construction du modèle, deux attitudes peuvent être adoptées. On peut utiliser une fonction nulle à l'extérieur de l'intervalle d'observation, qui sera donc non stationnaire et sans composantes spectrales à la fréquence 0. La durée d'observation introduit en fait une fréquence de coupure de l'ordre de $1/\tau$. On peut par contre utiliser un modèle stationnaire qui n'est observé que pendant un temps limité. L'augmentation de τ permet simplement d'accéder à des fréquences plus basses du modèle.

Dans cette perspective, on peut également se demander quel est le meilleur parti que l'on peut tirer d'une observation finie pour en déduire des informations sur le modèle. Ce problème sera examiné dans la suite.

5. Hypothèses sur l'amplitude instantanée.

Le modèle décrit par l'éq. (2-1) fait apparaître une amplitude et une phase instantanées. Il est bien clair que la plupart des oscillateurs sont stabilisés en amplitude, de sorte que la largeur de raie provient essentiellement des fluctuations de phase. En fait la stabilisation n'est jamais parfaite, et il faudrait toujours tenir compte des résidus de fluctuations d'amplitude. Nous ne le ferons pas dans la suite et raisonnerons toujours sur le modèle

$$(2-3) \quad X(t, \omega) = A \cos[\omega t + \phi(t, \omega)]$$

où t représente le temps et ω le point dans l'espace de probabilité.

III - RELATION PHASE-FREQUENCE DANS UN
OSCILLATEUR

1. Généralités.

La quantité physiquement accessible à la sortie d'un oscillateur stabilisé en amplitude est le signal $X(t)$ donné par l'éq. (2-3). Quelles que soient les propriétés statistiques de la fonction aléatoire (f.a.) φ , $X(t)$ est une f.a. du second ordre puisque $X^2(t) \sim A^2$.

La phase totale instantanée peut être déduite de $X(t)$ et s'écrit

$$(3-1) \quad \varphi(t) = \omega_c t + \bar{\varphi}(t),$$

où $\bar{\varphi}(t)$ est la phase instantanée.

Dans les calculs postérieurs on utilisera souvent l'accroissement de phase défini par

$$(3-2) \quad \Delta\bar{\varphi}(t; \tau) = \bar{\varphi}(t) - \bar{\varphi}(t - \tau).$$

On peut évidemment toujours écrire

$$(3-3) \quad \bar{\varphi}(t) = \bar{\varphi}(0) + \Delta\bar{\varphi}(t; 0)$$

La phase instantanée n'est pas nécessairement du second ordre comme ceci a déjà été indiqué à propos de la diffusion de la phase en mouvement brownien (m.b.).

Il est courant dans les études sur les oscillateurs d'introduire la fréquence instantanée définie comme dérivée de la phase totale instantanée, soit

$$(3-4) \quad \omega(t) = \omega_c + F(t)$$

avec

$$(3-5) \quad F(t) = \frac{d}{dt} \bar{\varphi}$$

Il s'agit évidemment d'une fréquence angulaire. Il convient d'emblée de noter que la fréquence instantanée est une quantité qui n'est

- ni mathématiquement toujours définie
- ni physiquement simplement accessible.

En effet, la phase $\bar{\varphi}(t)$ peut fort bien ne pas avoir de dérivée, tout au moins au sens des fonctions. C'est en particulier le cas d'un oscillateur avec sauts de phases à des instants aléatoires [11].



Mais le problème devient plus critique quand la phase est aléatoire, puisque de nombreuses f.a. n'ont pas de dérivées. L'exemple le plus connu est évidemment le m.b. [12] qui est continu et sans dérivée. Ainsi dans tous les modèles microscopiques des oscillateurs où la phase diffuse en m.b. il n'y a pas de fréquence instantanée.

La mesure de fréquence instantanée s'opère en général à partir de l'accroissement de phase et le résultat de mesure s'exprime par

$$(3-6) \quad F_{\tau}(t) = \frac{1}{\tau} \Delta \varphi(t; \tau).$$

Si la fréquence instantanée existe on a évidemment

$$(3-7) \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} F_{\tau}(t) = F(t).$$

En fait la plupart des discriminateurs de fréquence ont une constante de temps τ non nulle et d'ailleurs pas toujours bien définie. On considère ceci comme sans importance en arguant qu'un oscillateur doit avoir une largeur de raie très faible devant ω_0 , et que $\dot{\varphi}(t)$ doit donc être à variation lente. On peut ainsi prendre $\tau \ll 1/\omega_0$, ce qui permet en particulier de mesurer $F_{\tau}(t)$ par une méthode de comptage de zéros de la fonction $X(t)$. En fait ce raisonnement est inexact, le meilleur exemple étant le m.b. qui tout en donnant à l'oscillateur une largeur de raie très étroite conduit à une fonction $F_{\tau}(t)$ dépendant fortement de τ , et de plus sans aucune limite pour $\tau \rightarrow 0$. D'autres situations de ce genre peuvent être développées [13] [14].

Il faut donc être extrêmement prudent lorsque l'on parle de fréquence instantanée et vérifier dans chaque cas que cette quantité est bien définie.

2. Hypothèses statistiques sur la phase instantanée.

Comme nous l'avons dit ci-dessus (voir éq. 2-2), la phase d'un oscillateur n'est pas stationnaire. Si l'on veut obtenir des propriétés de stationnarité sur le signal $X(t)$, il suffit de supposer que les accroissements $\Delta \varphi(t; \tau)$ sont stationnaires. Dans ce cas, la phase appartient à la classe des f.a. à accroissements stationnaires [15] - [16] - [17]. Toute fonction étant égale à la somme de ses accroissements, la forme la plus générale de la phase peut s'écrire

$$(3-8) \quad \varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t d\varphi(\tau)$$

où les accroissements différentiels sont définis par

$$(3-9) \quad d\varphi(\tau) = \Delta \varphi(\tau; d\tau)$$

Ces accroissements $d\phi(t)$ sont par hypothèse stationnaires, et leurs propriétés du second ordre sont caractérisées par

$$(3-10) \quad \langle d\phi(t) d\phi(t') \rangle = \Gamma(t - t') dt dt'$$

qui représente un élément différentiel dans le plan $t \times t'$. Il est clair que $\Gamma(t)$ est une fonction de corrélation.

Conditions d'existence d'une fréquence instantanée.

On peut montrer, en utilisant des résultats classiques sur la dérivation des f.a. du second ordre, que la phase a une dérivée si

$$(3-11) \quad \Gamma(0) < M$$

ce qui signifie que la fonction $\Gamma(\tau)$ est bornée puisque $\Gamma(\tau) \leq \Gamma(0)$. Dans ce cas il existe une fréquence instantanée $F(t)$ et l'accroissement $d\phi(t)$ peut s'écrire

$$(3-12) \quad d\phi(t) = F(t) dt$$

et l'équation (3-8) se ramène à l'équation (2-2).

Il résulte de (3-10) que $\Gamma(\tau)$ est alors la fonction de corrélation de la fréquence instantanée $F(t)$. En introduisant sa densité spectrale $\chi_F(\nu)$, l'éq. (3-11) se ramène à

$$(3-13) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \chi_F(\nu) d\nu < M.$$

Si $\Gamma(0)$ n'est pas borné, il n'y a pas de fréquence instantanée. Le cas le plus courant est celui où $\Gamma(\tau)$ peut s'écrire

$$(3-14) \quad \Gamma(\tau) = \langle \xi(\tau) \rangle + \beta \Gamma'(\tau)$$

avec $\langle \xi(\tau) \rangle < M$. Le m.b. correspond à $\beta = 0$. Bien qu'il n'y ait pas de fréquence instantanée la phase reste toujours parfaitement définie. Evidemment il existe d'autres modèles simples de phase à accroissements stationnaires sans dérivée.

3. Propriétés de la phase dans un modèle avec fréquence instantanée.

On suppose donc qu'il existe une f.a. $F(t)$ stationnaire et du second ordre telle que

$$(3-15) \quad \bar{F}(t) = \bar{F}_0 + \int_0^t F(\xi) d\xi$$

d'où

$$(3-16) \quad \Delta \phi(t, \tau) = \int_{t-\tau}^t F(\xi) d\xi.$$



Cet accroissement est manifestement stationnaire, puisque obtenu à partir de $F(t)$ par un filtrage linéaire. Nous allons brièvement résumer les résultats importants pour la suite concernant les f.a. à accroissements stationnaires, avec dérivée, les calculs détaillés se trouvant dans la Réf. [16]

Soit $\chi_F(\nu)$ la densité spectrale de $F(t)$. Par hypothèse, $F(t)$ étant du second ordre

$$(3-17) \quad \sigma_F^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_F(\nu) d\nu < +\infty.$$

On peut toujours écrire

$$(3-18) \quad \chi_F(\nu) = \nu^m \chi(\nu) ; \quad \chi(0) \neq 0$$

qui précise le comportement de la densité spectrale $\chi_F(\nu)$ au voisinage de l'origine. Evidemment si $\chi_F(\nu)$ est rigoureusement nulle à l'origine, par l'existence de coupure des basses fréquences, on prendra m arbitrairement grand. De plus $\chi(\nu)$ doit posséder pour les hautes fréquences des propriétés assurant la convergence de l'intégrale figurant dans l'éq. (3-17).

Ayant noté que le passage de $F(t)$ à $\Delta\phi(t, \tau)$ dans l'équation (3-16) était un filtrage linéaire, on en déduit directement l'expression de la variance en calculant le gain du filtre, ce qui donne

$$(3-19) \quad \sigma_{\Delta\phi}^2(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\sin \pi \nu \tau}{\pi \nu \tau} \right]^2 \chi_F(\nu) d\nu.$$

Pour la suite de la discussion plusieurs cas sont alors à envisager selon les valeurs de m .

Premier cas : $m > 1$.

Ce cas correspond au fait que la f.a. $F(t)$ stationnaire et du second ordre possède une primitive du second ordre.

En effet, on appelle filtre linéaire dérivateur F_D le filtre de gain complexe.

$$(3-20) \quad G_D(\nu) = 2\pi i \nu$$

et la primitive d'une fonction est obtenue par filtrage inverse, c'est-à-dire par un filtre de gain

$$(3-21) \quad G_P(\nu) = 1/2\pi i \nu$$

Il est clair qu'une f.a. du second ordre ne possède une primitive du second ordre que si

$$(3-22) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi^2 \gamma^2} |F(\gamma)|^2 d\gamma < +\infty$$

et compte tenu des éq. (3-17) et (3-18) ceci ne se réalise que si $m > 1$.

Soit $P_F(t)$ la primitive de $F(t)$. La densité spectrale de $P_F(t)$ s'écrit

$$(3-23) \quad |P_F(\gamma)|^2 = \frac{1}{4\pi^2 \gamma^2} |F(\gamma)|^2$$

Examinons maintenant les conséquences de l'existence d'une primitive.

On peut montrer que la phase $\bar{\phi}(t)$ et son accroissement peuvent alors s'écrire, en partant des éq. (3-15) et (3-16),

$$(3-24) \quad \bar{\phi}(t) \approx \bar{\phi}_0 + P_F(t) - P_F(0)$$

$$(3-25) \quad \Delta \bar{\phi}(t, \tau) = P_F(t) - P_F(t - \tau).$$

On en déduit deux conséquences importantes.

D'une part $\bar{\phi}(t)$ est la somme d'une v.a. $\bar{\phi}_0 - P_F(0)$ et d'une f.a. $P_F(t)$ corrélées. Cette somme n'est donc pas stationnaire, sauf si $\bar{\phi}_0 = P_F(0)$. Mais on peut dire que $\bar{\phi}(t)$ est stationnalisable par addition d'une v.a. puisque $\bar{\phi}(t) + P_F(0) - \bar{\phi}_0$ est stationnaire.

D'autre part on déduit de l'éq. (3-25)

$$(3-26) \quad \sigma_{\Delta \phi}^2(\tau) = 2 [\sigma_P^2 - \Gamma_P(\tau)]$$

qui est l'équivalent dans ce cas de l'éq. (3-19), où σ_P et $\Gamma_P(\tau)$ sont la variance et la fonction de corrélation de $P(t)$. Comme on sait que $\Gamma_P(\tau) \leq \sigma_P^2$, on en déduit que

$$(3-27) \quad \sigma_{\Delta \phi}^2(\tau) \leq 4 \sigma_P^2$$



et par ailleurs si $P(t)$ est ergodique

$$(3-28) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \sigma_{\phi}^2(\cdot) = 2\sigma_P^2$$

Ces relations montrent que la phase ne peut être un processus de diffusion avec une variance non bornée à l'infini.

Second cas : $-1 < m < 1$

Dans ce cas $F(t)$ n'a pas de primitive du second ordre, puisque l'intégrale (3-22) diverge. Les éq. (3-24), (3-25) et (3-26) ne sont plus valables, et il faut revenir aux éqs. (3-15) (3-16) et (3-19). L'étude de cette dernière montre que pour grand devant le temps de corrélation de $F(t)$ on a

$$(3-29) \quad \sigma_{\phi}^2(\cdot) \approx \tau_c^{1-m}$$

On voit donc que la phase est un vrai processus de diffusion. En effet, on peut toujours écrire $\phi(t) = \int_0^t \dot{\phi}(t, t) dt$ d'où $\sigma_{\phi}^2(t) \approx \tau_c^{1-m}$, qui croît indéfiniment. En particulier pour $m = 1$ on retrouve asymptotiquement la variance comme dans le cas mouvement brownien.

Par ailleurs, il est bien évident qu'un processus de diffusion ne peut être rendu stationnaire par addition d'une v.a.

Ainsi dans ce cas il est impossible d'introduire une fonction de corrélation ou une densité spectrale de la phase. La phase ne possède qu'une covariance calculable à partir de l'éq. (3-15). Beaucoup d'auteurs ont utilisé une densité spectrale $\gamma_{\phi}(\nu)$ pour la phase en notant simplement que d'après l'éq. (3-15) la fréquence est la dérivée de la phase, d'où

$$(3-30) \quad \gamma_{\phi}(\nu) = 4\tau_c^2 \nu^2 \gamma_F(\nu)$$

mais sans voir que cette quantité peut être non intégrable, ce qui lui enlève toute signification de densité spectrale.

Or il semble précisément que le cas $-1 < m < 1$ est le plus important dans l'étude des oscillateurs, ce qui nécessitera donc de prendre quelques précautions.

4. Modèles de phase sans fréquence instantanée.

Nous n'allons pas répertorier tous les modèles statistiques possibles de phase sans dérivée. Il faut toutefois noter que si différents arguments physiques conduisent à adopter



$\chi_F(\nu)$. Il peut également être intéressant de mesurer sa densité de probabilité $p(f)$.

Mais comme on l'a précédemment noté, l'hypothèse de stationnarité ne semble pas réaliste pour décrire la situation expérimentale. L'observation de la f.i. met en évidence des fluctuations rapides et des dérives lentes aléatoires d'amplitude beaucoup plus importante. La f.i. paraît stationnaire sur un temps d'observation assez petit, mais ses propriétés moyennes varient lentement au cours du temps. On indique ce fait en parlant de stabilité à court ou long terme, mais encore faut-il pouvoir donner une signification à ces expressions. C'est ce que nous allons tenter dans ce paragraphe.

Comme nous l'avons vu précédemment les seules dérives que l'on puisse étudier expérimentalement sont celles supposées stationnaires. Ces dérives se différencient des fluctuations de fréquence essentiellement par leur constante de temps d'évolution. Elles peuvent donc être étudiées ou éliminées par une analyse spectrale très basse fréquence. Les dérives aléatoires et non stationnaires même sur un temps très long échappent à toute analyse statistique. Quant aux dérives déterministes, elles ne jouent évidemment aucun rôle dans notre étude, puisqu'elles peuvent être éliminées par soustraction.

L'analyse spectrale aux très basses fréquences ne peut s'effectuer que par des méthodes temporelles. On pourrait mesurer la fonction de corrélation pour des retards très longs et en calculer ensuite la transformée de Fourier.

Nous préférons présenter une méthode directe. L'outil idéal est le filtre passe haut parfait de gain nul pour $\nu < f$ et valant 1 pour $\nu > f$.

La variance à la sortie d'un tel filtre est

$$(4-1) \quad \sigma^2(f) = \int_f^{+\infty} \chi(\nu) d\nu$$

et la connaissance de $\sigma^2(f)$ permet une détermination particulièrement simple de $\chi(\nu)$ qui en est la dérivée.

Ce filtre n'étant pas réalisable on tente de l'approximer par un filtre de gain $G_f(\nu)$ et la variance s'écrit alors

$$(4-2) \quad \sigma^2(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} |G_f(\nu)|^2 \chi(\nu) d\nu.$$

Selon la structure de $|G_f(\nu)|^2$ il peut être plus ou moins aisé de déduire $\chi(\nu)$ de la mesure de $\sigma^2(f)$.



de tels modèles, tous les instruments de mesure de fréquence donneront des résultats sans aucune signification puisque la quantité qu'ils doivent mesurer n'existe pas.

Si nous supposons que $f(\tau)$, tout en n'étant pas bornée pour $\tau = 0$, admet une transformée de Fourier $F(\omega)$ à la limite au sens des distributions, l'éq. (3-19) est toujours valable en remplaçant $f(\tau)$ par $F(\omega)$.

Deux exemples peuvent être particulièrement intéressants. Tout d'abord si $f(\tau) = \delta(\tau)$, on a $F(\omega) = 1$ et

$$(3-31) \quad \sigma_{\omega}^2 = \dots$$

C'est le cas d'une phase diffusant en mouvement brownien ou possédant des sauts aléatoires, indépendants, centrés à des instants poissonniens.

L'autre exemple particulièrement cité dans la littérature est le bruit Flicker [18]. On le considère comme lié à une fréquence instantanée de densité spectrale en ω^{-1} au voisinage de l'origine. Bien entendu l'éq. (3-13) n'est pas vérifiée, ce qui est également le cas pour le m.b. et signifie seulement que la fréquence instantanée n'existe pas. Mais on voit sur (3-19) que σ_{ω}^2 est infini quel que soit τ ce qui n'a aucun sens physique. On voit donc que ce type de bruit ne peut pas entrer dans un modèle de phase même sans fréquence instantanée.

On rétablit en général la situation par une coupure du spectre aux basses fréquences, mais tous les résultats dépendront de cette fréquence de coupure qui est largement arbitraire.

IV - DESCRIPTION DE LA STABILITE DE FREQUENCE

1. Généralités

La stabilité d'un oscillateur peut être caractérisée par diverses propriétés du signal de sortie $X(t)$, comme par exemple sa largeur de raie définie de manière plus ou moins empirique. Toutefois comme on s'intéresse aux étalons de fréquence, ce seront plutôt des propriétés de la fréquence instantanée qu'on cherche à décrire par quelques paramètres. Ainsi dans tout ce paragraphe on admettra l'existence d'une fréquence instantanée (f.i.).

Si la f.i. est rigoureusement stationnaire on peut en particulier déterminer ses propriétés du second ordre, c'est-à-dire sa fonction de corrélation $f_P(\tau)$ ou sa densité spectrale



$$(4-5) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} P_1(t, \tau, T) = E[F_c^2] - E[F_c]^2 = \sigma_F^2$$

Mais vu les dérives lentes qui sont intégrées dans σ_F^2 , cette quantité n'est pas très significative, et on est conduit à faire des mesures en temps fini T et à étudier

$$(4-6) \quad \sigma_1^2(\tau, T) = E[P_1]$$

en fonction de T.

En utilisant les relations classiques du filtrage linéaire [19] il vient

$$(4-7) \quad \sigma_1^2(\tau, T) = \int_{-\infty}^{+\infty} |G_1(\nu)|^2 \left[1 - \left(\frac{\sin \pi \nu T}{\pi \nu T} \right)^2 \right] d\nu$$

qui prouve que $\sigma_1^2(\tau, T)$ est la variance d'une f.a. stationnaire filtrée dans un filtre $G_1(\nu)$ tel que

$$(4-8) \quad |G_1(\nu)|^2 = 1 - \left(\frac{\sin \pi \nu T}{\pi \nu T} \right)^2$$

qui a donc pour propriété d'éliminer les fréquences inférieures à $1/T$. On élimine donc les dérives lentes avec une constante de temps bien déterminée.

La fonction $P_1(t, \tau, T)$, base de ce calcul, peut être obtenue par le circuit P_1 donné sur la Fig. 1. Ce dispositif n'est évidemment pas un filtrage linéaire. La moyenne $E(P_1)$ de l'éq. (4-6) s'obtient évidemment par moyenne temporelle sur un temps très long. Les erreurs dues à cette moyenne en temps fini seront évaluées ultérieurement.

Il est facile de voir à partir de l'éq. (4-7) que les valeurs limites de $\sigma_1^2(\tau, T)$ sont

$$(4-9) \quad \sigma_1^2(\tau, \infty) = \sigma_F^2$$

$$(4-10) \quad \sigma_1^2(\tau, 0) = 0.$$

Version digitale du même procédé.

L'usage des fréquencemètres digitaux avec lesquels $F_x(t)$ n'est pas mesurée de manière continue mais discrète nous



Dans certaines études on ne cherche pas à mesurer $\chi(\nu)$ mais à vérifier un modèle avec un nombre fini de paramètres qu'on tente de déterminer. Il est clair que dans ce cas on peut être moins exigeant sur le filtre $|G_f(\nu)|^2$ permettant de résoudre l'équation intégrale (4-2).

C'est ainsi que certains auteurs [4] [6] admettent que la fréquence instantanée se décompose en une somme de composantes indépendantes et stationnaires de densité spectrale en ν^k , avec k entier et $k < 2$. C'est une simplification qu'il n'est pas nécessaire de faire pour étudier le problème dans son ensemble.

Comme nous l'avons dit au paragraphe précédent, la f.i. est mesurée par l'intermédiaire d'une différence de phase, eqs. (3-6) et (3-16). La f.i. mesurée $F_\tau(t)$ s'obtient donc par filtrage linéaire de la f.i. vraie, et en particulier leurs densités spectrales sont reliées par (voir eq. 3-19)

$$(4-3) \quad \chi_\tau(\nu) = \chi_F(\nu) \frac{(\sin \pi \nu \tau)^2}{\pi \nu \tau}$$

Cette relation montre que les hautes fréquences de $F(t)$ sont altérées par l'intégration et il faudra prendre suffisamment petit pour l'éviter. De toute manière il faudrait toujours préciser la valeur de τ dans toute mesure physique.

On pourrait penser à prendre τ aussi petit que possible. Malheureusement dans les fréquencemètres digitaux les plus couramment utilisés en laboratoire $\Delta \phi(t; \tau)$ est mesurée par l'intermédiaire du nombre de zéros de $X(t)$ dans l'intervalle $[t - \tau, t]$ et si τ est trop petit devant $1/\omega_0$ (voir eq. (2-3)) la mesure du nombre de zéros perd toute précision.

Les basses fréquences de $\chi_F(\nu)$ par contre ne sont pas altérées par l'intégration et dès lors le problème des dérivées lentes se pose tout autant pour $F(t)$ que pour $F_\tau(t)$.

2. Méthode de la variance en temps fini - Variance d'Allan.

Introduisons la f.a. $P_1[t, \tau, T]$ définie par

$$(4-4) \quad P_1[t, \tau, T] = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t F_\tau^2(\theta) d\theta - \left[\frac{1}{T} \int_{t-T}^t F_\tau(\theta) d\theta \right]^2$$

Il est clair que si $F_\tau(\theta)$ satisfait à des conditions générales d'ergodicité, on a



conduit à généraliser la méthode précédente à ce cas.

L'intervalle de temps T ci-dessus est divisé en n parties de durée T_1 et l'on fait des mesures par comptage de zéros sur des intervalles comme indiqué sur la Fig. 2.

On dispose donc de n échantillons aléatoires

$$(4-11) \quad F_{\tau}(i) = F_{\tau}(t_i) \quad 1 \leq i \leq n$$

et l'analogie digital de l'éq. (4-4) peut s'écrire

$$(4-12) \quad \hat{P}_1[t, \tau, n, T_1] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F_{\tau}^2(i) - \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F_{\tau}(i) \right]^2$$

Il est important pour la suite de calculer

$$(4-13) \quad \sigma_1^2[\tau, n, T_1] = E[\hat{P}_1].$$

Pour ce calcul on utilise évidemment le fait que

$$(4-14) \quad E[F_{\tau}^2(i)] = \int \chi_{\tau}(\nu) d\nu,$$

et on note de plus que $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F_{\tau}(i)$ s'obtient à partir de $F_{\tau}(t)$ par filtrage linéaire dans un filtre de réponse percussionnelle

$$(4-15) \quad R_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta(t - i T_1)$$

et de gain complexe

$$(4-16) \quad G_n(\nu) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} e^{2\pi i \nu T_1 i}$$

dont le module s'écrit

$$(4-17) \quad |G_n(\nu)| = \frac{1}{n} \frac{\sin \pi \nu T_1}{\sin \pi \nu} = \frac{1}{n} \frac{\sin n \pi \nu T_1}{\sin \pi \nu T_1}$$

on en déduit que

$$(4-18) \quad \sigma_1^2[\tau, n, T_1] = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{\tau}(\nu) \left[1 - \left(\frac{\sin n \pi \nu T_1}{\sin \pi \nu T_1} \right)^2 \right] d\nu$$

que l'on doit comparer à l'éq. (4-7).



Un cas particulièrement intéressant est celui correspondant à $n = 2$, qui donne

$$(4-19) \quad \hat{P}_1 [\tau, \tau, 2, T_1] = \frac{1}{4} [F_\tau(i) - F_\tau(i-1)]$$

d'où

$$\hat{\sigma}_1^2 [\tau, 2, T_1] = \frac{1}{4} E \{ [F_\tau(i) - F_\tau(i-1)]^2 \}$$

et en appliquant l'éq. (4-18) on obtient

$$(4-20) \quad \hat{\sigma}_1^2 [\tau, 2, T_1] = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_\tau(\nu) \sin^2 n \nu T_1 d\nu.$$

De nombreux travaux sur les oscillateurs utilisent la variance d'Allan définie par

$$(4-21) \quad \sigma_a^2(\tau) = 2 \sigma_1^2 [\tau, 2, \tau] = 2 \int \gamma_\tau(\nu) \sin^2 \nu \tau d\nu \\ = 2 \int \gamma_\tau(\nu) \left(\frac{\sin \nu \tau}{\nu \tau} \right)^2 \sin^2 \nu \tau d\nu$$

Le facteur 2 apparaissant dans cette équation est lié au fait que les auteurs ayant utilisé cette variance [6] sont partis de la relation

$$(4-22) \quad P' = \frac{1}{n-1} \sum [F(i) - \frac{1}{n} \sum F(i)]^2 = \frac{1}{n-1} \sum F^2(i) - \frac{n}{n-1} \left(\frac{1}{n} \sum F(i) \right)^2$$

au lieu de la relation (4-12). Cette formule a pour but d'éliminer le biais sur la variance. En particulier si les F_i sont non corrélés et de même variance σ_F^2 on a

$$(4-23) \quad E [\hat{P}_1] = \frac{n-1}{n} \sigma_F^2$$

tandis que

$$(4-24) \quad E [P'] = \sigma_F^2$$

On peut refaire que l'expression P' exactement les mêmes calculs que sur P_1 qui a cependant une plus grande symétrie et se rapproche mieux du cas continu.

3. Méthode du contrôle de fréquence en temps fini.

Cette méthode est fondée sur l'étude de la fonction

$$(4-25) \quad P_2 [t, \tau, T] = \left[F_\tau (t) - \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} F_\tau (\theta) d\theta \right]^2$$

On voit que le terme entre crochet est obtenu par un filtrage linéaire de $F_\tau (t)$ consistant à lui retrancher sa moyenne sur un intervalle d'observation. Ce filtre n'est pas causal et on ne peut donc opérer en temps réel. Ceci n'est guère gênant dans la pratique si on dispose d'enregistrement de $F_\tau (t)$.

Il faut bien noter la différence de structure entre $P_1 (t, \tau, T)$ et $P_2 (t, \tau, T)$. Ces deux grandeurs sont de moyenne non nulle, mais tandis que P_1 est déjà intégrée sur un temps T , et fluctue donc peu, P_2 a de grandes fluctuations et la mesure de sa moyenne nécessite une forte intégration. Ce point sera étudié au paragraphe suivant.

On en déduit très simplement :

$$(4-26) \quad \sigma_2^2 [\tau, T] = E [P_2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_\tau (\nu) \left[1 - \frac{\sin \pi \nu T}{\pi \nu T} \right]^2 d\nu$$

et comme précédemment le filtre de gain

$$(4-27) \quad |G_2(\nu)|^2 = \left| 1 - \frac{\sin \pi \nu T}{\pi \nu T} \right|^2$$

élimine les très basses fréquences avec une constante de temps bien déterminée.

Le système réalisant $P_2 [t, \tau, T]$ est représenté sur la Fig. 3. Par ailleurs les éqs. (4-9) et (4-10) sont encore valables pour $\sigma_2^2 (\tau, T)$.

On peut évidemment donner une version digitale de l'opération précédente fondée sur la fonction

$$(4-28) \quad \hat{P}_2 [t, n, \tau, T_1] = \left[F_{p+1} (n) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F_\tau (i) \right]^2$$

où $n = 2 p+1$,



et par des calculs similaires on obtient

$$(4-29) \quad \hat{\sigma}_2^2 [n, \tau, T_1] = E [\hat{P}_2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{\tau}(\nu) \left[1 - \frac{\sin n\pi\nu T_1}{n \sin \pi\nu T_1} \right]^2 d\nu$$

V - DISCUSSION ET COMPARAISON DES METHODES

1. Stabilité à court ou long terme.

Pour une valeur donnée de τ (constante de temps du discriminateur de fréquence) les variances σ_1 , σ_2 , ou $\hat{\sigma}_1$ et $\hat{\sigma}_2$ étudiées en fonction de T ou de n permettent une certaine séparation des fluctuations à court terme ou des dérives lentes.

Ces quantités sont en effet des fonctions généralement croissantes de T et varient entre les limites données par les eqs. (4-9) et (4-10). Mais il peut exister un certain intervalle ($T_0, T_0 + \Delta T$) où elles ne varient pratiquement pas. On dira alors que σ_1 (τ, T_0) représente la variance des fluctuations à court terme de l'oscillateur, ce court terme étant caractérisé par T_0 .

Si par contre σ_1 (T) varie continuellement avec T , il n'y a pas de séparation possible des fluctuations et dérives lentes. La variance de la fréquence instantanée n'a pas de valeur indépendante de la constante de temps avec laquelle on la définit.

Naturellement les mêmes résultats peuvent être obtenus en étudiant $\hat{\sigma}_1$ [n, τ, T_1] en fonction de n pour et T_1 fixés.

Il est intéressant à ce stade de voir si l'étude de la variance d'Allan $\sigma_a(\tau)$, Eq. (4-21), en fonction de τ permet d'obtenir des résultats similaires. L'Eq. (4-21) montre qu'il n'en est rien car dans cette variance on a fixé $T_1 = \tau$. Il est sans doute possible d'extraire $\chi_F(\nu)$ à partir d'une étude de $\sigma_a(\tau)$, bien que ceci apparaisse assez compliqué, mais l'intégrale^a de l'Eq. (4-21) n'est pas construite pour une

élimination des basses fréquences comme celle de l'Eq. (4-13) où τ est fixé.

2. Analyse Spectrale aux très basses fréquences.

Il s'agit de déterminer les composantes spectrales aux très basses fréquences de $\gamma_F(\nu)$, ou de $\gamma_\tau(\nu)$, qui est équivalent d'après l'Eq. (4-3). Le filtre idéal pour cette opération est le filtre

$$\begin{aligned} G_0(\nu) &= 0 & \nu < f \\ G_0(\nu) &= 1 & \nu > f \end{aligned}$$

qui n'est ni causal, ni physiquement réalisable.

Les variances σ_1 et σ_2 font apparaître les filtres

$$(4-8) \quad |G_1(\nu)|^2 = 1 - \left(\frac{\sin \pi \nu T}{\pi \nu T} \right)^2$$

et

$$(4-27) \quad |G_2(\nu)|^2 = \left[1 - \frac{\sin \pi \nu T}{\pi \nu T} \right]^2$$

Ces filtres sont réalisables et à horizon fini.

La variance d'Allan fait intervenir le filtre

$$|G_a(\nu)|^2 = \left[\frac{\sin^2 \pi \nu \tau}{\pi \nu \tau} \right]^2$$

qui n'a évidemment aucune des propriétés souhaitées pour faire simplement une analyse spectrale. Ce filtre a un maximum assez large à la fréquence $0,36 / \tau$, il n'est pas symétrique et coupe autant les basses que les hautes fréquences.

L'utilisation de ce filtre est liée au fait que l'on ne fait pas rigoureusement une analyse spectrale mais qu'on cherche des paramètres pour une densité spectrale de forme arbitrairement imposée. Ainsi les spectres en ν^m ont été étudiés, et l'étude de $\sigma_a(\tau)$ permet de déterminer m .

Il est bien clair que ceci est tout aussi possible avec G_1 et G_2 .

Il est intéressant d'étudier l'élimination du voisinage de la fréquence o source de divergences pour les spectres en ν^m .



Cette élimination est évidemment parfaite à partir de $G_0(\nu)$ qui introduit une fréquence de coupure.

Pour les autres filtres on a pour $\nu \rightarrow 0$

$$|G_1(\nu)|^2 \approx \frac{\pi^2 T^2}{3} \nu^2$$

$$|G_2(\nu)|^2 \approx \frac{\pi^4 T^4}{36} \nu^4$$

$$|G_a(\nu)|^2 \approx \pi^2 \tau^2 \nu^2$$

On voit donc que la meilleure élimination de la fréquence 0 est obtenue avec le processus P_2 .

En particulier si la densité spectrale au voisinage de l'origine est de la forme $\nu^m \gamma(\nu)$, (Eq. 3-18) on pourra mesurer sans divergence de $\sigma_2(T)$ des valeurs de $m > -3$ -

Naturellement une telle valeur de m ne pourra être admise jusqu'à la fréquence 0, d'après ce qu'on a vu au paragraphe 3.

D'autres questions méritent d'être examinées dans le cadre de cette comparaison. En particulier nous avons obtenu quelques résultats sur les fluctuations à la sortie et les erreurs de mesure. Ces points seront étudiés dans une publication plus générale.

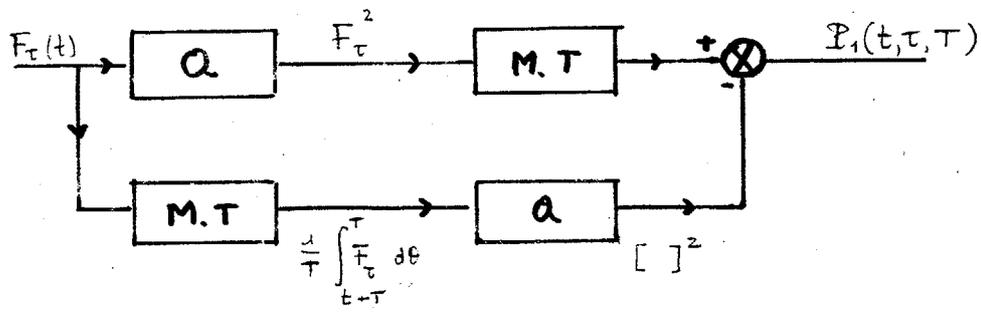


Fig. 1. Réalisation de P_1 .
 M.T. : moyenne temporelle
 Q : quadrature

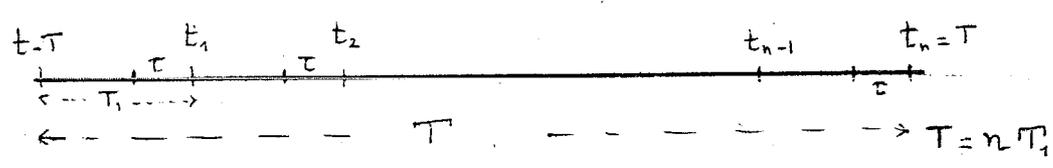


Fig. 2. Disposition des instants t_i .

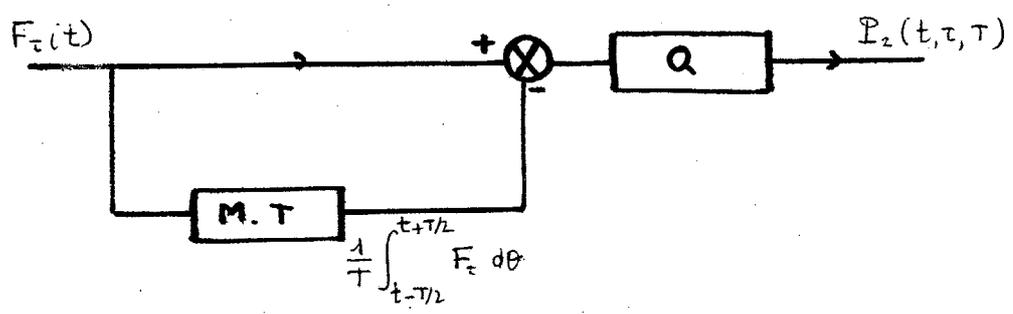


Fig. 3. Réalisation de P_2
 M.T. : moyenne temporelle non causale



- R E F E R E N C E S -

- 1) L.S. CUTLER et C.H. SEARLE, Some aspects of the theory and measurements of frequency fluctuations in frequency standards, Proc. of IEEE, 54, 136, (1966).
- 2) E. HAFNER , The effects of the noise in oscillators, même revue, p. 179
- 3) J.A. BARNES, Atomic timekeeping and the statistics of precision signal generators, même revue, p. 207
- 4) D.W. ALLAN, Statistics of atomic frequency standards, même revue, p. 221
- 5) D.W. ALLAN et J.E. GRAY, Comments on the metrologic paper... Journal international de métrologie, 7, 79, (1971).
- 6) J.A. BARNES et col., Characterization of frequency stability, IEEE trans. on Instr. and Meas. IM. 20, 105 (1971)
- 7) R.M. GRAY et R.C. Transworthe, frequency-counted measurements and phase locking to noisy scillators, I.E.E.E. Trans. on Comm. Techn. COM 19, 21, (1971)
- 8) J. RUTMAN, Comments on Characterization of frequency stability, I.E.E.E Trans. Instr. ans Meas. IM 21, 85 (1972)
- 9) E. BOILEAU et col. Etude des fluctuations de fréquence des lasers monomode, Rev. de Phys. Appl. 6, 23, (1971).

-
- 10) A. BLAQUIERE, Thèse, 1953.
W.E. LAMB, Phys. Rev. 134, 1429 A, (1964).
 - 11) B. PICINBONO et J. de SUSO BARBA, Etude de certains modèles statistiques de grandeurs quasisinusoidales,
Ann. Télécomm. 17, 236, (1962).
 - 12) A. BLANC-LAPIERRE et R. FORTET, Théorie des fonctions aléatoires, Masson 1953.
 - 13) E. BOILEAU, Thèse de doctorat d'Etat, Orsay 1971.
 - 14) D. ter HAAR, Fluctuations in magnetic systems, Oliver and Boyd, Londres, (1962).
 - 15) A.M. YAGLOM, "Correlation theory of processes with random stationary increments", Ann. Math. Soc. Translation 2, 8, 87, (1958).
 - 16) B. PICINBONO, Statistical Properties of Randomly modulated laser beams, Phys. Rev. A-4, 2398, (1971).
 - 17) B. PICINBONO, Processus de diffusion et stationnarité ; application à la représentation du bruit des oscillateurs, Comptes Rendus 217, 661, (1970).
 - 18) J.A. BARNES et D.W. ALLAN, A statistical model of flicker noise Proc. of I.E.E.E. 54, 176, (1966).
 - 19) B. PICINBONO, Introduction à l'étude des signaux et phénomènes aléatoires, Dunod, (1971).