

## TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

Nice 7 au 12 mai 1973

---

**MODELISATION ET IDENTIFICATION DES  
SYSTEMES LINEAIRES STOCHASTIQUES**

C. BOZZO et W. LEGRAND

DCAN TOULON et Laboratoire d'Automatique du GESSY

---

**RESUME**

*La modélisation de processus dynamiques soumis à des entrées aléatoires stationnaires et observés de façon imparfaite conduit à définir les paramètres du processus et surtout les statistiques des bruits. Pour les problèmes traités en temps réel les algorithmes d'identification stochastique sont délicats à appliquer. Sous certaines conditions il est possible de déterminer une borne des covariances des erreurs d'estimation entraînées par les erreurs de modélisation. L'étude des propriétés du processus d'innovation permet également de développer des algorithmes assurant une convergence rapide des paramètres du modèle vers ceux du processus objet. Une application est présentée relative aux problèmes de tracking d'un mobile manoeuvrable.*

---

**SUMMARY**

*The modeling of dynamical processes with stationary random inputs and observations contaminated with noise needs to define the parameters of the process and the statistics of noises. For real time problems stochastic identification algorithms are difficult to use. Under some conditions it is possible to determine a bound to the covariance of the estimation errors caused by modelisation errors. The study of the properties of the innovation process gives algorithms assuring a fast convergence of the model parameters to those of the objet process. An application is given for manned manoeuvring vehicles.*

MODELISATION ET IDENTIFICATION DES SYSTEMES LINEAIRES STOCHASTIQUES

C. BOZZO - W. LEGRAND

INTRODUCTION

Quand on applique un filtre de KALMAN-BUCY à un système linéaire, on doit spécifier les matrices décrivant la dynamique du modèle ( $\Phi$ ,  $\Gamma$ ,  $H$ ), les statistiques des bruits ( $Q$ ,  $R$ ) et les données a priori ( $\hat{x}_0$ ,  $P(0)$ ). Puisque le modèle du système est, en général, une approximation d'un système physique, les valeurs des paramètres intervenant dans le modèle et les statistiques des bruits sont rarement exacts : le modèle du système qui sert à élaborer le filtre diffère du système réel qui génère les observations. Dans certains cas, une telle approximation est volontaire. Par exemple, on peut désirer utiliser un modèle de plus petite dimension que la dimension du système réel pour gagner en vitesse de calcul et en simplicité.

Dans beaucoup de cas, les données a priori ne sont pas connues avec précision et sont spécifiées arbitrairement pour démarrer les calculs. Après un nombre suffisant d'observations, les données a priori sont éventuellement oubliées.

Il est clair qu'un modèle inexact dégrade les performances du filtre et peut, éventuellement, le faire diverger. Il est donc important, lorsqu'on établit un modèle, d'évaluer les effets sur les performances des différentes approximations effectuées.

Un test est proposé pour voir si les valeurs estimées de  $Q$  et de  $R$  et donc du gain  $K$ , sont correctes.

$$\begin{aligned} \text{Soit le système } x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma w(k) \\ z(k) &= H x(k) + v(k) \end{aligned} \tag{I}$$

où  $w(k)$  et  $v(k)$  sont des bruits blancs gaussiens non corrélés de moyenne nulle et de variance  $Q(k)$  et  $R(k)$  respectivement.

Soit  $u(k)$  l'erreur sur la mesure prédite que l'on définit ainsi :

$$\begin{aligned} u(k/k-1) &= z(k) - H(k) \hat{x}(k/k-1) \\ &= z(k) - \hat{z}(k) \end{aligned}$$



En posant  $\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k/k-1)$

on obtient  $u(k/k-1) = K(k) \tilde{x}(k) + v(k) \triangleq u(k)$

où  $\hat{x}(k/k-1)$  est l'estimée de l'état  $x(k)$  basée sur les observations  $z = z(1) \dots z(k-1)$

Si l'on considère l'espace vectoriel  $A$  représentant les informations disponibles à l'instant  $t_k$  fournies par les mesures  $z(1) \dots z(k)$  toute estimation linéaire faite à partir de ces mesures appartient à  $A$ .

La variable aléatoire  $x(k)$  peut être décomposée en la somme de sa projection orthogonale  $\bar{x}(k)$  sur  $A$  et  $\tilde{x}(k)$  orthogonal à  $A$ , cette décomposition étant unique dans le cas d'un filtre optimal fonctionnant sur le modèle identique à l'objet.

La minimisation de la variance  $E[x(k) - \hat{x}(k)]^2$  donne l'estimation de  $x(k)$  égale à  $\bar{x}(k)$ .

$u(k)$  est une somme linéaire de variables aléatoires gaussiennes qui est donc un bruit gaussien dont on peut calculer la corrélation et la variance.

$$E[u(k) u^T(j)] = H E[\tilde{x}(k) z(j)] - H E[\tilde{x}(k) \hat{x}^T(j/j-1)] H^T$$

soit  $E[u(k) u^T(j)] = 0$

et  $E[u(k) u^T(k)] = H P H^T + R$

$P$  étant la covariance d'erreur d'estimation optimale. Ces résultats montrent que  $u(k)$  est un bruit blanc gaussien. [1]

## 2. - CALCUL DES MATRICES DE COVARIANCE D'ERREUR REELLES ET DU FILTRE SOUS-OPTIMAL

En fait, la modélisation du système conduit à :

$$\begin{aligned} \underline{x}(k+1) &= \Phi_c(k+1, k) \underline{x}(k) + \Gamma_c(k) \underline{w}(k+1) \\ \underline{z}(k) &= H_c(k) \underline{x}(k) + v(k) \end{aligned} \quad (II)$$

dans le cas tout à fait général,  $w(k)$  et  $v(k)$  étant des bruits



blancs gaussiens non corrélés de moyenne nulle et de variance respectivement  $Q_c(k)$  et  $R_c(k)$ .

Si l'on suppose qu'il n'y a des erreurs que sur les matrices  $P(o)$ ,  $R$  et  $Q$ , la matrice  $P$  n'est plus la matrice de covariance d'erreur d'estimation correspondant au filtre optimal (modèle identique au système physique : objet).

On peut écrire dans le cas optimal  $P_{opt} = E \begin{bmatrix} \tilde{x}(k) & \tilde{x}^T(k) \end{bmatrix}$   
avec  $\tilde{x}(k) = \hat{x}(k) - x(k/k-1)$

$$P_{opt} = \phi \left[ P_{opt} - P_{opt} H^T (H P_{opt} H^T + R)^{-1} H P_{opt} \right] \phi^T + \Gamma Q \Gamma^T$$

$$K_{opt} = P_{opt} H^T \left[ H P_{opt} H^T + R \right]^{-1}$$

Dans le cas du filtre élaboré à partir du modèle dont les matrices  $Q_c$  et  $R_c$  sont différentes de celles du système physique, la matrice  $P$  est définie par :

$$P_c(k/k) = E \begin{bmatrix} \underline{x}(k) - \underline{\hat{x}}(k/k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(k) - \underline{\hat{x}}(k/k) \end{bmatrix}^T$$

soit en régime asymptotique :

$$P_c = \phi \left[ P_c - P_c H^T (H P_c H^T + R_c)^{-1} H P_c \right] \phi^T + \Gamma Q_c \Gamma^T$$

$$K_c = P_c H^T (H P_c H^T + R)^{-1}$$

Pour ce filtre sous-optimal, la matrice de covariance d'erreur d'estimation réelle est :

$$P_a = E \begin{bmatrix} \underline{x}(k) - \underline{\hat{x}}(k/k-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(k) - \underline{\hat{x}}(k/k-1) \end{bmatrix}^T$$

$\underline{\hat{x}}(k/k-1)$  étant l'estimée de l'état fournie par le filtre élaboré à partir du modèle et  $\underline{x}(k)$  l'état réel.

On montre [2] que les équations caractérisant  $P_a$  sont :

$$P_a(k+1/k) = \phi P_a(k/k) \phi^T + \Gamma(k) Q(k+1) \Gamma^T(k)$$



$$P_a(k/k) = \left[ I - K_c(k) H(k) \right] P_a(k/k-1) \left[ I - K_c(k) H(k) \right]^T + K_c(k) R(k) K_c^T(k)$$

Q et R correspondant au modèle optimal.

En régime asymptotique, on obtient l'équation suivante :

$$P_a = \Phi \left[ I - K_c H \right] P_a \left[ I - K_c H \right]^T \Phi^T + \Phi K_c R K_c^T \Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T$$

On peut remarquer que  $\tilde{x}(k)$  n'est plus orthogonal à  $z(j)$  et que  $E[\tilde{x}(k)]$  n'est plus nul.

On peut calculer comme dans le cas du filtre optimal la corrélation de la séquence  $u(k)$

$$\text{avec } \underline{u}(k) = H \tilde{x}(k) + v(k)$$

On obtient dans ce cas

$$E \left[ \underline{u}(k) \underline{u}^T(k-i) \right] = H \left[ \Phi (I - K_c H) \right]^{i-1} \Phi \left[ P_a H^T - K_c (H P_a H^T + R) \right]$$

$$E \left[ \underline{u}(k) \underline{u}^T(k) \right] = H P_a H^T + R$$

La séquence aléatoire  $u(k)$  est stationnaire, gaussienne mais non blanche.

Il faut alors s'assurer qu'à un couple de valeurs  $[Q, R]$  correspond un couple de valeurs unique de  $K$  et de  $P$ .

### 3. - RECHERCHE D'UNE BORNE POUR $P_a(k/k)$

$$\text{On définit } E(k/k) \triangleq P_a(k/k) - P_c(k/k)$$

$$E(k+1/k) \triangleq P_a(k+1/k) - P_c(k+1/k)$$

ce qui donne

$$E(k+1/k) = \Phi(k+1, k) E(k/k) \Phi^T(k+1, k) + \Gamma(k) \left[ Q(k+1) - Q_c(k+1) \right] \Gamma^T(k)$$

et

$$E(k/k) = \left[ I - K_c(k) H(k) \right] E(k/k-1) \left[ I - K_c(k) H(k) \right]^T + K_c(k) \left[ R(k) - R_c(k) \right] K_c^T(k)$$

Supposons que  $Q(k) < Q_c(k)$  ,  $R(k) < R_c(k)$  pour tout  $k$ .

Alors, si  $E(k/k-1) < 0$ , les relations précédentes montrent que  $E(k/k) < 0$ , et  $E(k+1/k) < 0$ , ce qui entraîne :

### Théorème 1

Si  $P(o) < P_c(o)$  et  $Q(k) < Q_c(k)$  ,  $R(k) < R_c(k)$  pour tout  $k$  , alors  $P_a(k/k) < P_c(k/k)$  et  $P_a(k+1/k) < P_c(k+1/k)$  pour tout  $k$  .

Les conséquences de ce théorème sont les suivantes : bien qu'on ne dispose pas des vraies valeurs  $P(o)$  ,  $Q(k)$  et  $R(k)$  , on peut souvent faire des estimations prudentes de ces quantités. Dans ce cas les variances réelles d'erreurs d'estimation sont bornées par les variances calculées, élaborées comme partie de la solution du filtre sous-optimal. En fait  $P_c(k/k)$  peut être calculée à l'avance pour déterminer si les estimations prudentes faites de  $P(o)$  ,  $Q(k)$  ,  $R(k)$  donnent des performances correctes pour le filtre, ou si des estimations moins prudentes sont désirables.

### Corollaire:

Les hypothèses sont celles du théorème 1. De plus, on suppose que le modèle du système est uniformément complètement observable et uniformément complètement commandable. Il existe alors un entier  $N > 0$  tel que  $P_a(k/k)$  soit uniformément borné (supérieurement) pour tout  $k > N$ .

## 4. - MODELISATION DU MOUVEMENT D'UN MOBILE

Considérons le problème qui consiste à estimer les position, vitesse et accélération d'un mobile manoeuvrable poursuivi par radar.

La solution la plus simple dans le cas linéaire consiste à utiliser un filtre du troisième ordre pour chaque coordonnée.



On peut alors faire l'hypothèse de découplage statistique entre les trois coordonnées (cartésiennes dans le cas envisagé).

Le modèle présenté ici [3] consiste en une accélération corrélée exponentiellement exprimée en terme de bruit blanc par la méthode de Wiener - Kolmogorov.

L'équation de mouvement peut s'écrire :

$$\frac{d}{dt} \ddot{x}(t) = -\frac{1}{\tau} \ddot{x}(t) + w(t)$$

où  $w(t)$  est un bruit blanc et  $\tau$  la durée de manoeuvre du mobile ce qui donne la représentation d'état :

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} W(t)$$

$$\text{avec } X(t) = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix}$$

et l'équation de mesure  $z(k) = H X(k) + v(k)$  avec  $H = [1, 0, 0]$  ou  $v(k)$  est un bruit blanc de variance  $R(k)$ .

$T$  étant la période d'échantillonnage la discrétisation de l'équation d'état précédente donne :

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & T & \frac{1}{\alpha^2} (-1 + \alpha T + e^{-\alpha T}) \\ 0 & 1 & \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha T}) \\ 0 & 0 & e^{-\alpha T} \end{bmatrix} X(k) + w(k) \quad (\text{III})$$

où  $\alpha = \frac{1}{\tau}$  et  $w(k)$  un bruit blanc de variance  $2\alpha\sigma_Q^2$ .

## 5. - EQUATION DU FILTRE ET SENSIBILITE

Les équations du filtre de Kalman-Bucy s'écrivent [4]

$$P(k/k-1) = \Phi(k, k-1) P(k-1/k-1) \Phi^T(k, k-1) + Q(k-1) \quad (1)$$

$$K(k) = P(k/k-1) H(k)^T \left[ H(k) P(k/k-1) H(k)^T + R(k) \right]^{-1} \quad (2)$$

$$P(k/k) = P(k/k-1) - K(k) H(k) P(k/k-1) \quad (3)$$

L'équation (1) donne :

$$\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix}_h = \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \\ P_{31} \end{bmatrix}_{(k/k-1)} \frac{1}{P_{11}(k/k-1) + \sigma_R^2}$$

L'équation (2) donne alors :

$$P(k/k) = P(k/k-1) - \frac{1}{P_{11}(k/k-1) + \sigma_R^2} \begin{bmatrix} P_{11}^2 & P_{11}P_{12} & P_{11}P_{13} \\ P_{21}P_{11} & P_{12}^2 & P_{12}P_{13} \\ P_{13}P_{11} & P_{12}P_{13} & P_{13}^2 \end{bmatrix}_{(k/k-1)} \quad (4)$$

L'équation (3) donne  $P(k+1/k)$ , la matrice  $\Phi$  étant définie par l'équation III et si on appelle  $S_{ij}$  les termes de la matrice obtenue en (4) on a par exemple :

$$\begin{aligned} P_{11}(k+1/k) &= S_{11} + T S_{21} + \frac{1}{\alpha^2} \left[ -1 + \alpha T + e^{-\alpha T} \right] S_{31} + T S_{12} + T^2 S_{22} \\ &+ \frac{T}{\alpha^2} \left[ -1 + \alpha T + e^{-\alpha T} \right] S_{32} + \frac{1}{\alpha^2} \left[ -1 + \alpha T + e^{-\alpha T} \right] \\ &S_{13} + T S_{23} + \frac{1}{\alpha^2} \left[ -1 + \alpha T + e^{-\alpha T} \right] S_{33} + q_{11} \end{aligned}$$

$$\text{avec } q_{11} = \frac{\sigma^2}{\alpha^4} \left[ 1 - e^{-2\alpha T} + 2\alpha T + \frac{2\alpha^3 T^3}{3} - 2\alpha^2 T^2 - 4\alpha T e^{-\alpha T} \right]$$

Le filtre est initialisé par les deux premières mesures  $z(0)$  et  $z(1)$  ce qui donne :

$$\hat{X}(1/1) = \frac{z(1) - z(0)}{T}$$

2. On peut alors élaborer l'erreur d'estimation qui résulte de l'initialisation du filtre.



On obtient les termes non nuls :

$$P_{11}(1/1) = \sigma_R^2 \quad (5)$$

$$P_{12}(1/1) = \frac{\sigma_R^2}{T} \quad (6)$$

$$P_{22}(1/1) = \frac{2\sigma_R^2}{T^2} + \frac{\sigma_Q^2}{\alpha^2 T^2} \left[ 2 - \alpha^2 T^2 + 2 \frac{\alpha^3 T^3}{3} - 2e^{-\alpha T} - 2\alpha T e^{-\alpha T} \right] \quad (7)$$

$$P_{23}(1/1) = \frac{\sigma_Q^2}{\alpha^2 T} \left[ e^{-\alpha T} + \alpha T - 1 \right] \quad (8)$$

$$P_{33}(1/1) = \sigma_Q^2 \quad (9)$$

Les équations (5) à (9) montrent que pour  $\alpha$ ,  $T$ ,  $\sigma_Q^2$  fixés  $\frac{P_{11}(1/1)}{\sigma_R^2}$  sont fonction du rapport  $\frac{\sigma_Q^2}{\sigma_R^2}$  donc aussi les

$S_{ij}$  initiaux et en conséquence on a  $\frac{P_{ij}(k+1/k)}{\sigma_R^2} = f \left[ \frac{\sigma_Q^2}{\sigma_R^2}, T, \alpha \right]$

## 6. - VERIFICATION PAR SIMULATION DU THEOREME 1

Dans le cadre du problème de tracking, on se place en simulation dans le cas où  $P_a(o) < P_c(o)$ ,  $Q_a(k) < Q_c(k)$  et  $R_a(k) < R_c(k)$ .

Deux programmes ont permis d'obtenir l'évolution de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation, en fonction du temps, dans les trois cas suivants :

Filtre sous optimal correspondant au modèle

Filtre réel correspondant au "système réel"

Filtre optimal.

La figure (1) montre l'évolution en fonction du temps de la variance d'erreur d'estimation sur la position du

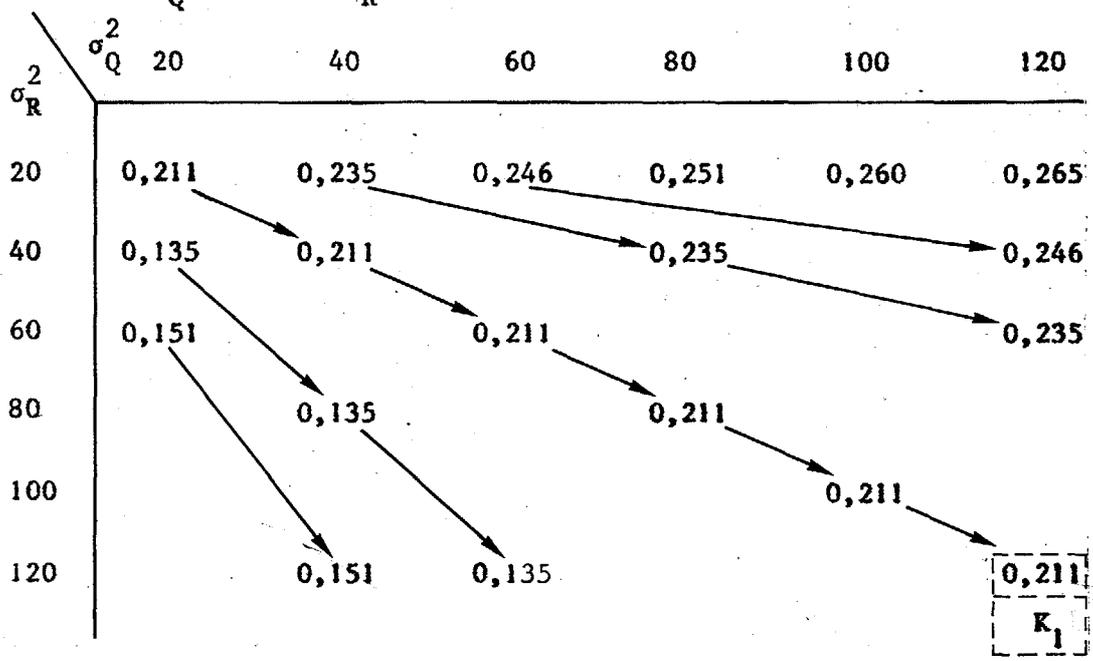
mobile où  $P_{11} \text{ optimal} = E \left[ (x(k) - \hat{x}(k)) (x(k) - \hat{x}(k))^T \right] \triangleq P_{11}$   
 $P_{11} \text{ réel} = E \left[ (x(k) - \hat{x}(k)) (x(k) - \hat{x}(k))^T \right] \triangleq P_{11a}$   
 $P_{11} \text{ calculé} = E \left[ (x(k) - \hat{x}(k)) (x(k) - \hat{x}(k))^T \right] \triangleq P_{11c}$

On constate que  $P_{11} < P_{11a} < P_{11c}$  et le théorème est donc bien vérifié.

7. - NOUVEAU TEST D'OPTIMALITE DU FILTRE DE KALMAN-BUCY

Un programme a permis d'étudier la sensibilité de  $\frac{P_{ij}(k+1/k)}{\sigma_R^2}$  [aux variations de  $\frac{\sigma_Q^2}{\sigma_R^2}$  pour  $\alpha$  et  $T$  fixes], en particulier la sensibilité des composantes correspondant au gain  $K$  du filtre.

Les courbes obtenues sont représentées sur les figures (2), (3), (4). On peut alors établir des tableaux du type de celui représenté ci-dessous où figurent une composante du gain en fonction de  $\sigma_Q^2$  et de  $\sigma_R^2$ .





$$\tau = 10 \text{ s}$$

$$K = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix}$$

On constate qu'il existe plusieurs couples de valeurs de  $\sigma_Q^2$  et de  $\sigma_R^2$  donc de  $R(k)$  et de  $Q(k)$  qui donnent la même valeur de  $K_1$ . De plus les valeurs de  $R$  et de  $Q$  qui donnent les mêmes valeurs de  $K_1$  donnent aussi les mêmes valeurs de  $K_2$  et de  $K_3$ .

Par contre à chaque couple  $\sigma_Q^2$   $\sigma_R^2$  donc  $Q$  et  $R$  correspond une valeur différente de  $H P H^T + R$ .

On peut modifier le test proposé par Mehra [1] ; si on appelle  $A$  l'autocorrélation  $E[u(k) u^T(k-i)]$  on peut s'assurer que les éléments diagonaux de  $A_0$  et  $H P_0 H^T + R_0$  diffèrent de moins de  $\pm (\alpha/\sqrt{N}) \min(A_0, H P_0 H^T + R_0)_{ii}$  où  $R_0$  et  $Q_0$  sont les dernières estimées de  $R$  et de  $Q$ .  $P_0$  la valeur de la matrice de covariance d'erreur d'estimation correspondante,  $N$  le nombre d'échantillons. Le test est vérifié si on utilise à la fois le test proposé par Mehra et ce nouveau test et si le nombre d'inconnues dans  $Q$  est inférieur au produit de la dimension de l'état et de la dimension de la mesure comme le précise Mehra ; alors il y a une transformation biunivoque entre  $(K, H P_0 H^T + R_0)$  et  $(R_0, Q_0)$ .

---

## 8. - CONCLUSION

La situation dans laquelle  $P_a(k/k)$  est bornée par  $P_c(k/k)$  est particulièrement intéressante. Dans ce cas la minimisation de  $P_c(k/k)$  entraîne la minimisation de  $P_a(k/k)$  qu'il n'est pas possible d'atteindre directement mais qui représente en fait la covariance réelle sur l'erreur d'estimation. Or  $P_c(k/k)$  ne dépend que des paramètres intervenant dans le modèle (dynamique et statistique des bruits). Pour minimiser  $P_c$  et donc  $P_a$ , on peut utiliser différentes méthodes et, en particulier, introduire la notion de sensibilité qui permet de mettre en évidence les paramètres sur lesquels il faut agir.

Outre ce test d'optimalité du filtre de KALMAN-BUCY, les courbes de sensibilité ont permis d'élaborer un filtre de KALMAN adaptatif à gain précalculé (figure 5) où la variance  $\sigma_0^2$  est estimée en temps réel [5].



---

REFERENCES

- [1] R. K MEHRA "On the identification of variances an adaptative KALMAN filtering" IEEE Trans-Automat. Control, vol. AC-15, April 1970.
- [2] C. BOZZO-W. LEGRAND "Différents aspects des problèmes de modélisation et de sensibilité en filtrage linéaire" Journées LAAS-GRETSI "Le Filtrage numérique et ses applications" Toulon 1<sup>er</sup> et 2 Juin 1972.
- [3] R. P. WISHNER, R. E LARSON "Status of radar tracking algorithms" Proceedings of symposium of nonlinear estimation theory and its application - San Diego - California - Septembre 1970.
- [4] R. S. BUCY Filtering for stochastic processes with applications to guidance - Interscience Publishers - 1968.
- [5] C. BOZZO et W. LEGRAND "Sensibilité aux erreurs de modélisation par filtrage de KALMAN dans l'identification de systèmes dynamiques linéaires libres. Application aux problèmes de poursuite par radar". Congrès IFAC "Identification des systèmes" La Haye Juin 1973.

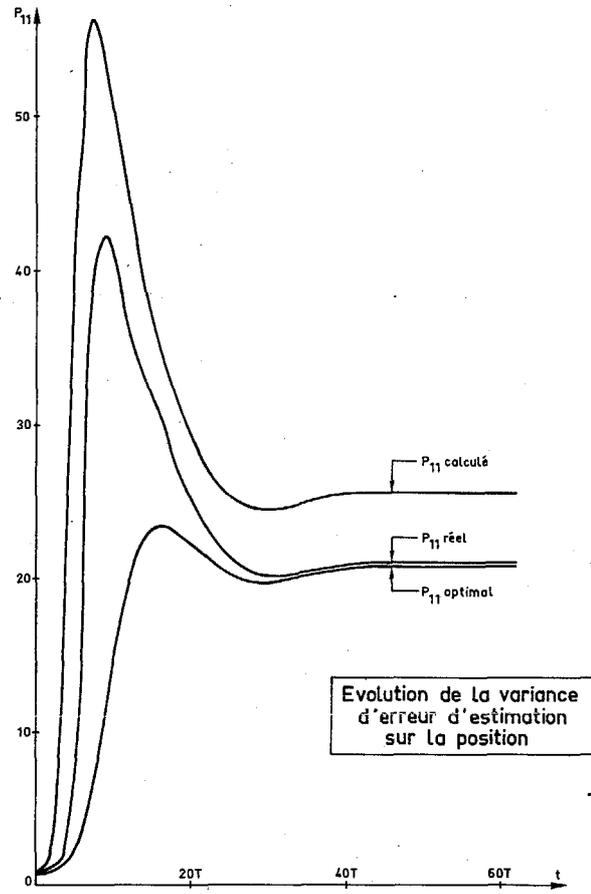


Figure 1

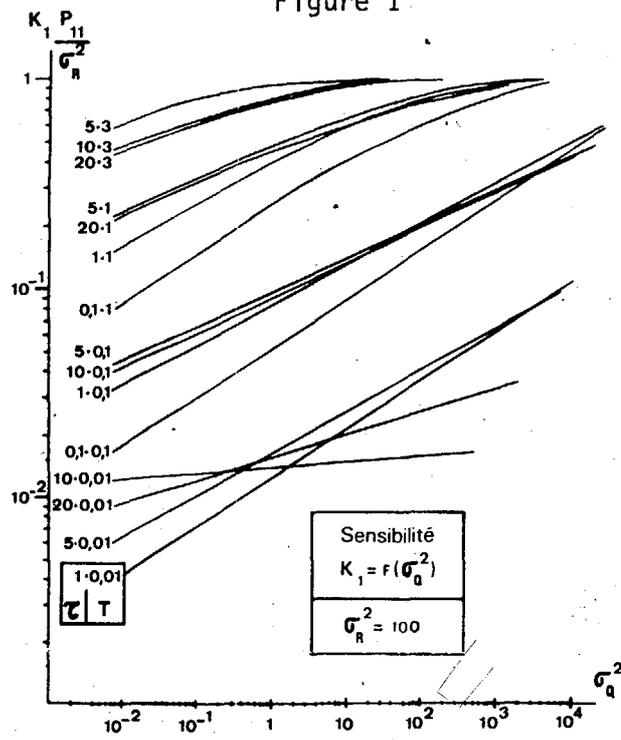
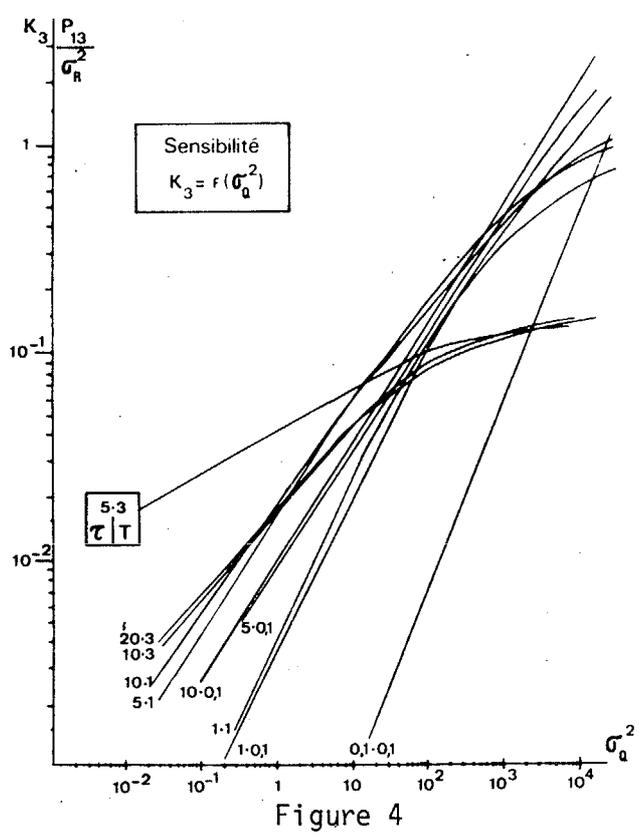
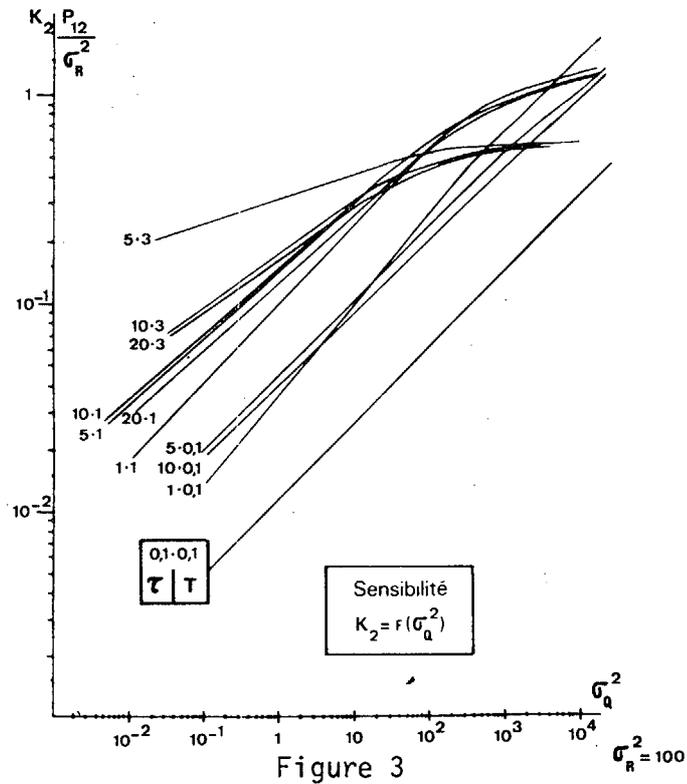


Figure 2



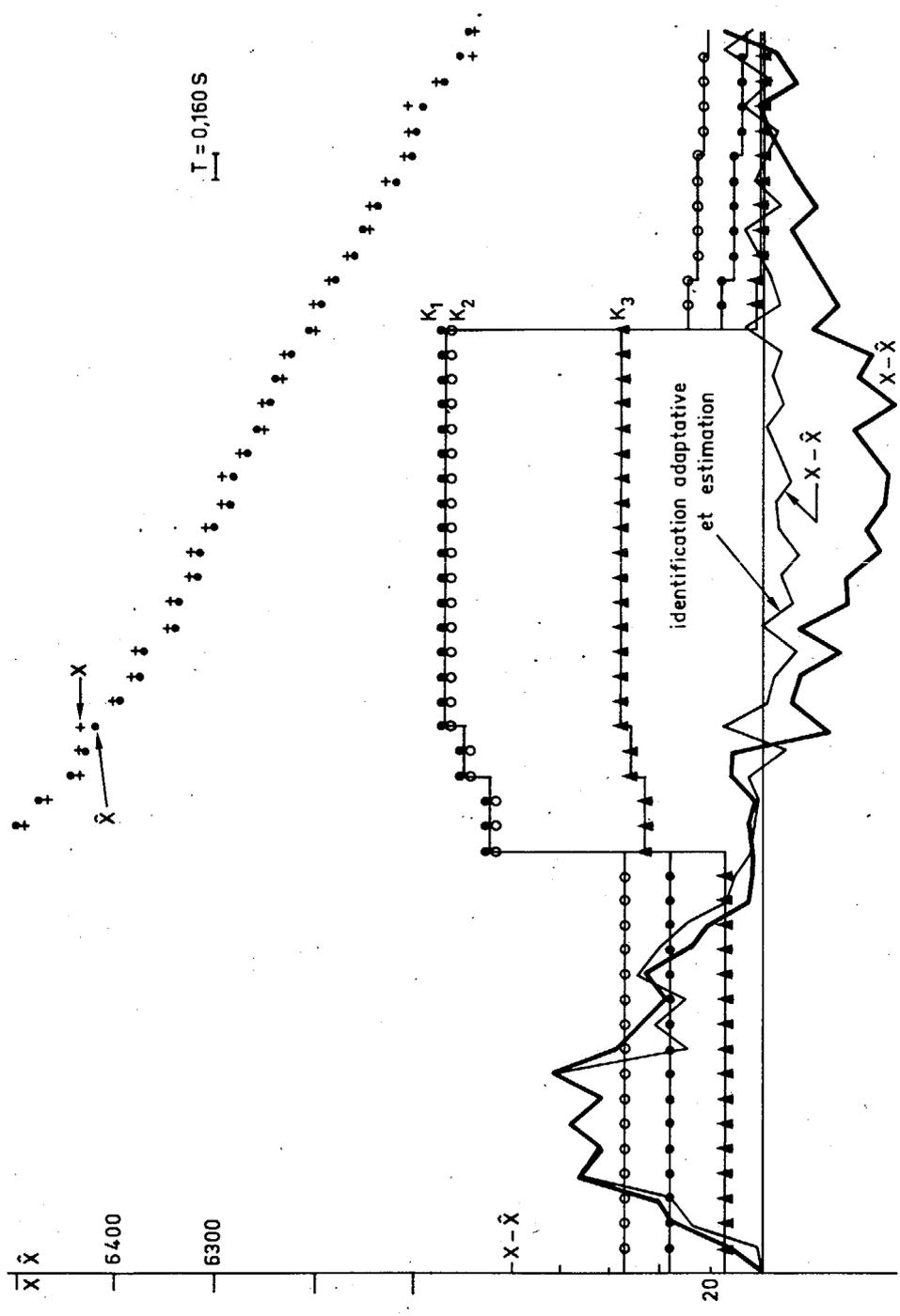


Figure 5