

TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

Nice 7 au 12 mai 1973

CARACTERISATION D'UN MILIEU DE TRANSMISSION ALEATOIRE
PAR UN MODELE DE FILTRE ALEATOIRE VARIABLE AU COURS DU
TEMPS.

G. JOURDAIN

RESUME

On rappelle les diverses possibilités de caractérisation d'un filtre aléatoire, à paramètres variables, liées en particulier à l'étude de la statistique au second ordre du filtre. On introduit un modèle de filtre aléatoire appelé "milieu réverbérant" comme faisant correspondre au signal d'entrée une somme d'échos, retardés et comprimés dans le temps, de façon aléatoire.

Enfin on aborde le problème de l'estimation optimale - au sens de l'erreur quadratique moyenne - du signal d'entrée après passage dans un milieu aléatoire du type étudié.

SUMMARY

CHARACTERIZATION OF A RANDOM CHANNEL BY MEANS OF A MODEL
OF A RANDOMLY TIME VARIANT FILTER.

We recall different possibilities of characterizing a random channel with varying parameters, mainly in connection with the second order statistics of the channel. We bring in a model of random filter called "reverberant channel", designed to transform the input signal into a sum of randomly delayed and time-compressed echoes.

We then approach the problem of optimal estimation - in the sense of the mean square error - of the input signal, after crossing of a random channel of the type described here above.



NOTATIONS

	quel que soit
*	Produit de convolution
\mathcal{F}	Transformation de FOURIER
$\delta(x)$	Distribution de DIRAC
X^*	Conjugué de X
$\int_{\mathbb{R}^N}$	Intégrale sur l'espace réel à N dimensions
FPV	Filtre à paramètre variable
FAPV	Filtre aléatoire à paramètres variables



CARACTERISATION D'UN MILIEU DE TRANSMISSION ALEATOIRE
PAR UN MODELE DE FILTRE ALEATOIRE VARIABLE AU COURS DU
TEMPS.-

INTRODUCTION.

L'étude des filtres aléatoires à paramètres variables au cours du temps [1, 2, 12] conduit à caractériser ceux-ci par un certain nombre de réponses (temporelles ou fréquentielles) aléatoires et évoluant au cours du temps ; en fait, le milieu étant aléatoire, les fonctions de sortie seront également des fonctions aléatoires du temps et la connaissance des propriétés statistiques de sortie exige celle des propriétés statistiques du milieu, i. e. celle de ses différentes réponses.

Souvent on se limitera à une étude au second ordre, et les renseignements sur le milieu seront alors la valeur moyenne et la covariance de chacune des réponses du milieu. Etant donné la nature du milieu, la statistique au second ordre des fonctions de sortie n'est en fait exploitable que si l'on suppose un certain nombre de conditions sur les moments des deux premiers ordres du milieu : ce sont alors les hypothèses connues de "WSS channel" (milieu stationnaire au sens large) "US channel" (milieu non corrélé) et "WSSUS channel" (milieu non corrélé et stationnaire au sens large), dont nous mettons en évidence quelques propriétés. La "fonction de diffusion" du milieu s'introduit alors, et conduit à interpréter celui-ci comme faisant correspondre au signal d'entrée une combinaison de signaux résultant du signal d'entrée affecté en temps et en



"fréquence".

Ceci nous a conduits alors à envisager un nouveau modèle de système aléatoire à paramètres variables au cours du temps, décrivant de façon plus exacte un milieu effectivement formé de beaucoup de particules "réverbérantes", i.e. qui renvoient le signal en le retardant et en le comprimant effectivement - donc un modèle qui s'apparente plus à celui de FAURE et par là-même, décrivant peut être mieux un milieu comme le milieu sous-marin : nous avons appelé ce modèle le "milieu réverbérant". On montre alors que l'on peut également lui associer une fonction de diffusion et la "mesurer" avec les mêmes techniques que dans le cas classique.

Enfin, dans le cadre de l'étude de la transmission d'un signal dans un milieu aléatoire et à paramètres variables, nous nous sommes posés le problème de la reconstitution optimale - au sens de l'erreur moyenne quadratique - du signal original lorsqu'il a été "perturbé" par le milieu.

1. DESCRIPTION ET PROPRIETES DES FILTRES ALEATOIRES A PARAMETRES VARIABLES (FAPV).

1.1 Filtre à paramètre variable (FPV).

Un tel filtre est décrit par une équation différentielle à coefficients variables et peut être caractérisé par une réponse impulsionnelle à deux variables t et ξ ; soit $g(t, \xi)$, réponse à la date t à une impulsion



émise ξ secondes avant t : ceci signifie qu'à un signal $S(t)$ le filtre fait correspondre par superposition linéaire

$$W(t) = \int S(t-\xi) g(t,\xi) d\xi \quad (1)$$

$g(t,\xi)$ est la réponse bitemporelle du filtre. La notation (1) a l'avantage de suggérer un modèle équivalent du filtre FPV, dit "modèle de ligne à retard à pondérations variables au cours du temps".

Le FPV peut, de façon tout à fait équivalente, être caractérisé par une réponse bifréquentielle, ou encore par une réponse temps-fréquence obtenue en prenant une transformée de FOURIER de $g(t,\xi)$ soit vis-à-vis d'une variable, soit de l'autre. Des modèles différents du FPV peuvent alors être mis en évidence [3]. De toute façon, chaque réponse du système contient toute l'information sur celui-ci, la connaissance de l'une d'entre elles entraîne la connaissance de toute autre.

Nous nous intéresserons à des FPV physiquement réalisables, i.e. $g(t,\xi)$ est réel, et nul pour $\xi < 0$. Supposons que $g(t,\xi)$ admette une transformée de FOURIER vis-à-vis de t :

$$U(\nu,\xi) = \int_{\mathbb{R}^1} e^{-2i\pi\nu t} g(t,\xi) dt \quad (2)$$

(1) s'écrit alors, avec $U(\nu,\xi) = U^*(-\nu,\xi)$:

$$W(t) = \iint_{\mathbb{R}^2} S(t-\xi) U(\nu,\xi) e^{2i\pi\nu t} d\nu d\xi \quad (3)$$



La forme (3) a l'avantage de suggérer le schéma suivant, particulièrement parlant lorsqu'il s'agit d'un milieu tel que le milieu marin, où l'on admet que la réponse à un signal $X(t)$ est une somme d'échos élémentaires "renvoyés" par tous les éléments mobiles et immobiles du milieu. L'interprétation se fait alors en considérant que si $S(t)$ est le signal analytique associé à $X(t)$, chaque élément diffusant et mobile renvoie un écho élémentaire retardé de ξ et affecté d'un "doppler" v ; le terme $U(v, \xi)$ représente alors la pondération correspondant à l'écho du type (v, ξ) i.e. la "quantité de signal" affectée de retard ξ et de doppler v .

Cette interprétation permet de représenter le milieu de façon plus sensible : il ne faut toutefois pas oublier que la formulation (3) est valable $\forall S(t)$, réel ou complexe (seule l'interprétation donnée ci-dessus exige que $S(t)$ soit complexe : nous en reparlerons au § 2.).

1.2 Filtre aléatoire à paramètres variables (FAPV).

Le filtre ci-dessus devient aléatoire lorsque $g(t, \xi)$ est une fonction aléatoire ; nous entendons par là une fonction de deux paramètres t et ξ , liée au résultat d'une épreuve, la catégorie d'épreuves restant à définir. Dans le cas du milieu marin, les paramètres qui régissent la loi d'évolution du milieu sont tellement nombreux et impossibles à connaître parfaitement, que l'on peut considérer que d'une émission à l'autre (d'un point de vue spatial, ou temporel, par exemple) la configuration exacte des éléments diffusants du

milieu a changé tout en conservant des lois générales identiques.

Dans ces conditions, même lorsque le signal d'entrée $S(t)$ est certain, la sortie $W(t)$ est elle-même fonction aléatoire du temps. Le filtre aléatoire FAPV sera défini par les propriétés statistiques de ses différentes réponses, $g(t, \xi)$ ou encore $U(v, \xi)$.

Il sera en général très difficile d'atteindre la loi N -dimensionnelle du milieu : un certain nombre d'auteurs supposent par exemple le filtre "gaussien" [4]. Ici nous ne nous intéresserons qu'aux propriétés statistiques du second ordre des fonctions de sortie et nous nous limiterons donc à l'étude des propriétés statistiques du second ordre pour $g(t, \xi)$ et pour $U(v, \xi)$.

Le milieu sera donc caractérisé par

$$E\{U(v, \xi)\} \quad \text{et} \quad E\{U(v, \xi) U^*(v', \xi')\}$$

l'espérance étant à prendre sur les diverses réalisations de U au sein de la catégorie d'épreuves dont on a parlé ci-dessus.

Il est à signaler ici que souvent on néglige l'étude du premier ordre du FAPV. Cette valeur moyenne $E\{U(v, \xi)\} = m_U(v, \xi)$ est cependant tout à fait fondamentale, comme donnant les propriétés moyennes de la fonction de sortie et il n'y a vraisemblablement aucune raison pour la supposer nulle.

La relation (3) permet d'interpréter le FAPV comme



la combinaison parallèle d'un filtrage déterministe, à paramètres variables et d'un filtrage aléatoire du même type

$$W(t) = W_1(t) + W_2(t) = E\{W(t)\} + W_2(t)$$

où

$$W_1(t) = \iiint S(t-\xi) m_U(v, \xi) e^{2i\pi vt} dv d\xi \quad (4)$$

et

$$W_2(t) = \iiint S(t-\xi) \tilde{U}(v, \xi) e^{2i\pi vt} dv d\xi$$

avec $\tilde{U} = U - m_U$

Les propriétés statistiques de la fonction de sortie sont alors

$$E\{W(t)\} = W_1(t) \quad \text{car} \quad E\{W_2(t)\} = 0$$

On voit donc que, dans le cas général, $W(t)$ n'est pas stationnaire au premier ordre.

La covariance de la fonction de sortie est

$$\Gamma_W(t_1, t_2) = E\{W(t_1)W(t_2)\} = \int_{R^4} S(t_1-\xi) S^*(t_2-\xi') E\{U(v, \xi) \tilde{U}(v', \xi')\} e^{2i\pi(vt_1 - v't_2)} dv dv' d\xi d\xi' \quad (5)$$

qui est également non stationnaire dans le cas général.

Si le signal d'entrée $S(t)$ est lui-même fonction aléatoire (f.a.) du temps, supposé alors stationnaire, de valeur moyenne m_S et de covariance $\Gamma_S(\tau)$, et indépendant du filtre, les propriétés statistiques de $W(t)$ correspondent aux espérances prises sur les diverses réalisations du signal et du milieu :

$$E\{W(t)\} = m_S \iint m_U(v, \xi) e^{2i\pi vt} dv d\xi \quad (6)$$

$$\Gamma_W(t_1, t_2) = \int_{R^4} \Gamma_S(t_1 - t_2 + \xi' - \xi) E\{U(v, \xi) U^*(v', \xi')\} e^{2i\pi(vt_1 - v't_2)} dv dv' d\xi d\xi' \quad (7)$$

1.3 Etude du FAPV au premier ordre.

Un certain nombre de cas particuliers sont intéressants à mettre en évidence :

a) Filtre "multiplicateur" en moyenne

Si $m_U(v, \xi)$ est de la forme $K_1(v)\delta(\xi)$, ou $m_g(t, \xi)$ de la forme $k_1(t)\delta(\xi)$ avec $K_1(v) \rightleftharpoons k_1(t)$, alors

$$E\{W(t)\} = S(t) k_1(t) \quad \begin{array}{c} S(t) \\ \longrightarrow \otimes \longrightarrow E W(t) \\ \uparrow \\ k_1(t) \end{array} \quad (8)$$

La FAPV se comporte, en moyenne, comme un multiplicateur vis-à-vis du signal d'entrée ; le facteur de multiplication est l'espérance de la réponse instantanée du filtre à l'impulsion d'entrée (le filtre réagit et revient à zéro de façon très rapide) $E\{W(t)\}$ ne sera stationnaire que si $S(t)$ est elle-même f.a. stationnaire et centrée : alors $W(t)$ sera elle-même centrée.



b) Filtre permanent en moyenne.

Si $m_{11}(v, \xi)$ est de la forme $K_2(\xi) \delta(v)$, ou $m_g(t, \xi)$ de la forme $K_2(\xi)$, le filtre, en moyenne, n'est plus à paramètres variables. On retrouve l'équation de convolution entre entrée et filtre moyen pour la valeur moyenne en sortie

$$E\{W(t)\} = (S(\xi) * K_2(\xi)) (t) \quad \begin{array}{c} S(t) \quad E\{W(t)\} \\ \longrightarrow \boxed{K_2} \longrightarrow \end{array} \quad (9)$$

D'une réalisation à l'autre, cette réponse peut évoluer mais, en moyenne, le filtre est "homogène" ou "permanent". $E\{W(t)\}$ sera stationnaire si $S(t)$ est elle-même f.a. stationnaire.

c) Un cas particulier simple est le cas de b), où $K_2(\xi) = K \cdot \delta(\xi)$.

$$E\{W(t)\} = S(t) \cdot K$$

et le filtre se comporte en moyenne comme un amplificateur permanent idéal de réponse impulsionnelle $K\delta(t)$.

d) Mesure de cette valeur moyenne du filtre.

Outre la mesure directe de m_g , quasi impossible à réaliser, on peut essayer d'atteindre cette valeur moyenne en se basant sur le même principe que dans le cas des filtres homogènes, i.e. en excitant le filtre par du bruit blanc et en intercorrélant l'entrée et la sortie.

Soit donc $B(t)$ le signal, f.a. stationnaire et indépendante de U (ou de g). La covariance mutuelle entrée-sortie du FAPV excité par $B(t)$ est

$$\Gamma_{WB} = E\{W(t_1)B^*(t_2)\} = \int_{\mathbb{R}^2} E\{B^*(t_2)B(t_1-\xi)\} m_U(v, \xi) e^{2i\pi v t_1} dv d\xi$$

Si $B(t)$ est centré et à corrélation microscopique,

$$E\{B(t_1)B^*(t_2)\} = \Gamma_B(\tau) = \sigma_B^2 \delta(\tau)$$

alors

$$\Gamma_{WB}(t_1, t_2) = \sigma_B^2 \int_{-\infty}^{+\infty} m_U(v, t_1 - t_2) e^{2i\pi v t_1} dv$$

Si donc la covariance mutuelle Γ_{WB} est stationnaire, $m_U(v, \xi)$ est de la forme $K_2(\xi)\delta(v)$, i.e. le filtre est homogène en moyenne et $\Gamma_{WB}(\xi)$ donne l'allure de $K_2(\xi)$.

Si la covariance Γ_{WB} est du type $\Lambda(t_1)\delta(t_1-t_2)$, $m_U(v, \xi)$ est de la forme $K_1(v)\delta(\xi)$, i.e. le filtre est multiplicateur en moyenne et l'allure de $\Lambda(t_1)$ donne celle de $k_1(t) \Leftrightarrow K_1(v)$.

1.4 Etude du FAPV au second ordre.

L'étude au second ordre fait intervenir la covariance de g ou celle de U , qui sont a priori des fonctions de 4 variables



$$E\{g(t, \xi) g(t', \xi')\} = \Gamma_g(t, t'; \xi, \xi')$$

$$E\{U(v, \xi) U^*(v', \xi')\} = \Gamma_U(v, v'; \xi, \xi')$$

Il est difficile d'exploiter la covariance de la fonction de sortie $W(t)$ sans émettre aucune hypothèse, sur le milieu : deux hypothèses sont devenues classiques, mais il faut bien souligner ici qu'elles ne portent que sur la partie centrée du filtre, i.e. $\tilde{U} = U - E\{U\}$ (ou \tilde{g}). En général, cela n'est pas précisé, car on suppose souvent implicitement que $E\{U\} = 0 = E\{\sigma\}$. Nous raisonnerons donc sur les réponses centrées du filtre et nous dirons que :

a) le milieu est "stationnaire au sens large" ("WSS")

$$\text{si } \Gamma_{\tilde{g}}(t, t'; \xi, \xi') \equiv \Gamma_{\tilde{g}}(t-t'; \xi, \xi')$$

$$\text{ou } \Gamma_{\tilde{U}}(v, v'; \xi, \xi') \equiv \Gamma_{\tilde{U}}(v; \xi, \xi') \delta(v-v') \quad (10)$$

i.e., si les pondérations $\tilde{U}(v, \xi)$ ne sont pas corrélées vis-à-vis des "dopplers" v (ou encore que la covariance de la réponse \tilde{g} est stationnaire).

b) Le milieu est "non corrélé" ("U.S")

si

$$\Gamma_{\tilde{g}}(t, t'; \xi, \xi') \equiv \Gamma_{\tilde{g}}(t, t'; \xi) \delta(\xi - \xi') \quad (11)$$

$$\text{ou } \Gamma_{\tilde{U}}(v, v'; \xi, \xi') \equiv \Gamma_{\tilde{U}}(v, v'; \xi) \delta(\xi - \xi')$$

i.e. les pondérations $\tilde{U}(v, \xi)$ ne sont pas corrélées vis-à-vis des retards ξ .

c) Le milieu est stationnaire au sens large et non corrélé ("WSSUS"), si les deux conditions précédentes sont remplies, i.e.

$$\Gamma_{\tilde{g}}(t, t' ; \xi, \xi') \equiv \Gamma_{\tilde{g}}(t-t', \xi) \delta(\xi-\xi')$$

$\Gamma_{\tilde{U}}(v, v' ; \xi', \xi)$ a alors la forme $sc(v, \xi) \delta(v-v') \delta(\xi-\xi')$ (12) où $sc(v, \xi)$ est habituellement appelée la "fonction de diffusion" du milieu et exprime que les pondérations $\tilde{U}(v, \xi)$ ne sont corrélées ni vis-à-vis des doppler v , ni vis-à-vis des retards ξ . Cela revient encore à dire que "l'énergie" de la fonction aléatoire \tilde{U} se décompose dans le plan (v, ξ) et que $sc(v, \xi)$ est la densité de cette décomposition.

NB : L'hypothèse WSSUS, par exemple, sur la fonction aléatoire $U(v, \xi)$ non centrée, se traduira alors par :

$$E\{U(v, \xi)U^*(v', \xi')\} = sc(v, \xi) \delta(v-v') \delta(\xi-\xi') + m_U(v, \xi)m_U^*(v', \xi') \tag{13}$$

Etant donné qu'il est très difficile d'obtenir les caractéristiques statistiques de $W(t)$ sans l'une des hypothèses ci-dessus, nous supposerons désormais être toujours dans le cas de (13) sauf précision. Le problème qui consiste à savoir dans quel cas on peut considérer que (13) est vérifié a été soulevé dans [5] et on y indique les deux types d'expérience permettant théoriquement



de tester l'hypothèse (12).

En ce cas, la covariance de la fonction de sortie (5) devient

$$\Gamma_W(t_1, t_2) = \int_{R^4} S(t_1 - \xi) S(t_2 - \xi') [sc(v, \xi) \delta(v - v') \delta(\xi - \xi') + m_U(v, \xi) m_U^*(v', \xi')] e^{2i\pi(vt_1 - v't_2)} dv dv' d\xi d\xi'$$

la partie centrée de cette covariance s'écrit :

$$\tilde{\Gamma}_W(t_1, t_2) = \int_{R^2} S(t_1 - \xi) S^*(t_2 - \xi) sc(v, \xi) e^{2i\pi v(t_1 - t_2)} dv d\xi \quad (14a)$$

et est stationnaire si $S(t)$ est f.a. stationnaire

$$\tilde{\Gamma}_W(t_1, t_2) = \int_{R^2} \Gamma_S(\tau) sc(v, \xi) e^{2i\pi v\tau} dv d\xi = \tilde{\Gamma}_W(\tau) \quad (14b)$$

La "valeur moyenne" a été étudiée ci-dessus (1.3).

N.B. Il peut être intéressant de mettre en évidence quelles sont les hypothèses suffisantes sur $\tilde{\Gamma}_U$ pour que la FAPV soit cette fois-ci "déterminée en filtrage aléatoire non variable au cours du temps" (comme par exemple dans l'étude de [6]) - au moins en ce qui concerne le second ordre.

Tout d'abord, il est bien évident, que la valeur moyenne de m_U doit être "homogène", comme l'indique (9). La covariance de la f.a. $U(v, \xi)$ devra alors être choisie de telle sorte que l'action sur les "dopplers" soit nulle pour toute autre valeur que $v = 0$ et le "filtre aléatoire" $U(v, \xi)$ sera stationnaire au

second ordre si la covariance $E\{U(v, \xi)U^*(v', \xi')\}$ l'est vis-à-vis de ξ , i.e. : $\Gamma_U \approx F_U(\xi - \xi') \delta(v) \delta(v')$.
 (5) devient alors

$$\Gamma_W(t_1, t_2) = \int S(t_1 - \xi) S^*(t_2 - \xi') F_U(\xi - \xi') d\xi d\xi'$$

et si le signal $S(t)$ est lui-même aléatoire et stationnaire, de covariance Γ_S , on a la relation connue

$$\Gamma_W(\tau) = (\Gamma_S * F_U)(\tau)$$

où F_U est la covariance du filtre aléatoire permanent.

d) Mesure de $sc(v, \xi)$

Nous rappelons ici simplement pour mémoire les diverses possibilités d'atteindre la fonction de diffusion supposée exister. On les trouvera par exemple dans [7], en supposant le milieu centré :

"Filtrage adapté"



Si on reçoit le signal de sortie FAPV sur le filtre adapté au signal émis $S(t)$, la sortie du filtre adapté $Y(t)$ est la convolution entre $W(t)$ et la copie "dopplérisée de f "; l'énergie moyenne de $Y_f(t)$ s'exprime au moyen de la fonction de diffusion et de la fonction d'ambiguïté (au sens de WOODWARD de $S(t)$, soit $\Psi_S(\xi, f)$

$$E\{|Y_f(t)|^2\} = sc(v, \xi) * (\Psi_S(\xi; f)|^2)_{t, f_0} \tag{15}$$

i.e., si le signal $S(t)$ a une fonction d'ambiguïté suffisamment proche de celle donnée par $\sigma^2_S \delta(\xi, f)$

$$E\{|Y_f(t)|^2\} = sc(t, f_0).$$

N.B. Si le milieu n'est pas centré, on mesure en fait,



dans ce cas-là

$$E\{|Y_f(t)|^2\} = sc(t, f_0) + |m_U(f, t)|^2$$

Ambiguïté entrée-sortie.

On a la relation suivante entre les fonctions d'ambiguïté (au sens de WOODWARD) de $S(t)$ et de $W(t)$:

$$\Psi_W(\xi, f) = \Psi_S(\xi, f) \cdot R(\xi, f) \quad (16)$$

où $R(\xi, f)$ est la transformée bidimensionnelle de $sc(v, \xi)$.

2. MILIEU REVERBERANT.

Le modèle étudié ci-dessus de FAPV a pu s'interpréter (voir § 1.1) comme représentant un milieu du type "réverbérant", i.e. comportant des éléments qui renvoient le signal original en le retardant et en le "dopplérisant". D'une part nous avons vu que, pour que cette interprétation soit correcte, il faut admettre que le signal est écrit sous forme complexe (ou analytique). D'autre part, et cela apparaît très nettement dans les relations du § 1.4c, cette définition de modèle met en cause les fonctions d'ambiguïté au sens de WOODWARD du signal d'entrée - on voit donc que le modèle lui-même, tel qu'il est décrit par (3) est, en ce qui concerne un milieu représenté par des éléments "réverbérants", un modèle que l'on pourrait qualifier de "analytique" ou "à bande étroite" (par analogie avec ce qui se passe au niveau des fonctions d'ambiguïté du signal).

Il semble alors naturel d'essayer de décrire plus véritablement ces retards et ces compressions de temps que font subir au signal tous les éléments diffusants du milieu. On rejoindra alors le modèle de FAURE [8].

Nous allons donc étudier maintenant un modèle de FAPV appliqué plus directement à la réverbération, mais calquée sur le processus décrit ci-dessus. Ce modèle, appelé "milieu réverbérant" fait correspondre à $S(t)$, $Z(t)$ tel que

$$Z(t) = \iint_{R^2} S(\lambda t - \xi) G(\lambda, \xi) d\lambda d\xi \quad (17)$$

qui est l'analogie de la relation (3). Ici, l'interprétation de $G(\lambda, \xi)$, f.a. décrivant le milieu, comme quantité de signal affectée d'un retard ξ et d'une compression (ou dilatation) λ est vraie, quel que soit $S(t)$, réel en particulier; le modèle convient bien au milieu "réverbérant", mais il est bien évident que le formalisme est tout à fait différent de celui vu ci-dessus. Les conditions de réalisation seront données ici directement sur $G(\lambda, \xi)$: réel, nul pour $\xi < 0$.

2.1 Ce modèle entre dans la catégorie des FAPV. En effet, on peut, étant donné l'équation de description (17) du modèle réverbérant, exciter celui-ci par une impulsion de DIRAC à la date $t = \theta$ et la réponse bitemporelle observée est

$$H(t, \theta) = \int G(\lambda, \lambda t - \theta) d\lambda$$



et la réponse observée θ secondes après t , $g(t, \theta)$, est $H(t, t-\theta)$, soit

$$g(t, \theta) = \int G(\lambda, \lambda t - t + \theta) d\lambda$$

Il faut noter ici la difficulté, théorique tant que pratique, pour atteindre $g(t, \theta)$ à partir de $G(\lambda, \xi)$. D'autre part, l'intégrale ci-dessus doit être prise en moyenne quadratique.

2.2 Propriétés statistiques du milieu réverbérant au premier ordre.

Soit $m_G(\lambda, \xi)$ la valeur moyenne de $G(\lambda, \xi)$, toujours prise sur les différentes réalisations de G . L'espérance de la fonction de sortie $W(t)$ est alors :

$$E\{W(t)\} = \iint S(\lambda t - \xi) m_G(\lambda, \xi) d\lambda d\xi \quad (18)$$

Ce résultat est à comparer avec celui obtenu par FAURE [8] qui, en partant également d'un modèle de superposition linéaire d'échos retardés aléatoirement et comprimés aléatoirement, suppose un certain nombre d'hypothèses sur la répartition volumique des diffuseurs, la loi des retards et des vitesses de ceux-ci.

L'expression de la valeur moyenne de la réverbération est

$$E\{R(t)\} = \iint S(\alpha(t-\theta)) \rho(\theta) p(\alpha) f\left(c \frac{\theta}{2}\right) d\alpha d\theta$$

où $p(\alpha)$ est la loi de répartition des vitesses, $\rho(\theta)$



celle des retards, $f^2(\theta)$ la directivité de l'émetteur. La valeur moyenne $m_G(\lambda, \xi)$ de (18) peut être donnée a priori de façon à tenir compte de ces différents paramètres.

On peut, comme précédemment, définir

a) un milieu réverbérant homogène en moyenne :

Si $m_G(\lambda, \xi)$ est de la forme $K_2(\xi) \delta(\lambda-1)$, la valeur moyenne en sortie est encore

$$E\{W(t)\} = (S(\xi) * K_2(\xi)) (t) \quad (19)$$

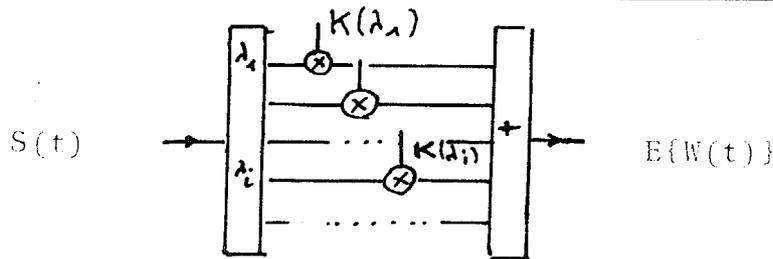
et sera stationnaire si $S(t)$ est elle-même f.a. stationnaire.

b) un milieu "multiplicateur" en moyenne

qui est en fait ici plus complexe : si $m_G(\lambda, \xi)$ est de la forme $K_1(\lambda) \delta(\xi)$, en moyenne le filtre multiplie le signal comprimé de facteur λ par $K_1(\lambda)$ et somme à une date donnée les produits correspondant à tous les λ possibles

$$E\{W(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\lambda t) K_1(\lambda) d\lambda$$

Ce modèle est alors celui d'une ligne à compression de temps dont chaque cellule comporte une sortie numérotée en λ . Chacune de ces sorties est multipliée de façon instantanée par une pondération $K_1(\lambda)$ et on somme ces différents produits.



N.B. Le modèle de départ (17) correspond à ce même schéma dans lequel, sur chacune des sorties, on impose un retard τ_i et la pondération $G(\lambda_i, \tau_i)$ est aléatoire.

2.3 Propriétés statistiques du milieu réverbérant au second ordre.

Au second ordre les propriétés statistiques du filtre sont caractérisées par la covariance de la f.a. G :

$$E\{G(\lambda, \xi) G(\lambda', \xi')\} = \Gamma_g(\lambda, \lambda'; \xi, \xi')$$

Il sera également difficile d'exploiter les relations entréesortie de ce filtre, si on ne suppose pas certaines hypothèses sur la covariance de G . Là encore, nous parlerons d'hypothèse WSSUS si, \tilde{G} étant la f.a. centrée correspondant à G

$$E\{\tilde{G}(\lambda, \xi) \tilde{G}(\lambda', \xi')\} = sc(\lambda, \xi) \delta(\lambda - \lambda') \delta(\xi - \xi') \quad (20)$$

et la covariance centrée de la f.a. $W(t)$ de sortie s'exprime dans ce cas par

$$E\{\tilde{W}(t_1) \tilde{W}^*(t_2)\} = \int_{R^2} S(\lambda t_1 - \xi) S^*(\lambda t_2 - \xi) sc(\lambda, \xi) d\lambda d\xi \quad (21)$$

qui est à comparer avec (14a)



Là encore, la covariance en sortie ne sera stationnaire que si la fonction d'entrée $S(t)$ est elle-même f.a. stationnaire de covariance Γ_S ; alors

$$\Gamma_{\tilde{W}}(t_1, t_2) = \int_{\mathbb{R}^2} \Gamma_S(\lambda(t_1 - t_2)) sc(\lambda, \xi) d\lambda d\xi = \Gamma_W(\tau) \quad (22)$$

à comparer avec (14b).

On peut encore chercher à retrouver l'expression de la covariance centrée de la réverbération donnée par FAURE, avec les mêmes notations que ci-dessus en 2.2 :

$$\Gamma_{\tilde{R}}(t_1, t_2) = \iint \rho(\theta) p(\alpha) f^4\left(\frac{c\theta}{2}\right) S(\alpha(t_1 - \theta)) S^*(\alpha(t_2 - \theta)) d\alpha d\theta$$

Il est bien évident, vu les hypothèses adoptées par FAURE, que l'hypothèse WSSUS est vérifiée à fortiori, puisque la loi des vitesses est indépendante de celle des retards et que les éléments diffusants sont distribués suivant une loi volumique de POISSON : ces hypothèses-ci sont en fait plus sévères que celles de "WSSUS". On peut essayer de donner à la nouvelle fonction de diffusion une allure tenant compte des facteurs $\rho(\theta) p(\alpha) f^4\left(\frac{c\theta}{2}\right)$ (mais, en fait, ici les lois sont séparées vis-à-vis des variables θ et α).

En particulier l'énergie de $\tilde{W}(t)$ est, à partir de (21)

$$E\{|\tilde{W}(t)|^2\} = \int_{\mathbb{R}^2} |S(\lambda t - \xi)|^2 sc(\lambda, \xi) d\lambda d\xi$$

N.B. 1 : Un cas particulier de filtre réverbérant WSSUS est celui qui donne en sortie comme



"énergie" la valeur instantanée de $|S(t)|^2$

$$E\{|W(t)|^2\} = |S(t)|^2 \quad \text{si} \quad sc(\lambda, \xi) = \xi(\lambda-1) \delta(\xi)$$

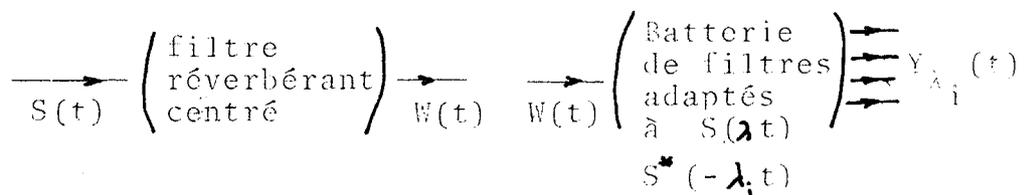
N.B. 2 : Là encore, en ce qui concerne la statistique du second ordre en sortie, le filtre réverbérant dégénère en filtre aléatoire permanent, si la covariance de la f.a. G est du type

$$G(\xi - \xi') \delta(\lambda - 1) \delta(\lambda' - 1)$$

2.4. Mesure de $sc(\lambda, \xi)$

On utilisera les mêmes techniques que dans (1.4c).

a) Filtrage adapté à $S(t)$



$$W(t) = \int \int S(\lambda t - \xi) G(\lambda, \xi) d\lambda d\xi$$

On reçoit $W(t)$ sur une batterie de filtres adaptés à des signaux identiques à $S(t)$ mais dilatés ou comprimés dans toute la gamme possible de λ_i . La réponse impulsionnelle du filtre N° i est $S^*(-\lambda_i t)$ et la sortie est $Y_{\lambda_i}(t) = (S^*(-\lambda_i t') * W(t'))(t)$.

Si on suppose, comme c'est le cas sur le schéma ci-dessus, que le filtre réverbérant est centré,

$$m_G = 0 \quad \text{et} \quad E\{Y_{\lambda i}(t)\} = 0 .$$

Au second ordre, la covariance de la f.a. $Y_{\lambda i}(t)$ est

$$E\{Y_{\lambda i}(t_1)Y_{\lambda' i}^*(t_2)\} = \int_{\mathbb{R}^6} S^*(-\lambda_i u) S[\lambda(t_1-u)-\xi] \\ S(-\lambda_i v) S^*[\lambda'(t_2-v)-\xi'] \\ E\{\tilde{G}(\lambda, \xi) \tilde{G}^*(\lambda', \xi')\} d\lambda d\xi d\lambda' d\xi' dudv$$

En supposant le milieu réverbérant WSSUS, cette covariance devient

$$E\{Y_{\lambda i}(t_1)Y_{\lambda' i}^*(t_2)\} = \int_{\mathbb{R}^4} S^*(-\lambda_i u) S(-\lambda_i v) S[\lambda(t_1-u)-\xi] \\ S^*[\lambda(t_2-v)-\xi] sc(\lambda, \xi) d\lambda d\xi dudv$$

et en faisant apparaître la fonction d'ambiguïté en compression [] de $S(t)$, soit

$$\Psi_S(\theta, k) = \int_{\mathbb{R}^1} S(t) S^*(kt-\theta) dt$$

on obtient :

$$E\{Y_{\lambda i}(t_1)Y_{\lambda' i}^*(t_2)\} = \int \int sc(\lambda, \xi) \frac{1}{\lambda_i} \Psi_S(\xi - \lambda_i t_1, \lambda/\lambda_i) \Psi_S^*(\xi - \lambda_i t_2, \lambda/\lambda_i) d\lambda d\xi$$

ou encore, en s'intéressant uniquement à la puissance moyenne de $Y_{\lambda i}(t)$:



$$E\{|Y_{\lambda_i}(t)|^2\} = \iint sc(\lambda, \xi) \frac{1}{\lambda_i^2} |\Psi_S(\xi - \lambda t, \frac{\lambda}{\lambda_i})|^2 d\lambda d\xi \quad (23)$$

qui est à comparer avec (15). Ici l'opération qui, à partir de Ψ_S et de $sc(\lambda, \xi)$ donne la puissance moyenne en sortie, est plus complexe qu'une convolution bidimensionnelle, par suite de la non linéarité en temps introduite par le modèle réverbérant. Cependant, il est important de noter que l'information nécessaire à la connaissance de $E\{|Y_{\lambda_i}(t)|^2\}$ est la même que dans le cas du FAPV et finalement les relations sont "cohérentes" : en effet, le modèle de FAPV, d'interprétation donnée par (3), est, en ce qui concerne ce problème de filtrage adapté, un modèle du type à "bande étroite", aussi la fonctionnelle du signal qui intervient est la fonction d'ambiguïté au sens de WOODWARD, et la réception doit se faire sur des copies "dopplérisées" du signal. Alors qu'ici tout est transposé vis-à-vis d'un modèle réverbérant, qui fait donc intervenir la fonction d'ambiguïté en compression de $S(t)$ et la réception se fait sur des copies effectivement comprimées de $S(t)$.

Si le signal $S(t)$ est encore choisi pour que $\Psi_S(\theta, k)$ soit du type $\delta(\theta) \delta(k-1)$, alors

$$E\{|Y_{\lambda_i}(t)|^2\} = sc(\lambda_i, \lambda_i t)$$

i.e. on peut encore espérer atteindre $sc(\lambda, \xi)$, en mesurant $E\{|Y_{\lambda_i}(t)|^2\}$; on remarquera qu'on décrit la fonction de diffusion par des coupes dans des plans passant par l'origine des axes 0λ , $0t$ et perpendiculaires au plan $\lambda_0 t$.

b) Ambiguïté entrée-sortie.

Il est bien évident là encore qu'il s'agit d'étudier la fonction d'ambiguïté en compression de $W(t)$; en fait il s'agit de calculer la valeur moyenne de cette fonction d'ambiguïté, $W(t)$ étant f.a. du temps, ou encore l'espérance d'ambiguïté, en compression, sur les différentes réalisations du filtre réverbérant - toujours supposé centré et WSSUS.

L'espérance d'ambiguïté de $W(t)$ est :

$$\begin{aligned} \chi_W(\theta, k) &= E\left\{\int W(t) W^*(kt-\theta) dt\right\} \\ &= \int_{R^5} S(\lambda t - \xi) S^*[\lambda'(kt-\theta) - \xi'] \\ &\quad E\{G(\lambda, \xi) G^*(\lambda', \xi')\} d\lambda d\lambda' d\xi d\xi' \\ &= \int_{R^3} S(\lambda t - \xi) S^*(\lambda kt - \lambda\theta - \xi) sc(\lambda, \xi) d\lambda d\xi dt \end{aligned}$$

et en faisant apparaître la fonction d'ambiguïté en compression de $S(t)$, soit $\Psi_S(\theta, k)$:

$$\chi_W(\theta, k) = \int_{R^2} sc(\lambda, \xi) \frac{1}{\lambda} \Psi_S(\lambda\theta + \xi - k\xi, k) d\lambda d\xi$$

On voit ici que cette méthode est de mise en oeuvre beaucoup plus difficile que (16) en ce qui concerne la mesure de $sc(\lambda, \xi)$



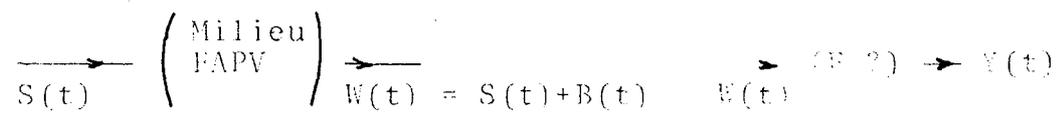
5. ESTIMATION OPTIMALE DE $S(t)$ APRES FILTRAGE ALEATOIRE A PARAMETRES VARIABLES.

5.1 Position du problème.

A $S(t)$ un F.A.F.V. fait correspondre $W(t)$ et on a vu que, connaissant les propriétés statistiques du filtre, ou encore de la f.a. $U(v, \xi)$, il est possible de connaître celles de $W(t)$. Sachant que les caractéristiques du signal de départ sont forcément modifiées par le milieu, si l'on veut que, après transmission dans le milieu, le signal possède certaines propriétés, une première façon de raisonner consiste à dire que le signal de départ doit être modifié en conséquence. Prenons l'exemple du pouvoir de résolution de $S(t)$, traduit par sa fonction d'ambiguïté $\Psi_S(\xi, f)$ (au sens de WOODWARD). En fait, le signal après traversée du milieu FAPV a un pouvoir de résolution différent (cf (16)). On pourrait donc dire que, suivant la fonctionnelle Ψ que l'on désire après traversée du milieu, on mettra un signal $S(t)$ en conséquence (ceci pose d'ailleurs un certain nombre d'autres problèmes que nous ne soulèverons pas ici).

Une deuxième façon de raisonner consiste à dire, si l'on est maître du signal à l'arrivée, i.e. après traversée du milieu, que l'on peut essayer de s'affranchir des perturbations créées par le milieu sur le signal, i.e. essayer de "retrouver" le signal émis avant traversée. C'est en quelque sorte un problème de filtrage inverse, que nous traiterons ici avec un critère d'erreur quadratique moyenne minimale.

Cette étude rentre donc dans le cadre du problème d'estimation optimale de WIENER pourvu que l'on considère que le signal émis est alors lui-même f.a. supposée stationnaire et centrée.



On peut toujours décomposer $W(t)$ de façon formelle sous la forme $S(t) + B(t)$, où $B(t) = W(t) - S(t)$. Le problème de reconstitution consiste à trouver le filtre linéaire F tel que si $Y(t) = F[W(t)]$, l'erreur en moyenne quadratique $E\{|Y(t - t_0) - S(t)|^2\}$ est minimale.

Il est bien évident que le problème général sera très difficile à résoudre ; aussi nous nous limiterons ici au cas où le milieu FAPV - ou milieu réverbérant - est tel que la fonction aléatoire de sortie est encore stationnaire. Alors le filtre F recherché est un filtre permanent. D'autre part, nous donnerons la solution formelle sans tenir compte a priori des contraintes de réalisabilité sur F , i.e. essentiellement sans prendre en compte le fait que F doit être causal.

3.2 Estimation optimale après FAPV.

Le problème qui consiste, connaissant $W(t)=S(t)+B(t)$, f.a. stationnaire, à estimer au mieux - au sens de l'erreur quadratique moyenne - $S(t)$ à la date t_0 , à l'aide d'un filtre linéaire F de réponse impulsionnelle $H(t)$, est résolu [9] depuis longtemps; la réponse impulsionnelle de F est solution de l'équation intégrale



de WIENER-HOPF :

$$\int H(\theta') \Gamma_W(\theta - \theta') d\theta' = \Gamma_{SW}(\theta - t_0) \quad (24)$$

Si l'on n'impose pas à $H(\theta')$ des conditions de support, l'intégrale ci-dessus est à prendre entre $-\infty$ et $+\infty$. Γ_W est la covariance propre de la f.a. stationnaire $W(t)$, soit $E\{W(t) W^*(t-\tau)\}$ et Γ_{SW} est la covariance mutuelle de $S(t)$ et $W(t)$, soit

$$\Gamma_{SW} = E\{S(t) W^*(t-\tau)\}$$

que l'on supposera également stationnaire.

Etudions Γ_{SW} , dans le cas où $W(t)$ est la sortie d'un FAPV, i.e. donné par (3)

$$\Gamma_{SW} = E\{S(t) \iint S^*(t-\tau-\xi) U^*(\nu, \xi) e^{-2i\pi\nu(t-\tau)} d\nu d\xi\}$$

L'espérance mathématique est à prendre sur les réalisations de $S(t)$ et sur les réalisations du milieu ($U(\nu, \xi)$), que nous supposerons évidemment indépendant du signal $S(t)$.

On voit d'ores et déjà que, si le milieu est centré, $m_U^*(\nu, \xi) = 0$ et $\Gamma_{SW} = 0$: le problème de WIENER n'est pas soluble sous cette forme.

Le FAPV sera donc ici essentiellement non centré : la valeur moyenne de $U^*(\nu, \xi)$ est $m_U^*(\nu, \xi) \neq 0$.

Pour que la covariance Γ_{SW} soit stationnaire, il suffit que

$$m_U^*(v, \xi) = K_2^*(\xi) \delta(v) \tag{25}$$

i.e. que le FAPV soit permanent en moyenne. Nous supposons donc être dans ce cas, et si Γ_S est la covariance de la f.a. stationnaire d'entrée, alors

$$\Gamma_{SW}(\tau) = \int_{R^1} \Gamma_S(\tau+\xi) K_2^*(\xi) d\xi = (\Gamma_S * K_2^*)(-\tau) \tag{26}$$

Etudions dans ces conditions la covariance propre de $W(t)$, donnée par

$$\Gamma_W(t_1, t_2) = E \left\{ \int_{R^1} S(t_1-\tau) S^*(t_2-\xi) U(v, \xi) U^*(v', \xi') e^{2i\pi(vt_1 - v't_2)} dv d\xi dv' d\xi' \right\}$$

$$\Gamma_W(t_1, t_2) = \int_{R^4} \Gamma_S(t_1-t_2+\xi'-\xi) E\{U(v, \xi) U^*(v', \xi')\} e^{2i\pi(vt_1 - v't_2)} dv d\xi dv' d\xi'$$

a) Supposons tout d'abord le milieu WSSUS

Dans ces conditions la covariance de U est donnée par (13) dans laquelle m_U est imposée (25). La covariance de W devient

$$\Gamma_W(t_1, t_2) = \iint \Gamma_S(\tau) s(v, \xi) e^{2i\pi v\tau} dv d\tau + \iint \Gamma_S(\tau+\xi'-\xi) K_2(\xi) K_2^*(\xi') d\xi d\xi' \tag{27}$$

La formulation (27) montre que, au second ordre, le FAPV se comporte comme une combinaison d'un filtre permanent, de réponse impulsionnelle $K_2(t)$ (2ème terme du 2ème membre de (27)) et d'un filtrage variable qui agit sur la covariance de $S(t)$ en multipliant celle-ci



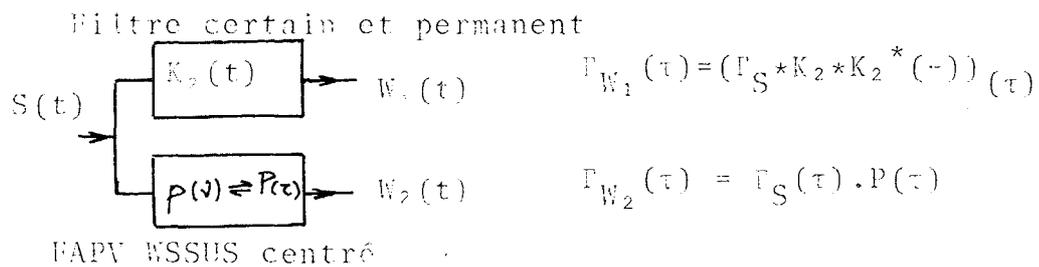
par $P(\tau) \Leftrightarrow p(\nu)$

$$p(\nu) = \int sc(\nu, \xi) d\xi \quad (28)$$

$$\Gamma_W(\tau) = \Gamma_S(\tau) \cdot P(\tau) + (\Gamma_S * K_2 * K_2^*(-))(\tau) \quad (29)$$

La fonction de diffusion n'intervient pas explicitement seule intervient son intégrale vis-à-vis de la variable ξ .

On peut donner le schéma équivalent suivant, en ce qui concerne la statistique du second ordre de la f.a. de sortie du FAPV :



L'équation (24) est alors soluble, en passant aux transformées de FOURIER des deux membres :

Le filtre optimal F cherché a pour gain complexe

$$h(\nu) = \frac{\gamma_{SW}(\nu) e^{2i\pi\nu t_0}}{\gamma_W(\nu)}$$

où $\gamma_{SW}(\nu) \Leftrightarrow \Gamma_{SW}(\tau)$

$$\gamma_W(\nu) \Leftrightarrow \Gamma_W(\tau)$$

Soit $k_2(\nu) \Leftrightarrow K_2(\xi)$.

Alors $\gamma_{SW}(\nu) = \gamma_S(\nu) k_2^*(\nu)$ où $\gamma_S(\nu) \Leftrightarrow F_S(\tau)$

$$\gamma_W(\nu) = \gamma_S(\nu) \left[|k_2(\nu)|^2 + (\gamma_S * p)(\nu) \right] \quad (30)$$

La relation (30) est l'analogie de la relation (29) : on voit que la fonction de diffusion n'intervient pas explicitement au niveau des propriétés statistiques de sortie : seul intervient l'intégrale de la fonction de diffusion vis-à-vis de la variable "retard ξ ", $p(\nu)$.

Le rôle du "filtre aléatoire à paramètres variables" apparaît ici de façon plus explicite par le fait que la densité spectrale énergétique à l'entrée $\gamma_S(\nu)$ est convoluée par la fonction représentant le milieu au second ordre, ici, $p(\nu)$. (Remarquons que si le signal d'entrée est localisé en fréquence à $\nu = \nu_0$ par exemple, le spectre en sortie est élargi autour de ν_0 par l'action de $p(\nu)$: cela traduit bien le phénomène de non homogénéité du FAPV). Le support fréquentiel de $W(t)$ est plus étendu que celui de $S(t)$.

Dans ces conditions, le gain complexe du filtre cherché est

$$h_0(\nu) = \frac{\gamma_S(\nu) k_2^*(\nu) e^{2i\pi\nu t_0}}{(\gamma_S * p)(\nu) + \gamma_S(\nu) |k_2(\nu)|^2} \quad (31)$$

Exemple grossier :

Supposons que la dse $\gamma_S(\nu)$ est constante et à support borné.

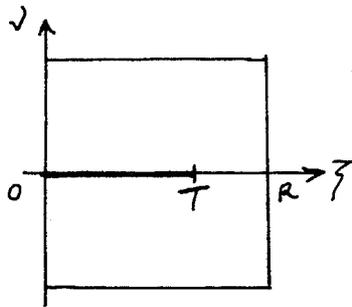


$$\gamma_S(\nu) = \gamma_0 \Pi_B(\nu)$$

Supposons que la valeur moyenne du milieu soit équivalente à un filtre passe-bas

$$K_2(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi \in (0, T) \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

Si l'on fixe $sc(\nu, \xi)$ à une valeur constante sc_0 sur une certaine plage : $\pm D$ pour ν , R pour ξ



Alors $p(\nu) = sc_0 R \Pi_D(\nu)$
 Il est logique de penser que $R > T$ (sinon, au delà de T la variance serait nulle, i.e. le milieu serait certain.

Alors

$$h_0(\nu) = \frac{T \gamma_0 \Pi_B(\nu) \frac{\sin \pi T \nu}{\pi T \nu} e^{i \pi \nu T / 2} e^{2i \pi \nu t_0}}{sc_0 R \gamma_0 (\Pi_B * \Pi_D)(\nu) + \gamma_0 \Pi_B(\nu) T^2 \left(\frac{\sin \pi T \nu}{\pi T \nu} \right)}$$

On voit comment interviennent les supports des différentes fonction entrant en jeu dans l'expression de $h_0(\nu)$.
 De toute façon, $h_0(\nu)$ est défini uniquement sur le support B du signal et nul en dehors.

D'autre part, il faut comparer B d'une part avec $\frac{1}{T}$ et d'autre part avec D .

Si $B \gg 1/T$ le produit $\Pi_B(\nu) \cdot k_2^*(\nu)$ se réduit quasiment à $k_2^*(\nu)$ au numérateur comme au dénominateur

et d'autre part, sur la plage intéressante, $\nu < B$, $\Pi_B * \Pi_D$ sera peu différent de 1, sauf si $B \sim D$

$$h_o(\nu) \sim \frac{T\gamma_o(\sin \pi T\nu/\pi T\nu) e^{+2i\pi(\nu(t_o+T/4))}}{s c_o R\gamma_o + \gamma_o \left(\frac{\sin \pi T\nu}{\pi T\nu}\right)^2}$$

Si $B \ll 1/T$ c'est la plage du signal qui s'impose dans le produit $\Pi_B \cdot k_2^*(\nu)$. Suivant que $D \ll B$ ou $D \gg B$, le produit de convolution du dénominateur est $\Pi_B(\nu)$ ou $\Pi_D(\nu)$ donc de toute façon sur la plage intéressante:

$|\nu| < B$, $h_o(\nu) \sim K$ sauf si $B \sim D$, alors le dénominateur fera apparaître la variation $\Lambda_B(\nu)$.

b) Hypothèse WSS seule.

Nous avons supposé en (27) que le FAPV est WSSUS, ce qui permet de stationnariser la covariance de la f.a. $W(t)$. En fait, cela n'est pas nécessaire et le problème de WIENER est encore soluble si le FAPV est simplement WSS (cf(10)). En ce cas

$$E\{\tilde{U}(\nu, \xi) \tilde{U}^*(\nu', \xi')\} = a(\xi, \xi'; \nu) \delta(\nu - \nu')$$

et

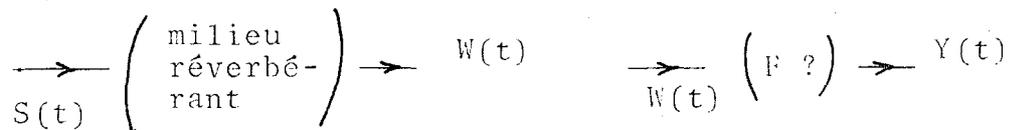
$$\Gamma_W(t_1, t_2) = \int_{R^3} \Gamma_S(\tau + \xi' - \xi) a(\xi, \xi'; \nu) e^{2i\pi\nu\tau} d\nu d\xi d\xi' + (\Gamma_S * K_2 * K_2^*(-))(\tau)$$

La covariance de $W(t)$ étant encore stationnaire, l'équation (24) de WIENER HOPFF est théoriquement soluble. Les difficultés apparaissent lorsque l'on veut d'une part donner l'expression du gain complexe $h_o(\nu)$ et d'autre part donner l'allure de la fonction $a(\xi, \xi'; \nu)$



3.3 Estimation optimale après "filtre réverbérant".

Le problème de l'estimation linéaire optimale de $S(t)$ lorsque $S(t)$ a traversé un milieu de type "filtre réverbérant", se pose dans des termes identiques à ci-dessus



Le filtre optimal est toujours solution de l'équation (24) dans laquelle

$$S_W(t, t) = E \int_R S(t) S(t - \tau) G(\tau, t) d\tau$$

Pour les mêmes raisons que ci-dessus, on impose au filtre réverbérant de n'être pas centré ; et si

$$m_G(\tau, t) \text{ est du type } K(\tau) (\tau - 1),$$

la covariance mutuelle S_W est stationnaire et encore donnée par (26) :

$$\& S_W(\tau) = (S \quad K) (\tau)$$

L'expression de la covariance propre W est liée à l'hypothèse que l'on fait sur la covariance de la f.a. $G(\tau, t)$. Si le milieu est supposé WSSUS (cf (20)), alors la covariance de $W(t)$ est (cf(22)) :

$$\Gamma_W(\tau) = \iint \Gamma_S(\lambda, \tau) s_c(\lambda, \xi) d\lambda d\xi + (\Gamma_S * K_2 * K_2^*(-))(\tau)$$

Encore ici on voit que ce qui intervient dans le problème d'estimation n'est pas $sc(\lambda, \xi)$ mais son intégrale vis-à-vis de la variable retard, soit

$$p(\lambda) = \int sc(\lambda, \xi) d\xi$$

$$\Gamma_W(\tau) = \int \Gamma_S(\lambda, \tau) p(\lambda) d\lambda + (\Gamma_S * K_2 * K_2^*(-))(\tau) \quad (32)$$

Ici l'action du filtre réverbérant au second ordre est telle que la caractéristique du milieu agit sur la covariance du signal de la même façon que la f.a. milieu sur la f.a. signal, réalisation par réalisation : la covariance du signal est comprimée (ou dilatée), multipliée par une pondération (certaine) $p(\lambda)$ et le tout est sommé. Le schéma que nous avons proposé en 2.2b lors de l'étude des valeurs moyennes, s'applique ici au second ordre.

Cherchons l'expression du gain complexe $h_0(\nu)$ du filtre optimal F

De la même façon que ci-dessus

$$h_0(\nu) = \frac{\gamma_{SW}(\nu) e^{2i\pi\nu t_0}}{\gamma_W(\nu)}$$

avec $\gamma_{SW}(\nu) = \gamma_S(\nu) k_2^*(\nu)$ $k_2(\nu) \rightleftharpoons K_2(\xi)$

et,

$$\gamma_W(\nu) = \gamma_1(\nu) + \gamma_S(\nu) |k_2(\nu)|^2$$



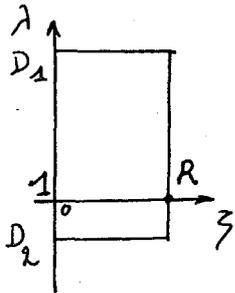
$\gamma_1(\nu)$, transformée de FOURIER du premier terme du 2ème membre de (32) peut s'exprimer en fonction de la d.s.e. du signal d'entrée

$$\gamma_1(\nu) = \int \frac{1}{\lambda} p(\lambda) \gamma_S(\nu/\lambda) d\lambda$$

et finalement, le gain complexe du filtre optimal est

$$h_o(\nu) = \frac{\gamma_S(-\nu) k_2^*(\nu) e^{2i\pi\nu t_0}}{\int_{-\infty}^{+\infty} 1/\lambda p(\lambda) \gamma_S(\nu/\lambda) d\lambda + \gamma_S(\nu) |k_2(\nu)|^2} \quad (33)$$

qui est l'analogie de (31).



Il faudrait ici considérer que le support de $sc(\lambda, \xi)$ est non symétrique en λ : ce support s'étend par exemple de D_1 à D_2 en λ avec $D_1 = 1/D_2$

CONCLUSION.

Nous avons tout d'abord rappelé un certain nombre de propriétés relatives à l'étude des filtres aléatoires à paramètres variables ; nous avons en particulier insisté sur le fait que la valeur moyenne du filtre aléatoire est vraisemblablement non nulle dans le cas général et que, par là même, la fonction de diffusion habituelle ne concerne que la partie "centrée" du filtre. Il est assez possible par exemple d'envisager de tenir compte des "trajets multiples" dans le milieu, par le biais de cette valeur moyenne. Nous avons, grâce à une interprétation commune du filtre, introduit un modèle de "milieu



réverbérant" lié de plus près au phénomène physique de superposition d'échos retardés et comprimés de façon aléatoire, et nous avons montré qu'il est également possible dans ce cas-là de définir une fonction de diffusion ayant le même sens et de la "mesurer" dans des conditions similaires. Enfin, comme application un peu plus spéciale, nous avons abordé le problème de la reconstitution optimale (au sens de l'erreur quadratique moyenne) du signal traversant le milieu aléatoire à paramètres variables et nous avons, dans des cas simples, trouvé la réponse formelle du filtre optimal.

Toutes ces études sont à l'heure actuelle en cours d'exploitation et de simulation (numérique et électronique [13], afin de vérifier, ou d'étudier de façon plus précise, un certain nombre de points (test de l'hypothèse WSSUS, reconstitution, etc...). Un des principaux problèmes est de savoir quelle forme on peut attribuer de façon raisonnable, d'une part à la valeur moyenne du filtre, et, d'autre part, à la fonction de diffusion. Des études expérimentales sur certains milieux [11] devraient pouvoir donner quelques indications.



BIBLIOGRAPHIE

- [1] ZADEH L.A. - "Time Varying Networks"
Proc. IRE (1961)
- [2] ELLINTHORPE A.W. et NUTTAL A.H. - First Annual
IEEE Communications Convention
Boulder (Colorado), Juin 1965
- [3] BELLO P.A. - Characterization of Randomly Time
Variant Filters.
MIT Research Lab. of Electronics, Cambridge (Mass.)
Rept. N° 352, May 25, 1959
- [4] KENNEDY R.S. - Fading dispersive Communication
Channels
John Wiley & Sons, 1969
- [5] JOURDAIN G. - Sur la fonction de diffusion d'un
système de transmission aléatoire.
Acustica, Sept. 1972, Vol. 27, N° 3, p. 151-159
- [6] SOURROUILLE L. - Détection dans un bruit d'un signal
perturbé par un filtrage linéaire aléatoire.
Thèse de 3ème cycle, Orsay, Février 1973
- [7] MERMOZ H GRANDVAUX - Le canal acoustique sous-
marin considéré comme un filtre aléatoire non
homogène
Nice, Juin 1971, Colloque GRETSI.
- [8] FAURE M.P. - Modèle statistique de la réverbération
Signal Processing with emphasis on Underwater
Acoustics, Grenoble, 1964
- [9] WIENER N. - The Extrapolation, Interpolation and
Smoothing of Stationary time Series
John Wiley & Sons, New York, 1949
- [10] SWICK D.A. - An ambiguity function independent of
assumption about bandwidth and carrier frequency.
NRL Report 6471, USA, Dec. 1969
- [11] GRANDVAUX - Quelques aspects des communications
acoustiques sous-marines - Coll. GRETSI, Mai 1973
- [12] TRAILATH - Measurements on Time Variant Communica-
tion channels.
IEEE Trans. Inform. Theory, p 229-236, Sept. 1962