



Nice 7 au 12 mai 1973

---

SIMPLIFICATION DU FILTRAGE OPTIMUM D'ANTENNE

César MACCHI

Ingénieur Principal de l'Armement

Service Technique des Constructions et Armes Navales

---

**RESUME**

On montre que les filtrages numériques optimums d'antenne se décomposent en général en un filtrage propre au processus aléatoire reçu sur les capteurs de l'antenne, suivi d'un filtre unique caractéristique du signal attendu. Des exemples numériques, simulés sur ordinateur, illustrent les avantages de la simplification de structure proposée.

**SUMMARY**

It is shown that optimum linear array processing is made of a linear array processing characteristic of the input stochastic process, followed by a unique filter characteristic of the relevant signal. The complexity of the array processing implementation is then appreciably reduced. The advantages of the method are pointed out by computer simulations of several examples.

SIMPLIFICATION DU FILTRAGE OPTIMUM D'ANTENNE1. - INTRODUCTION.

Les solutions de nombreux problèmes de détection sous-marine, active ou passive, se concrétisent par des récepteurs de structures voisines. Ces récepteurs sont constitués d'un filtrage optimum d'antenne suivi d'un traitement en général non linéaire.

La recherche du filtrage numérique optimum, pour une antenne de K capteurs, fait apparaître une batterie de K filtres numériques de L coefficients, conformément à la figure 1. Fréquemment le vecteur qui caractérise ce filtrage optimum, c'est-à-dire le vecteur  $\vec{H}_*$  de ces KL coefficients est de la forme

$$(1) \quad \vec{H}_* = \tilde{R}^{-1} \cdot \vec{S}.$$

Dans cette égalité

- $\tilde{R}$  est une matrice de corrélation (m.c.) d'un processus aléatoire stationnaire (p.a.) vectoriel, de dimension KL ;
- $\vec{S}$  est un vecteur connu de dimension KL ;
- K et L sont généralement de l'ordre de 10 et 500.

Cette forme particulière du filtrage est commune à un grand nombre de problèmes de détection et d'estimation.



SIMPLIFICATION DU FILTRAGE OPTIMUM D'ANTENNE

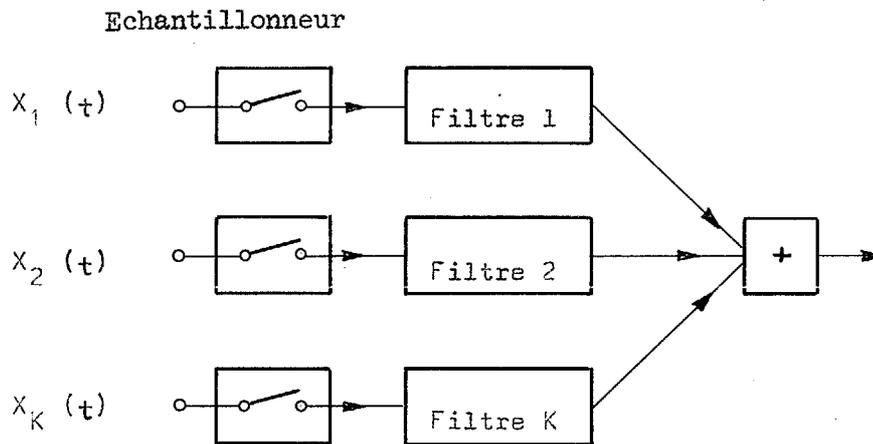


Fig. 1 - Structure du Filtrage optimum d'antenne

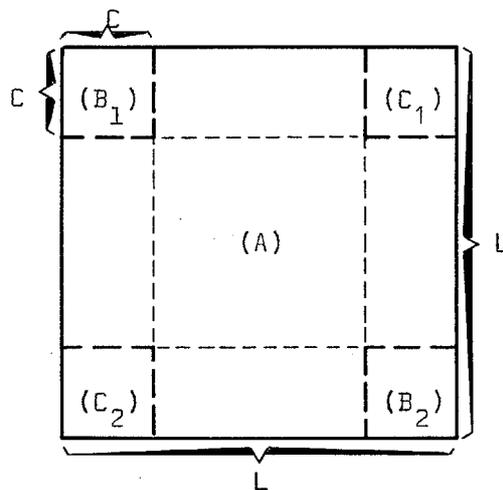


Fig. 2



## SIMPLIFICATION DU FILTRAGE OPTIMUM D'ANTENNE

---

Dans la pratique le calcul de  $\vec{H}_*$ , défini par (1), se heurte à une sérieuse difficulté parce que la m.c.  $\tilde{R}$  est une matrice inconnue de grande dimension. Le caractère inconnu de  $\tilde{R}$  n'est pas le plus gênant car l'observation du p.a., dont  $\tilde{R}$  est la m.c., permet de calculer  $\vec{H}_*$  ; une méthode de calcul consiste à estimer  $\tilde{R}$  puis à l'inverser ; une autre méthode consiste par exemple à utiliser un algorithme d'itération stochastique qui réalise simultanément l'estimation et l'inversion. Quelle que soit la méthode de calcul utilisée la difficulté de mise en oeuvre du filtrage est liée à la valeur relativement grande de la dimension de  $\tilde{R}$ , par exemple  $KL = 5000$ . Pour résoudre cette difficulté nous proposons une simplification de ce filtrage numérique optimum qui utilise la structure particulière de l'inverse d'une m.c.  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$



SIMPLIFICATION DU FILTRAGE OPTIMUM D'ANTENNE

---

2. - PROPRIETE DE L'INVERSE D'UNE MATRICE DE CORRELATION.

Considérons la matrice de corrélation  $\tilde{R}(L)$  de  $L$  échantillons successifs de pas  $\Delta$  d'un p.a.  $n(t)$  scalaire, centré, de densité spectrale de puissance  $\gamma(\nu)$  et de fonction de corrélation  $\Gamma(\tau)$

$$(2) \quad \tilde{R}(L) = E \left[ \begin{matrix} \vec{N}_j \\ \vec{N}_j \end{matrix} \cdot \vec{N}_j^T \right] = (\Gamma \left[ (i-j)\Delta \right]), \quad i \text{ et } j = 1, 2, \dots, L, \text{ avec}$$

$$(3) \quad \vec{N}_j^T = (n(j\Delta), n((j+1)\Delta), \dots, n((j+L-1)\Delta)).$$

1 - Existence de  $R^{-1}(L)$ . - Soit  $\gamma^\Delta(\nu)$  la fonction périodique de période  $1/\Delta$ , appelée spectre replié de  $n(t)$ ,

$$(4) \quad \gamma^\Delta(\nu) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma\left(\nu + \frac{k}{\Delta}\right), \quad -\frac{1}{2\Delta} \leq \nu \leq \frac{1}{2\Delta}.$$

Le spectre replié peut aussi être considéré [3] comme la fonction dont les coefficients de Fourier sont les  $\Gamma(n\Delta)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , ce que nous noterons

$$(5) \quad \gamma^\Delta(\nu) \iff \Gamma(n\Delta).$$

Une condition suffisante pour que la matrice  $\tilde{R}(L)$  soit inversible est que le spectre replié de  $n(t)$  soit continu par morceaux et strictement positif :  $\gamma^\Delta(\nu) > 0$ , [1].

Dans la suite nous supposons satisfaite cette condition suffisante.



SIMPLIFICATION DU FILTRAGE OPTIMUM D'ANTENNE

2 - Structure de  $R^{-1}(L)$ . - Notons  $\Gamma'(n\Delta)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , les coefficients de Fourier de la fonction  $\gamma^{\Delta'}(v)$  inverse de  $\gamma^{\Delta}(v)$

$$(6) \quad \Gamma'(n\Delta) \iff \gamma^{\Delta'}(v) \left( = \frac{1}{\gamma^{\Delta}(v)} \right).$$

Il est aisé de voir que les  $\Gamma'(n\Delta)$  sont réels pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , et qu'ils constituent une suite de corrélation. Posons

$$(7) \quad \Gamma'_c(n\Delta) = \begin{cases} \Gamma'(n\Delta) & \dots & |n| \leq c, \\ 0 & \dots & |n| > c; \end{cases}$$

et définissons les matrices  $\tilde{R}'(L)$  et  $\tilde{R}'_c(L)$ , de type  $(L, L)$  dont les éléments de la  $i^{\text{ème}}$  ligne et de la  $j^{\text{ème}}$  colonne sont respectivement  $\Gamma'[(i-j)\Delta]$  et  $\Gamma'_c[(i-j)\Delta]$ ,

La matrice  $\tilde{R}'(L)$  est appelée la m.c. quasi-inverse de  $\tilde{R}(L)$ , car elle est sensiblement égale à  $\tilde{R}^{-1}(L)$  comme le montre le théorème suivant, qui précise la structure de l'inverse d'une m.c.. Pour la généralisation au cas d'une m.c. d'un p.a. vectoriel on pourra se reporter à [1].

Divisant la matrice  $\tilde{R}^{-1}(L)$  en divers sous-ensembles  $A, \dots, C_2$  ainsi qu'il est illustré sur la figure 2, on peut préciser la structure  $\tilde{R}^{-1}(L)$ .

Théorème. - Soit  $\tilde{R}(L)$  une m.c. telle que  $\Gamma(k\Delta) = 0$  pour  $|k| > a$ , avec  $1+2a < L$ . Appelons  $\rho_{ij}(L)$  et  $\rho'_{ij}(L)$  les éléments respectifs des matrices  $\tilde{R}^{-1}(L)$  et  $\tilde{R}'_c(L)$ . Alors, quel que soit  $\epsilon > 0$ , il existe des entiers positifs  $C(\epsilon)$  et  $\mathcal{L}(\epsilon)$  tels que

$$(8) \quad \forall C \geq C(\epsilon), \quad \forall L \geq \mathcal{L}(\epsilon) \text{ vérifiant } L > 2C$$

les inégalités suivantes sont vraies



SIMPLIFICATION DU FILTRAGE OPTIMUM D'ANTENNE

2° - Étirement. - Supposons que pour un  $\epsilon$  de notre choix, nous connaissons une approximation  $\tilde{R}''(L)$  de  $\tilde{R}^{-1}(L)$ . Alors la matrice  $\tilde{R}''(L)$  permet de connaître à  $\epsilon$  près tous les éléments de  $\tilde{R}^{-1}(L')$ , pour tout  $L' > L \geq \mathcal{L}(\epsilon)$ . En effet, d'une manière imagée nous pouvons dire que la matrice  $\tilde{R}''(L')$  se déduit de  $\tilde{R}''(L)$  par un étirement de  $\tilde{R}''(L)$  parallèle à la diagonale principale, conservant les sous-ensembles  $(B_1)$  et  $(B_2)$ .

3 - Exemple. - La structure de  $\tilde{R}^{-1}(L)$  est illustrée par la planche 1 où la fonction de corrélation échantillonnée vaut

$$(13) \quad \Gamma(n\Delta) = \begin{cases} 0,650 & \dots\dots & |n| & = 0, \\ -0,080 & \dots\dots & |n| & = 1, \\ 0,002 & \dots\dots & |n| & = 2, \\ 0 & \dots\dots & |n| & \geq 3. \end{cases}$$

Sur cette planche apparaissent les matrices  $\tilde{R}(5)$  et  $\tilde{R}^{-1}(5)$ ,  $\tilde{R}^{-1}(10)$ . Nous avons choisi  $\epsilon = 10^{-3}$  et exprimé le résultat du calcul de chacun des éléments de  $\tilde{R}^{-1}(\cdot)$  en utilisant le nombre minimum de chiffres significatifs nécessaires pour assurer la précision  $\epsilon$  requise. Il est aisé de constater qu'une expression à mieux que  $\epsilon$  près de  $\tilde{R}^{-1}(10)$  est obtenue par étirement de l'expression de  $\tilde{R}^{-1}(5)$ .

On constate sur cet exemple que, aux effets de bord près, l'inverse d'une m.c. est défini par la donnée d'une de ses lignes.

SIMPLIFICATION DU FILTRAGE OPTIMUM D'ANTENNE

$$(9) \quad |\rho_{ij}(L) - \rho'_{ij}(L)| < \epsilon, \forall \rho_{ij}(L) \in (A),$$

$$(10) \quad |\rho_{ij}(L) - \rho'_{ij}(\mathcal{L}(\epsilon))| < \epsilon, \forall \rho_{ij}(L) \in (B_1) \text{ ou } (B_2),$$

$$(11) \quad |\rho_{ij}(L)| < \epsilon, \forall \rho_{ij}(L) \in (C_1) \text{ ou } (C_2).$$

Ce théorème appelle quelques commentaires.

1° - Approximation, effets de bord. Lorsque  $L > 3C$ , les éléments  $\rho'_{ij}$  de  $(C_1)$  et  $(C_2)$  sont nuls. Le théorème précédent permet donc de considérer, pour  $L > 3C$  que  $R'_c(L)$  est une approximation de  $\tilde{R}^{-1}(L)$ , à mieux que  $\epsilon$  près pour chacun des éléments, aux effets de bord près représentés par les "coins"  $(B_1)$  et  $(B_2)$ . Ceci conduit à définir la matrice  $R''(L)$  d'éléments  $\rho''_{ij}(L)$

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho''_{ij}(L) = \rho'_{ij}(L), \forall \rho''_{ij}(L) \in (A), \text{ ou } (C_1) \text{ ou } (C_2) \\ \rho''_{ij}(L) = \rho_{ij}(\mathcal{L}(\epsilon)), \forall \rho''_{ij}(L) \in (B_1) \text{ ou } (B_2) \end{array} \right.$$

D'après le théorème précédent, la matrice  $R''(L)$  est une approximation à mieux que  $\epsilon$  près (pour chacun des éléments) de l'inverse cherchée, qui a l'avantage sur d'autres approximations d'être symétrique et stationnaire aux effets de bord près

$$\left( \rho''_{ij}(L) = \Gamma' \left[ (i-j)\Delta \right], \forall \rho''_{ij}(L) \notin (B_1) \text{ ou } (B_2) \right).$$

Dans la pratique  $\mathcal{L}(\epsilon) \ll L$ .



SIMPLIFICATION DU FILTRAGE OPTIMUM D'ANTENNE

PLANCHE 1

.650	-.080	.002	.000	1.563	.195	.021	.002	.000
-.080	.650	-.080	.000	.195	1.587	.198	.021	.002
.002	-.080	.650	.002	.021	.198	1.587	.198	.021
.000	.002	-.080	-.080	.002	.021	.198	1.587	.195
.000	.000	.002	.650	.000	.002	.021	.195	1.563

Matrice de corrélation  $\tilde{R}(5)$

Matrice inverse  $\tilde{R}^{-1}(5)$

1.563	.195	.021	.000	.000	.000	.000	.000	.000
.195	1.587	.198	.002	.000	.000	.000	.000	.000
.021	.198	1.587	.021	.002	.000	.000	.000	.000
.002	.021	.198	.198	.021	.002	.000	.000	.000
.000	.002	.021	1.587	.198	.021	.002	.000	.000
.000	.000	.002	.198	1.587	.198	.021	.002	.000
.000	.000	.000	.021	.198	1.587	.198	.021	.002
.000	.000	.000	.002	.021	.198	1.587	.198	.021
.000	.000	.000	.000	.002	.021	.198	1.587	.195
.000	.000	.000	.000	.000	.002	.021	.195	1.563

Matrice inverse  $\tilde{R}^{-1}(10)$

SIMPLIFICATION DU FILTRAGE OPTIMUM D'ANTENNE

3. - PRINCIPE DE LA SIMPLIFICATION PROPOSEE.

Décrivons le principe de la simplification proposée sur un exemple simple.

Pour cela considérons la détection d'un signal certain  $s(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , dans un p.a. scalaire  $n(t)$ , centré, de fonction de corrélation  $\Gamma(\tau)$ , de densité spectrale de puissance  $\gamma(\nu)$ . L'observation est constituée par un processus aléatoire  $x(t)$ . En dehors de l'intervalle  $(0, T)$  l'observation n'est constituée que de bruit.

Les divers signaux sont échantillonnés avec un pas d'échantillonnage  $\Delta$ . A toute fonction  $f(t)$  est associé le vecteur des échantillons

$$(14) \quad \vec{F} = \left( f(0), f(\Delta), \dots, f \left[ (L-1)\Delta \right] \right),$$

où  $L$  est la partie entière de  $\frac{T}{\Delta}$ . Ainsi sont définis les vecteurs observation  $\vec{X}$ , signal  $\vec{S}$  et bruit  $\vec{N}$  avec sa matrice de corrélation de type  $(L, L)$

$$(15) \quad \underline{R}(L) = E (\vec{N} \cdot \vec{N}^T) .$$

Deux situations exclusives  $H_0$  et  $H_1$  sont possibles, entre lesquelles on doit choisir au vu de l'observation  $\vec{X}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \vec{X} = \vec{N} , \\ H_1 : \vec{X} = \vec{N} + \vec{S} . \end{array} \right.$$

Le récepteur, optimum au sens de certains critères (par exemple le critère du rapport signal à bruit maximum), utilise un filtre numérique, comme l'indique la figure (3), dont les coefficients sont les coordonnées du vecteur



SIMPLIFICATION DU FILTRAGE OPTIMUM D'ANTENNE

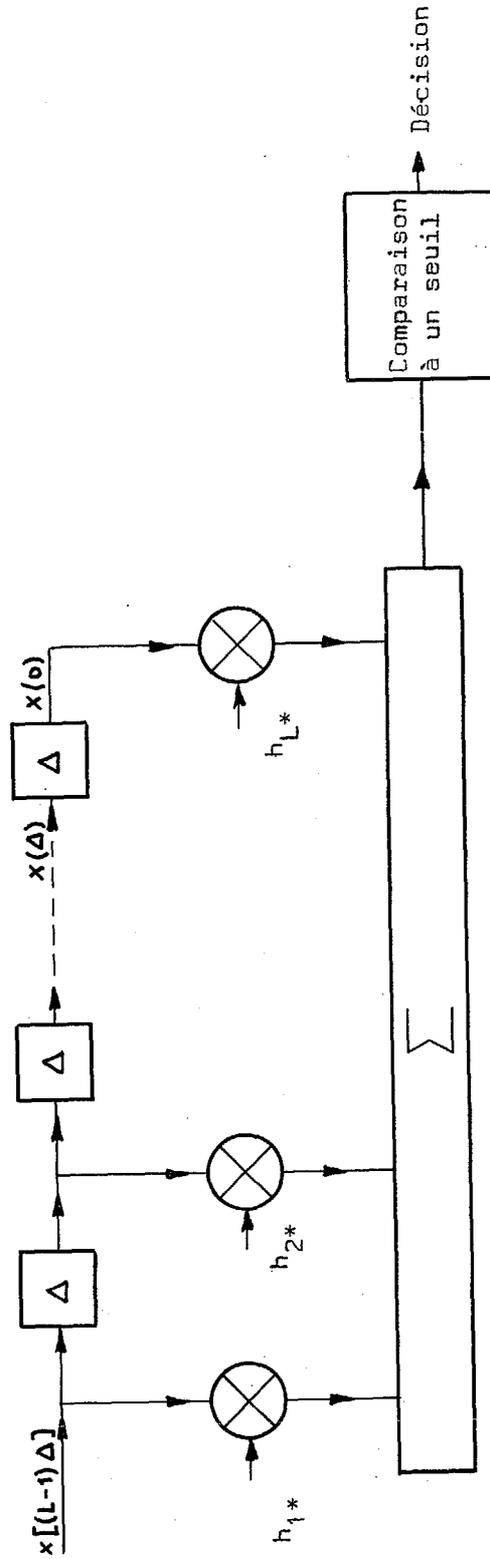


Fig. 3 - Détection numérique d'un signal certain dans un bruit  
Structure du récepteur optimal,  $\vec{H}_* = (h_{L^*}, \dots, h_{2^*}, h_{1^*})$

## SIMPLIFICATION DU FILTRAGE OPTIMUM D'ANTENNE

$$(16) \quad \vec{H}_* = \tilde{R}^{-1}(L) \cdot \vec{S}.$$

L'utilisation de la structure de  $\tilde{R}^{-1}(L)$ , est d'une réelle simplicité à condition de bien choisir l'intervalle d'observation.

Ordinairement, la théorie de la détection suppose que les signaux reçus sont observés uniquement sur l'intervalle de temps où le signal à détecter est susceptible d'être présent. Nous savons, d'après [1, p. 118], que pour détecter un signal de  $L$  coordonnées dans un bruit, il est préférable d'observer les signaux reçus sur un nombre de coordonnées  $L'$  plus grand que  $L$ ,

$$(17) \quad L' = L + 2c,$$

tel que  $c\Delta$  est supérieur ou égal à la durée de corrélation  $\gamma\Delta$  du spectre replié inverse  $\gamma^{\Delta}(\nu)$  (6) ; nous définissons  $\gamma$  comme le plus petit entier positif tel que  $\Gamma(n\Delta)$  puisse être considéré comme nul pour tout  $n > \gamma$ . En particulier le rapport signal à bruit est voisin de son maximum pour un tel choix de  $L'$ . Dans ce qui suit  $c$  pourra être pris aussi grand que l'on veut, car il y a intérêt à considérer un intervalle d'observation aussi étendu que possible.

Dans le but d'utiliser ce résultat, définissons les vecteurs  $\vec{X}'$  et  $\vec{N}'$  à partir de  $x(t)$  et  $n(t)$  en associant à toute fonction  $f(t)$  le vecteur  $\vec{F}'$  de  $L'$  coordonnées

$$(18) \quad \vec{F}' = \underbrace{(f(-c\Delta), \dots, f(-\Delta))}_C, \underbrace{(f(0), \dots, f[(L-1)\Delta])}_L, \underbrace{(f(L\Delta), \dots, f[(L+C-1)\Delta])}_C$$



SIMPLIFICATION DU FILTRAGE OPTIMUM D'ANTENNE

De même définissons ainsi le vecteur  $\vec{S}^{\circ}$

$$(19) \quad \vec{S}^{\circ} = \left( \underbrace{0, \dots, 0}_C \quad \underbrace{s(0), \dots, s}_{L} \left[ (L-1)\Delta \right] \quad \underbrace{0, \dots, 0}_C \right).$$

Dans ces conditions, le récepteur optimum utilise un filtre numérique dont les coefficients sont les coordonnées du vecteur

$$(20) \quad \vec{H}'_* = \tilde{R}^{-1}(L') \cdot \vec{S}^{\circ},$$

et transforme le vecteur observation  $\vec{X}'$  en une grandeur test Y

$$(21) \quad Y = \vec{X}'^T \tilde{R}^{-1}(L') \vec{S}^{\circ}.$$

Les c premières et les c dernières colonnes de  $\tilde{R}^{-1}(L')$  n'interviennent pas dans le calcul du vecteur  $\vec{H}'_*$  à cause de la structure du vecteur  $\vec{S}^{\circ}$ . En outre, d'après le théorème précédent, les L colonnes centrales de  $\tilde{R}^{-1}(L')$  sont stationnaires, avec une certaine précision.

Le test (21) s'exprime donc simplement à l'aide des coefficients  $\Gamma'(n\Delta)$  d'une colonne de la partie centrale de  $\tilde{R}^{-1}(L')$  :

$$(22) \quad y = \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{l=c}^{L+C-1} s(k\Delta) x(l\Delta) \Gamma' \left[ (l-k)\Delta \right]$$

ou encore

$$(23) \quad y = \sum_{k=0}^{L-1} s(k\Delta) \sum_{l=-\gamma}^{+\gamma} \Gamma'(l\Delta) x \left[ (k+l)\Delta \right]$$

SIMPLIFICATION DU FILTRAGE OPTIMUM D'ANTENNE

---

Il apparait que  $y$  est le résultat, à l'instant  $(L+\gamma-1)\Delta$ , du filtrage homogène de réponse  $\Gamma'(n\Delta)$ , suivi d'un filtrage homogène de réponse  $s(k\Delta)$  comme le montre la figure 4.

Remarquons que le premier filtre est propre au bruit, tandis que le second ne dépend que du signal attendu.

L'intérêt de cette décomposition réside dans le fait que le nombre de coefficients  $(2\gamma+1)$  du filtre propre au bruit est beaucoup plus petit que le nombre de coefficients  $(L)$  du filtre (16). Ceci résulte du fait que, dans la pratique, la durée de corrélation  $\gamma\Delta$  est beaucoup plus petite que la durée  $T$  des signaux à détecter,

$$\gamma \ll L.$$

Par suite, quelle que soit la méthode d'inversion de matrice utilisée, il est plus simple de construire  $\tilde{R}^{-1}(2\gamma+1) \vec{\delta}(2\gamma+1)$  que  $R^{-1}(L) \vec{S}$ . (Ici  $\vec{\delta}(2\gamma+1)$  est un vecteur de  $(2\gamma+1)$  coordonnées nulles, à l'exception de la coordonnée centrale qui vaut 1).

L'intérêt de la simplification précédente est plus important encore dans le cas général où l'observation est un p.a. vectoriel, c'est-à-dire dans le cas général d'une antenne composée de plusieurs capteurs.



SIMPLIFICATION DU FILTRAGE OPTIMUM D'ANTENNE

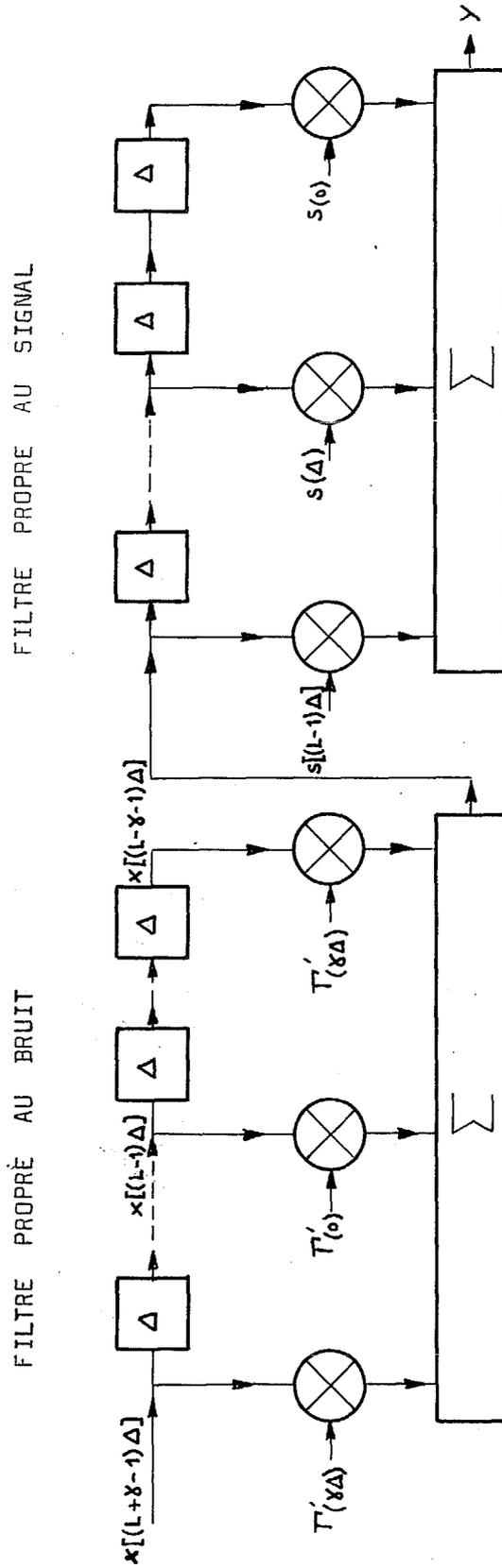


Fig. 4 - Structure du récepteur optimal simplifié (Détection active,  $K = 1$ )

SIMPLIFICATION DU FILTRAGE OPTIMUM D'ANTENNE



4. - SIMPLIFICATION DU FILTRAGE OPTIMUM D'ANTENNE - CAS DE LA DETECTION ACTIVE.

Dans le cas de la détection active le signal à détecter  $s(t)$  est certain, de phase aléatoire, d'instant d'arrivée inconnu dans un intervalle de temps  $(0, \infty)$ . Le signal  $s(t)$  est de durée  $T$ . ( $T \ll \infty$ ).

Le récepteur optimum (au sens d'une probabilité de détection maximum, pour une probabilité de fausse alarme donnée) est connu [4]. Le récepteur est constitué d'un traitement linéaire suivi d'un traitement non linéaire. La partie linéaire de ce récepteur (le filtre optimal d'antenne) est constituée par deux batteries de  $K$  filtres numériques, comme le montre la figure 5.

Chacun de ces filtres  $F_e^j$  ( $e=c$  ou  $s$ ), est un filtre numérique caractérisé par  $L$  échantillons,  $L$  étant égal à la partie entière de  $\frac{T}{\Delta}$ . Les batteries de filtres sont définies par les vecteurs suivants :

$$(24) \quad \begin{cases} \vec{q}_c = \tilde{R}^{-1}(K,L) \vec{S}_c, \\ \vec{q}_s = \tilde{R}^{-1}(K,L) \vec{S}_s. \end{cases}$$

Dans (24), la matrice  $\tilde{R}(K,L)$  est la matrice de corrélation de type  $(KL, KL)$  du p.a., à  $K$  composantes  $n_1(t), n_2(t), \dots, n_K(t)$ , observé en absence du signal  $s(t)$ .

En posant

$$(25) \quad \vec{N}_j^T = (n_1(j\Delta), \dots, n_1[(j+L-1)\Delta], n_2(j\Delta), \dots, n_K[(j+L-1)\Delta])$$

la matrice  $\tilde{R}(K,L)$  a pour définition :

$$(26) \quad \tilde{R}(K,L) = E (\vec{N}_j \cdot \vec{N}_j^T) .$$



SIMPLIFICATION DU FILTRAGE OPTIMUM D'ANTENNE

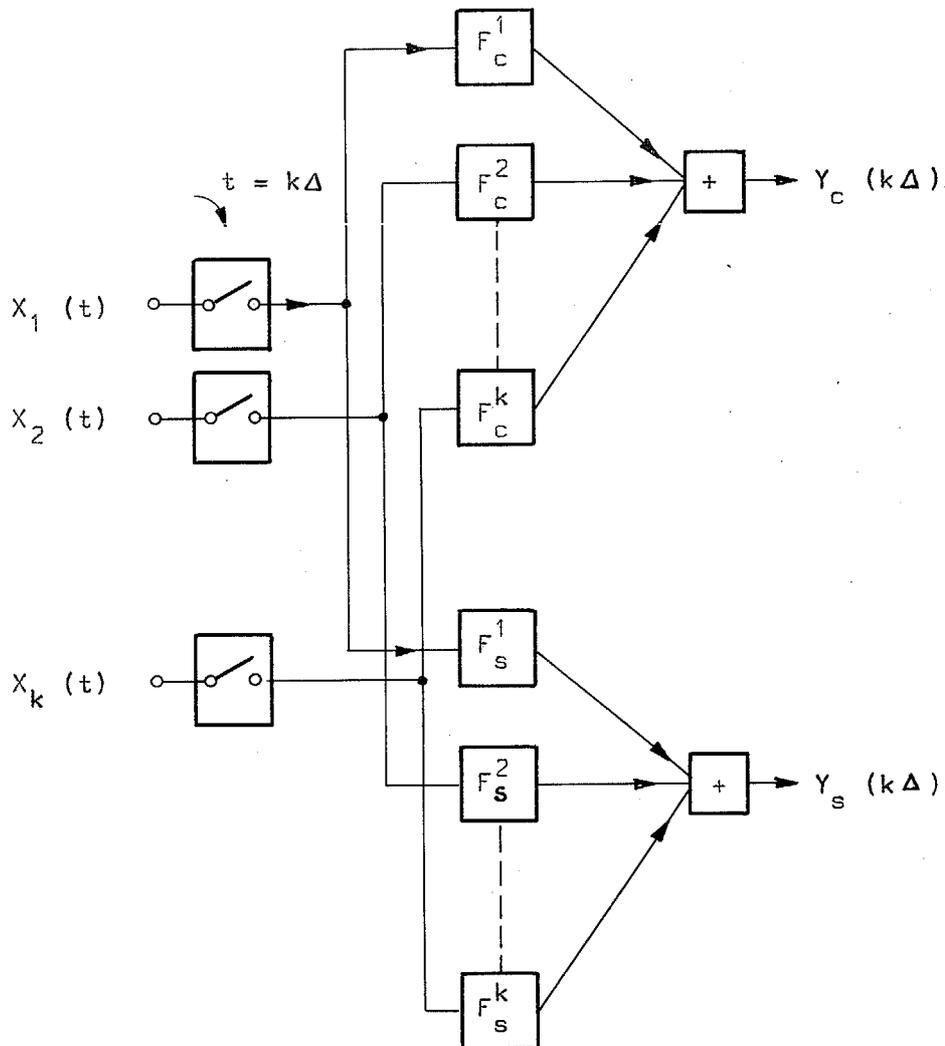


Fig. 5 - FILTRAGE OPTIMAL D'ANTENNE

SIMPLIFICATION DU FILTRAGE OPTIMUM D'ANTENNE

Les vecteurs  $\vec{S}_c$  et  $\vec{S}_s$  sont directement déduits des composantes en quadrature  $S_c(t)$  et  $S_s(t)$  du signal  $s(t)$ .

En posant

$$(27) \quad \{S_e\} = (S_e(\Delta), S_e(2\Delta), \dots, S_e(L\Delta)), \quad e = c, s$$

les vecteurs  $\vec{s}_c$  et  $\vec{s}_s$  ont pour expression

$$(28) \quad \vec{S}_e^T = ( \underbrace{\{S\}, \dots, \{S\}}_K ), \quad e = c, s.$$

Comme nous avons simplifié le récepteur de la figure 3, le filtre optimum d'antenne, décrit par la figure 5, peut être simplifié. Sans démonstration, nous donnons ici le résultat de cette simplification illustré par la figure 6. Le filtre optimum d'antenne ainsi obtenu, après simplification, n'est plus constitué que d'une seule batterie de K filtres (Filtrage propre aux bruits) suivie des deux filtres homogènes de réponse  $S_c(k\Delta)$  et  $S_s(k\Delta)$  (Filtrage propre aux composantes en quadrature du signal). Le filtrage propre aux bruits, constitué de K filtres de  $2\gamma + 1$  coefficients, est défini par le vecteur

$$(29) \quad \tilde{R}^{-1}(K, 2\gamma + 1) \cdot \tilde{M}(K, 2\gamma + 1) \cdot \vec{\delta}(2\gamma + 1),$$

en appelant  $\tilde{M}(K, L)$  la matrice colonne constituée de K matrices unité de type  $(L, L)$ .

Dans la pratique on peut ne pas avoir d'indications précises sur la valeur de  $\gamma$ , ou encore ne disposer que d'un nombre limité de coefficients pour chacun des K filtres d'entrée. Soit l ce nombre. Dans ce cas, nous proposons de mettre en oeuvre le filtrage propre aux bruits défini par le vecteur

$$(30) \quad \tilde{R}^{-1}(K, 1) \cdot \tilde{M}(K, 1) \cdot \vec{\delta}(1)$$



SIMPLIFICATION DU FILTRAGE OPTIMUM D'ANTENNE

Fig. 6

SIMPLIFICATION DU FILTRAGE OPTIMUM D'ANTENNE

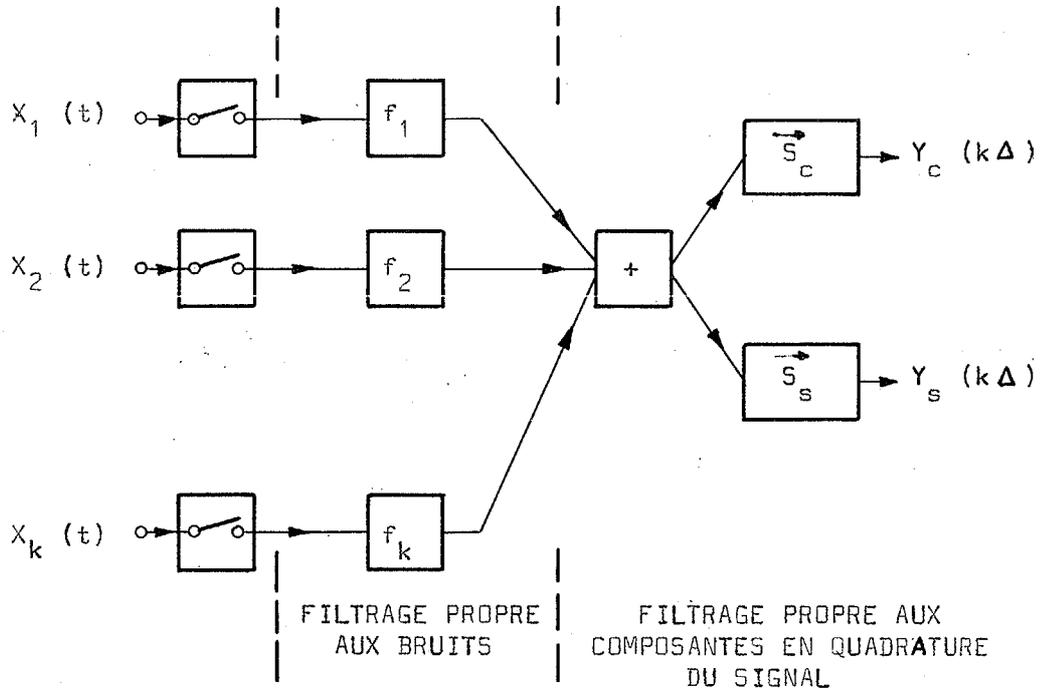
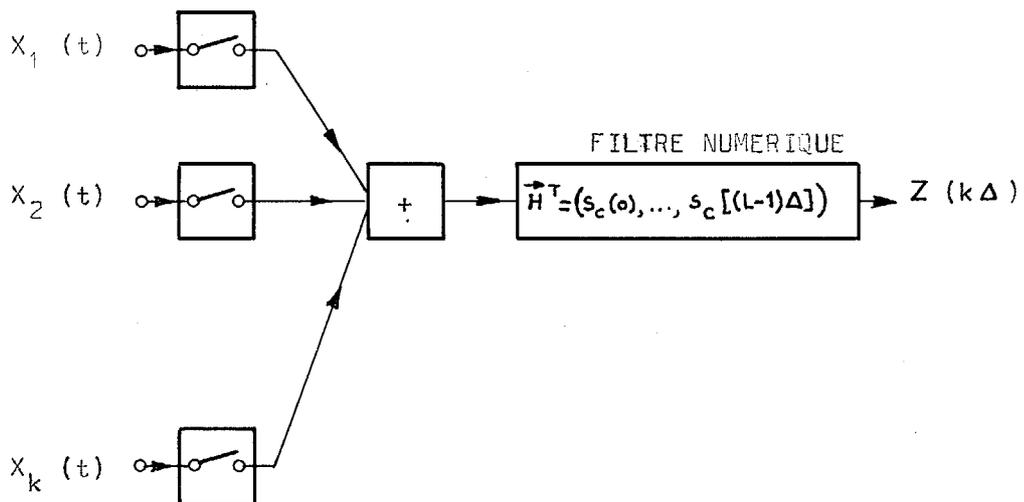


Fig. 7

FILTRAGE CLASSIQUE D'ANTENNE



## SIMPLIFICATION DU FILTRAGE OPTIMUM D'ANTENNE

---

L'exemple numérique suivant va nous permettre de montrer que, malgré son caractère suboptimum (car  $1 < \gamma$ ), le filtre précédent donne des résultats excellents.

### Description du problème considéré.

Nous avons choisi d'illustrer la détection d'un signal certain  $s(t)$  de phase et de temps d'arrivée inconnus, à l'aide d'une antenne composée de quatre capteurs disposés linéairement ( $K=4$ ) et suivi d'un filtrage d'antenne conforme à la figure 6. Chaque capteur est suivi d'un filtre numérique de 10 coefficients ( $l=10$ ), (filtrage propre au bruit).

Le pas d'échantillonnage  $\Delta$  vaut  $15 \mu\text{s}$ . La durée totale de l'intervalle d'observation  $(0, \oplus)$ , est de  $24 \text{ ms}$  (1600 échantillons).

Nous avons choisi comme signal  $s(t)$  un signal sinusoïdal sur un intervalle de temps fini, égal à  $3 \text{ ms}$  (200 échantillons).

Le bruit reçu par chacun des capteurs est la somme de deux bruits d'origines différentes : un bruit ambiant omnidirectionnel, et un bruit appelé bruit dirigé, engendré par un brouilleur.

Les composantes de bruit ambiant de deux capteurs distincts sont supposées non corrélées. Chacune de ces composantes est une réalisation d'un processus aléatoire gaussien, stationnaire, centré, de spectre uniforme dans la bande  $\left[-\frac{1}{2\Delta}, \frac{1}{2\Delta}\right]$  c'est-à-dire, dans la bande allant de  $-33,3 \text{ kHz}$  à  $+33,3 \text{ kHz}$ , et nul en dehors.



SIMPLIFICATION DU FILTRAGE OPTIMUM D'ANTENNE

L'onde de bruit dirigé est supposée plane au niveau de l'antenne de réception. Le bruit émis par le brouilleur est à bande étroite.

La puissance moyenne du bruit total reçu par chacun des capteurs est égale à 1.

Compte tenu de ces bruits, le filtrage d'antenne considéré ne peut être optimum que si chacun des filtres d'entrée (filtrage propre aux bruits) est caractérisé par 50 coefficients environ. Nous avons choisi des filtres de 10 coefficients, le filtrage d'antenne simulé est par suite suboptimum.

Les propriétés spectrales et spatiales des bruits reçus sont supposées inconnues du récepteur. L'algorithme suivant lui permet de construire itérativement le vecteur (30)

$$(31) \quad \vec{H}_{j+1} = \vec{H}_j + \mu_j (-\vec{N}_j \vec{N}_j^T \vec{H}_j + \underline{M}(K,1) \vec{\delta}(1)), \quad j=1,2,\dots$$

( $\vec{H}_j$  est un vecteur de  $4 \times 10 = 40$  coordonnées,  $\vec{N}_j$  est conforme à (25) pour  $L = 1 = 10$ ),

$$\vec{H}_j \xrightarrow{\text{p.s.}} \underline{R}^{-1} (4,10) \underline{M} (4,10) \vec{\delta} (10).$$

Nous avons simulé :

- le fonctionnement de l'algorithme (31) ;
- le fonctionnement du filtrage d'antenne en calculant  $|Y_c(k\Delta)|$  et  $\sqrt{Y_c^2(k\Delta) + Y_s^2(k\Delta)}$  ;
- et enfin, le fonctionnement du filtrage d'antenne classique décrit par la figure 7 en calculant la sortie  $|Z(k\Delta)|$ . Ce filtre d'antenne est en fait le filtre optimum dans le cas où les bruits reçus par les divers capteurs



## SIMPLIFICATION DU FILTRAGE OPTIMUM D'ANTENNE

---

sont de même loi, non corrélés et de spectre uniforme dans la bande  $\left[-\frac{1}{2\Delta}, \frac{1}{2\Delta}\right]$ . Il nous est ainsi possible de comparer le filtrage optimum d'antenne à ce dernier filtrage, utilisé ordinairement, et que nous appellerons classique.

Résultats. Le premier résultat est la facilité de mise en oeuvre de la simulation. Si nous n'avions pas utilisé la simplification proposée au § 2, nous aurions dû traiter des matrices de 4x200 lignes, c'est-à-dire des matrices de type (800,800). Grâce à cette simplification nous avons traité des matrices de type (40,40), ce qui a énormément réduit la mémoire occupée et le temps de calcul.

La planche 2, qui illustre la simulation, donne les résultats dans l'ordre qui suit :

- 1 - Renseignements principaux sur la simulation effectuée (fréquence, amplitude et durée du signal attendu, caractéristiques des bruits).
- 2 - Module de la transformée de Fourier discrète (T.F.D) du brouilleur.
- 3 - Module de la T.F.D. du bruit total reçu par le premier capteur.
- 4 - Forme de la suite des réels  $\mu_k$  (pas d'incrément) utilisée pour l'apprentissage.
- 5 - Tracé de la convergence du 6ème coefficient, et de la norme du vecteur  $\vec{H}_j$ .
- 6 - Tracé des signaux reçus par le 1er capteur avec indication du créneau de temps où le signal à détecter est présent.

SIMPLIFICATION DU FILTRAGE OPTIMUM D'ANTENNE

- 
- 7 - Réponse  $|Y_c(k\Delta)|$  appelée REPONSE-SIGNAL CERTAIN.
  - 8 - Réponse  $\sqrt{Y_c^2(k\Delta) + Y_s^2(k\Delta)}$  appelée REPONSE-PHASE INCONNUE.
  - 9 - Réponse  $|Z(k\Delta)|$  de l'antenne classique appelée REPONSE DU FILTRE SINUSOIDAL.

Dans le but de simplifier le dessin des tracés 2, 3, 7, 8 et 9, nous avons lissé les fonctions correspondantes à l'aide d'un filtre passe-bas. La planche 2 permet de constater que les suites d'échantillons  $\sqrt{Y_c^2(k\Delta) + Y_s^2(k\Delta)}$ , avant et après lissage, ont des tracés quasiment identiques.

On peut constater la convergence de l'algorithme d'apprentissage (31).

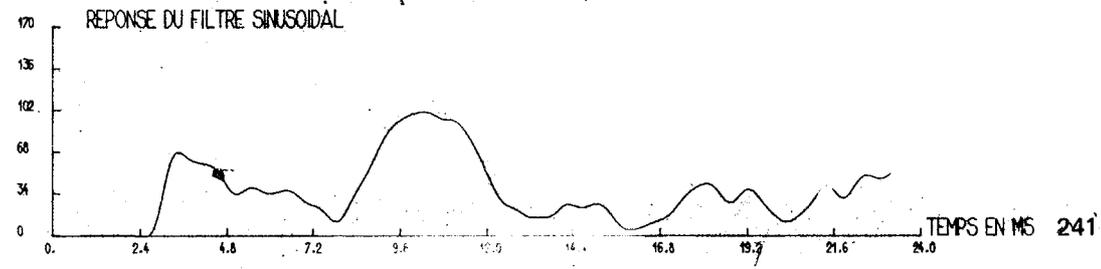
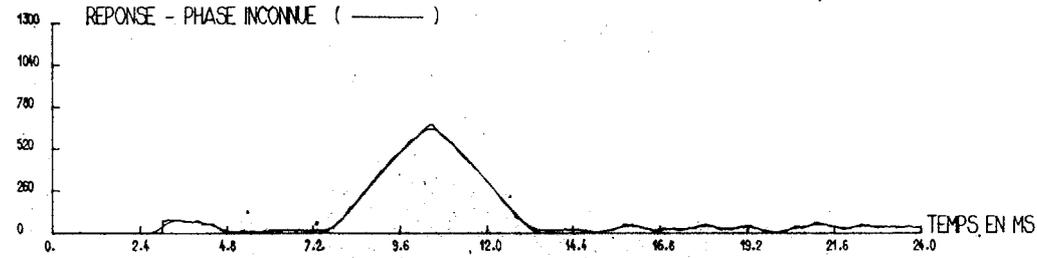
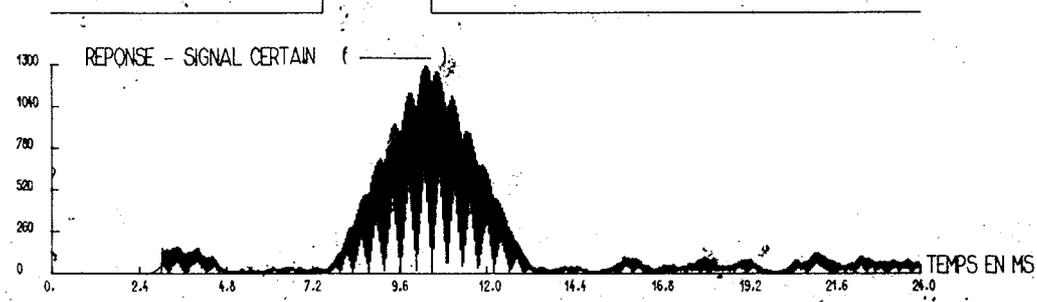
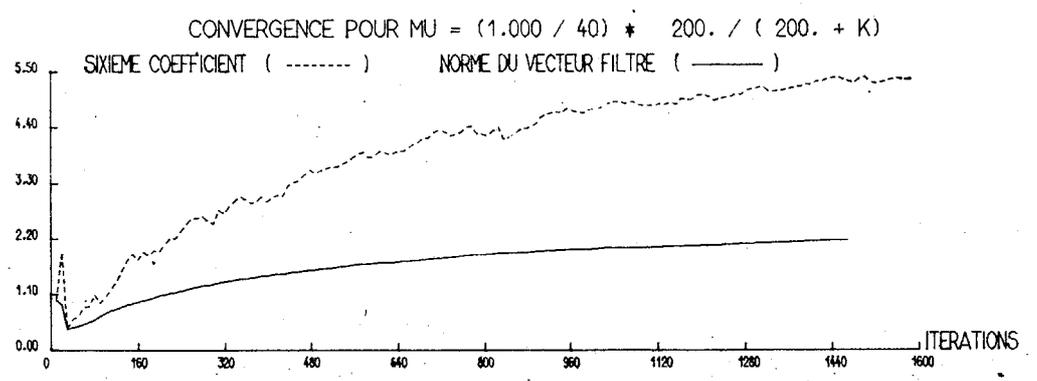
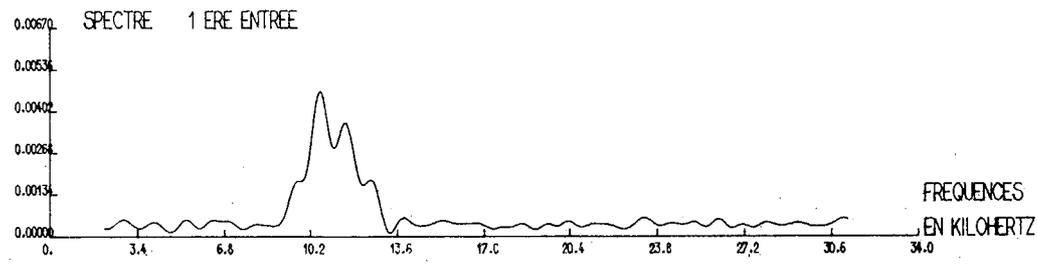
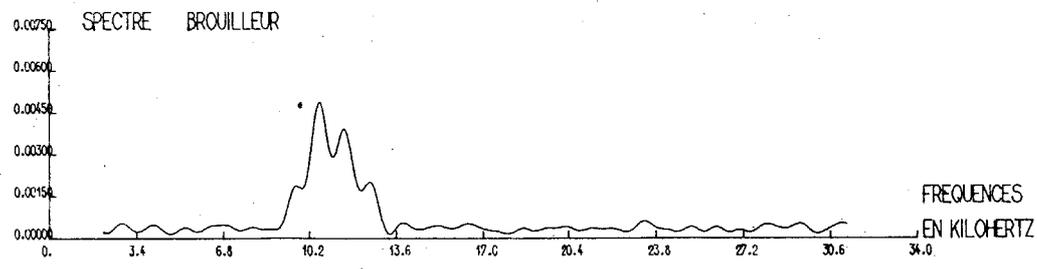
L'intérêt du filtrage d'antenne suboptimum par rapport au filtrage classique est illustré par les deux dernières figures de cette planche.

SINUSOIDE DE FREQUENCE 11500.HZ

AMPLITUDE .500  
 LONGUEUR DU SIGNAL A DETECTER : 200 ECHANTILLONS  
 PETITS FILTRES DE LONGUEUR 10 ECHANTILLONS  
 PAS D'ECHANTILLONAGE .150-04

BRUIT

BLANC  
 \* BRUIT DIRIGE DEPHASAGE DE 1 ECHANTILLONS FREQUENCE 11000. A 11500.  
 PUISSANCE RELATIVE 10.0





SIMPLIFICATION DU FILTRAGE OPTIMUM D'ANTENNE

5. - SIMPLIFICATION DU FILTRAGE OPTIMUM D'ANTENNE - CAS DE LA DETECTION PASSIVE (ESTIMATION).

Dans le cas de la détection passive le signal recherché  $s(t)$  est un p.a. centré, dont la fonction de corrélation  $\Gamma_s(\tau)$  peut être connue ou inconnue du récepteur.

Tout d'abord supposons connue la fonction de corrélation  $\Gamma_s(\tau)$  du signal  $s(t)$ . La structure de l'estimateur optimum, au sens du minimum de l'erreur quadratique moyenne [5], est illustrée par la figure 1. Cet estimateur est constitué par un filtrage numérique d'antenne caractérisé par le vecteur

$$(32) \quad \vec{H}_* = \tilde{R}^{-1}(K,L) \cdot \tilde{M}(K,L) \vec{\Gamma}_s ;$$

dans cette égalité

- l'entier  $L$  est tel que  $L\Delta$  est le temps de décorrélation du signal ( $\Gamma_s(\tau) \simeq 0, \forall |\tau| > L\Delta$ ) ;
- la matrice  $\tilde{R}(K,L)$  est la m.c. de type  $(KL, KL)$  du p.a. de dimension  $K$  observé en présence du signal  $s(t)$ .

Ce filtrage optimum d'antenne peut être simplifié conformément au principe décrit au § 2. Le résultat de cette simplification est illustré par la figure 8. Le filtrage ainsi obtenu est constitué d'un filtrage propre au p.a. observé (caractérisé par le vecteur  $\tilde{R}^{-1}(K,1)$   $\tilde{M}(K,1) \cdot \vec{\delta}(1)$  avec  $1 \leq L$ ) suivi d'un filtrage caractéristique du signal (caractérisé par le vecteur  $\vec{\Gamma}_s$ ).

L'intérêt du récepteur précédent est cependant limité car, dans la pratique, la fonction de corrélation  $\Gamma_s(\tau)$  du signal recherché est rarement connue.

SIMPLIFICATION DU FILTRAGE OPTIMUM D'ANTENNE

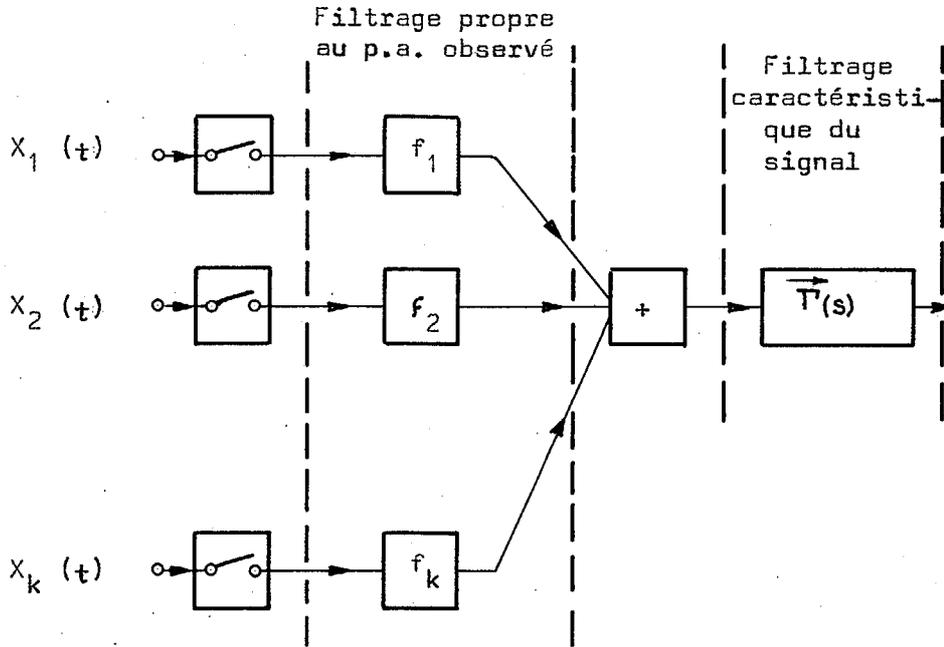


Fig. 8 - Détection passive ( $\Gamma_s(\tau)$  connue)

Simplification du filtrage optimum d'antenne

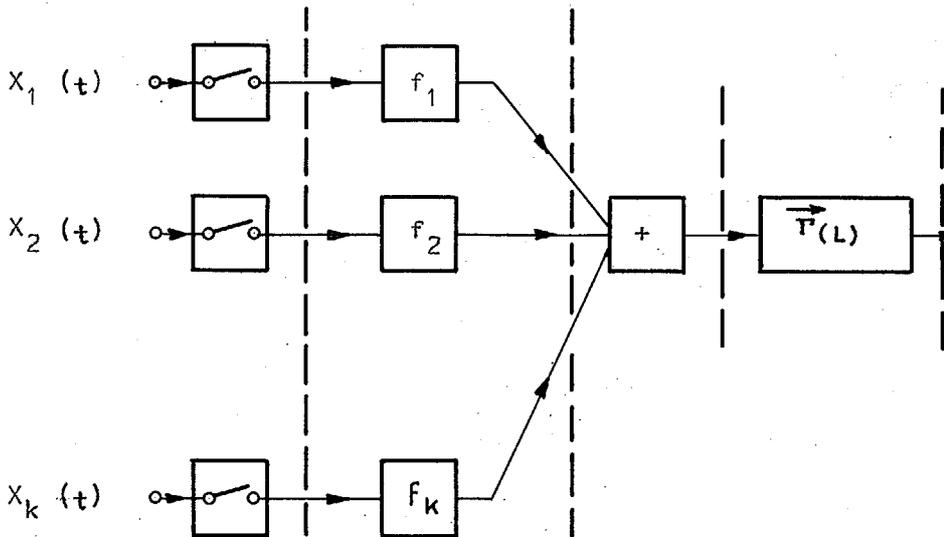


Fig. 9 - Détection passive ( $\Gamma_s(\tau)$  inconnue)

Simplification du filtrage optimum d'antenne



SIMPLIFICATION DU FILTRAGE OPTIMUM D'ANTENNE

A cause de cette contrainte, il est apparu nécessaire de concevoir un récepteur capable d'estimer un signal dont seule la direction est connue. Plusieurs auteurs ont étudié ce type de récepteur, et ont décrit [6] l'estimateur optimum, au sens du critère du minimum de la puissance moyenne du bruit en sortie, avec la contrainte d'une estimée égale au signal reçu lorsque celui-ci est seul présent sur les différents capteurs. Cet estimateur optimum est un filtrage numérique d'antenne, conforme à la figure 1, caractérisé par le vecteur

$$(33) \quad \vec{H}_* = \underline{\underline{R}}^{-1}(K,L) \underline{\underline{M}}(K,L) \cdot \vec{\Gamma}(L) \quad \text{avec}$$

$$(34) \quad \vec{\Gamma}(L) = \left( \underline{\underline{M}}^T(K,L) \underline{\underline{R}}^{-1}(K,L) \underline{\underline{M}}(K,L) \right)^{-1} \vec{\delta}(L).$$

Dans (33) la matrice  $\underline{\underline{R}}(K,L)$  est la m.c. de type  $(KL, KL)$  du p.a. de dimension  $K$  observé en présence du signal  $s(t)$ . On constate que  $\vec{\Gamma}(L)$  ne dépend pas de  $\vec{\Gamma}_s$ .

Cet estimateur optimum peut aussi être simplifié par la méthode proposée au § 2. Sa nouvelle structure est décrite par la figure 9. Par rapport à la figure 8,  $\vec{\Gamma}_s$  est remplacé par  $\vec{\Gamma}(L)$  qui est connu. Le filtrage propre au p.a. observé est identique à celui du cas précédent de détection passive ; il est caractérisé par le vecteur  $\underline{\underline{R}}^{-1}(K,1) \cdot \underline{\underline{M}}(K,1) \vec{\delta}(1)$  où l'entier  $1$  peut être choisi inférieur à  $L$ . Le filtre numérique caractéristique du signal  $s(t)$  est défini par le vecteur  $\vec{\Gamma}(L)$ , (34). Ces deux vecteurs peuvent être estimés par itérations à l'aide d'algorithmes du type (31).

SIMPLIFICATION DU FILTRAGE OPTIMUM D'ANTENNE6. - CONCLUSION.

Nous avons considéré les difficultés de réalisation des filtrages numériques optimums d'antenne qui nécessitent l'inversion d'une matrice de corrélation. Nous avons proposé une simplification de ces traitements destinée à faciliter leur mise en oeuvre. Cette simplification permet de décomposer un filtrage numérique optimum d'antenne en un filtrage propre au p.a. reçu sur les capteurs, suivi d'un filtre unique caractéristique du signal attendu.

La structure simplifiée des filtrages optimums d'antenne s'est révélée intéressante pour les raisons suivantes :

- le filtrage propre au p.a. reçu est identique pour la détection active ou l'estimation passive ;
- le nombre  $l$  de coefficients, de chacun des filtres qui suivent les capteurs, peut être pris relativement petit, en conservant un gain très grand par rapport à l'antenne classique ;
- la méthode de calcul (par exemple un algorithme adaptatif d'itération stochastique) permettant de construire le filtrage propre au p.a. observé est aisée à mettre en oeuvre car  $l$  est petit devant  $L$ . Notons que la construction du vecteur (30) serait pratiquement inconcevable sans la simplification proposée, car  $l = 10$  et  $L = 500$  en détection active.

Nous avons ainsi établi un résultat, très utile pour des réalisations pratiques, similaire du "filtrage propre" dans le cas des traitements analogiques [7].

SIMPLIFICATION DU FILTRAGE OPTIMUM D'ANTENNEREFERENCES

- [1] - C. MACCHI : "Itération stochastique et traitements numériques adaptatifs". Thèse d'état. Paris VI, 1972.
- [2] - C. MACCHI: "Structure de l'inverse d'une matrice de corrélation". C.R.A.S. (à paraître).
- [3] - SAKRISON D : "Communication Theory". Wiley, 1968.
- [4] - MACCHI C., MACCHI O. : "Détection optimale, adaptative d'un signal vectoriel de temps d'arrivée inconnu". Ann. des Télécom., Tome 26, n° 9-10, Sept-Oct. 1971.
- [5] - VAN TREES H. : "Optimum processing for passive sonar arrays". Proc. IEEE Ocean Electronics Symp. Honolulu, Hawaiï, 29-31 Aug. 1966, pp 41-65.
- [6] - BIENVENU G. et VERNET J.L. : "Enhancement of antenna performance by adaptive processing". Nato Advanced Study Institute on Signal Processing. 21 August-1er Sept. 1972, Loughborough (U.K).
- [7] - MERMOZ H. : "Extension de la méthode du filtrage adapté au cas de plusieurs entrées pour l'optimisation de la détection des signaux faibles. Filtrage adapté et directivité". Thèse d'état, (1964).