TROISIEME COLLOQUE SUR LE

TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

Nice 1er au 5 juin 1971

Modèles statistiques et traitement du signal
Mémoire et caractère markovien

A. BLANC-LAPIERRE

Université Paris XI

et

Ecole Supérieure d'Electricité

RESUME : On décrit rapidement divers modèles statistiques : modèles additifs dérivés de processus à accroissements indépendants et modèles markoviens. On compare la notion de mémoire et celle de caractère markovien. Enfin, on aborde le problème de savoir si une fonction de corrélation peut être fonction de corrélation d'un processus de Markov stationnaire.

SUMMARY : Various statistical models are roughly described : additive models derived from independent increment processes and markovian models.

The notion of memory and that of markovian character are compared.

Finally the question of whether a correlation function can be the correlation function of a stationary Markov process is dealt with.

Modèles statistiques et traitement du signal
Mémoire et caractère markovien

A. BLANC-LAPIERRE

I. INTRODUCTION. Les questions de traitement du signal ont, d'abord, reposé essentiellement sur la notion de rapport Signal/Bruit, largement employée dans les problèmes de transmission ou de sensibilité limite. Elles ont ensuite été rattachées à la théorie de l'estimation [estimation proprement dite (de paramètres - prévision - interpolation - ... etc.) ou tests (détection d'un signal dans un bruit, etc., ...)]. Simultanément, les types de bruits à considérer se sont révélés beaucoup plus divers : en particulier, l'hypothèse de stationnarité est apparue trop restrictive. De même, dans certains cas, le caractère gaussien. Des méthodes d'estimation adaptative se sont par ailleurs développées, en liaison avec l'automatique. Du coup, l'ensemble des modèles statistiques employés s'est étendu et, en tout cas, des modèles déjà utilisés ont été considérés sous un éclairage nouveau. Dans la première période, il s'agissait essentiellement de fonctions aléatoires (f.a. par abréviation) $X(t)$ définies comme sommes pondérées de contributions de phénomènes microscopiques indépendants (modèles de type I). Actuellement, on considère de plus en plus des f.a. $Y(t)$ liées à des systèmes dont l'évolution aléatoire résulte de la lutte entre une tendance vers l'équilibre (évolution libre) et l'effet antagoniste de perturbations aléatoires microscopiques (modèles de type II). Certaines fonctions aléatoires appartiennent d'ailleurs aux deux types. Nous ferons ici quelques remarques très générales à propos du type II après un bref rappel sur le type I.

II. MODELES DE TYPE I. Ils sont, de façon générale, définis par

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(t,\theta)\, dn\,(\theta) \qquad (2.1)$$

où $R(t,\theta)$ est une f.a. réelle de t et de θ , de loi connue, et où $n(\theta)$ est une f.a. à accroissements indépendants [densité $\rho(\theta)$], indépendante de R [f.a. de Wiener-Levy (f.a.W.L.) ou dérivée d'une distribution de Poisson (f.a.P.), c'est-à-dire que $dn(\theta)$ est le nombre d'instants poissonniens sur $d\theta$] . Ces modèles ont été largement étudiés [cf, par exemple, (1), p. 143 et suiv. et (2), p. 39 et suiv.] ainsi que leurs cas d'applications. Par exemple, avec R aléatoire, on traite les effets de scintillation et les fluctuations dans l'amplification par émission secondaire ; en conditionnant $n(\theta)$, c'est-à-dire en prenant sa densité $\rho(\theta)$ aléatoire (ce qui d'ailleurs détruit le caractère à accroissements indépendants de n), on a un bon modèle pour l'étude de certaines fluctuations en optique (3). Sous sa forme la plus simple [$R = R(t-\theta)$ certain et $\rho = \rho_c$], le modèle (2.1) est celui de l'effet Nyquist ou de l'effet de grenaille stationnaire. Ses propriétés statistiques sont alors très simples. On connaît l'établissement du caractère gaussien lorsque $\rho_0 \nearrow +\infty$. On sait aussi, dans une large mesure, suivre les transformations de X(t) à travers des chaînes comportant successivement des transformations non linéaires instantanées et des filtres linéaires [cf, par exemple, fig (2.1)]. La situation se complique très sérieusement si les transformations qui, ci-dessus, interviennent successivement et séparément, s'interpénètrent comme c'est, par exemple, le cas suggéré par la fig. (2.2) où la correspondance entre u(t) et v(t) est régie par

$$C\,\frac{dv}{dt} + \frac{v(t)}{R} = f\left\{u(t) - v(t) - L\left(C\,\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{R}\,\frac{dv}{dt}\right)\right\} \qquad (2.2)$$

v(t) apparaît alors nécessairement comme une f.a. liée au système ($\mathfrak{R}$, C, R, L) (dans son ensemble) excité par X(t). Nous sommes dans le point de vue II.

III. MODELES DE TYPE II.

A. NOTION D'ETAT. PROCESSUS DE MARKOV. La f.a. Y(t) est alors supposée traduire l'évolution d'un système Σ déterministe - plus généralement, il pourrait être aléatoire - excité par une perturbation aléatoire X(t). L'état du processus Y(t) en t_o sera défini si l'on connaît un ensemble ξ (fini ou infini) de paramètres $\xi_1(t_o), \ldots, \xi_k(t_o), \ldots$, tel que la connaissance de tous ces paramètres entraîne celle de $Y(t_o)$ et telle que l'on ait

Prob $\left[\mathcal{F}_{t_o} \mid \xi\right] \equiv$ Prob $\left[\mathcal{F}_{t_o} \mid \xi, \mathcal{P}_{t_o}\right]$ $\forall$ les événements

$\mathcal{F}_{t_o}$ et $\mathcal{P}_{t_o}$ intéressant respectivement le futur $(t > t_o)$ et le passé $(t < t_o)$ de Y(t) par rapport à t_o. La notion d'état est liée à celle de processus de Markov. Si cela est nécessaire, nous préciserons la nature de ce dernier en spécifiant, entre parenthèses, les paramètres d'état ξ. Par exemple, nous considèrerons :

a) - des processus de Markov (Y) où l'état est défini par Y(t)

b) - des processus de Markov $(Y, Y', \ldots, Y^{(n-1)})$ où l'état est défini par Y et ses (n-1) premières dérivées -éventuellement $n = \infty$

c) - des processus de Markov dans lesquels l'état en t_o est défini par la donnée de Y(t) sur $t_o - \Delta \leq t \leq t_o$.
Nous dirons qu'il s'agit de processus de Markov de "longueur" Δ. Comme en b) pour $n = \infty$, ces derniers mobilisent, en général, une infinité dénombrable de paramètres d'état : par exemple, si l'on veut, les coefficients de Fourier de Y(t) sur $]t_o - \Delta, t_o]$.

L'évolution du système, à partir de t_o quelconque, sera supposée résulter des effets antagonistes de la tendance vers l'équilibre $\xi = \xi(\xi_o, t_o, t)$ et de perturbations aléatoires liées à une f.a. X(t) donnée indépendamment du système, et qui déclanchent, continuement ou à des instants discrets, des changements de trajectoires de retour [cf fig. (3.1)], les perturbations intervenant entre t et $t + \Delta t$ ne dépendant, en ce qui concerne X(t), que de ses valeurs dans ce même intervalle. Naturellement, Y sera stationnaire si $\xi(\xi_o ; t_o, t) = \xi(\xi_o, t - t_o)$ et si X(t) est lui-même stationnaire.

Exemples - 1° - Processus de Markov (Y)

α) basculeur poissonnien

β) $Y(t) = \sum R(t - t_j)$ avec $\{t_j\}$ poissonniens [densité $\rho(t)$ et $R = \exp[-(t - t_j)]$ pour $t > t_j$ et $R = 0$ pour $t < t_j$. Si $\rho(t) = \rho_o$, c'est un processus stationnaire et $Y'(t) = Y(t) - E\{Y(t)\}$ a alors comme fonction de corrélation (f.c. par abréviation) $(\rho_o / 2)\, e^{-|\tau|}$.

γ) Réservoir recevant une pluie poissonnienne avec orifice au point bas [cf (1) p. 31]

2° - Processus de Markov (Y.Y'). Même définition que β) ci-desus, mais avec

$R(\theta) = e^{-\theta} \sin 2\pi\nu_o\theta$ pour $\theta > 0$ et 0 pour $\theta < 0$

B. NOTION DE MEMOIRE. Nous dirons qu'une f.a. Y(t) est de mémoire limitée à m si, I_1 et I_2 étant deux intervalles quelconques, finis ou non, distants d'au moins m [cf fig (3.2) où, à titre d'exemple, I_1 et I_2 sont, l'un et l'autre, infinis], il y a, pour Y(t), indépendance entre I_1 et I_2. Le fait d'être à mémoire limitée donne, pour Y(t), des facilités considérables pour établir certaines propriétés ergodiques ou certaines convergences vers un régime gaussien. En effet, en ne conservant dans $\int_0^T Y(t)\,dt$ que la contribution d'intervalles de longueur km séparés par des tranches de longueur m [$T = N(k+1)\, m$], on met, pour T grand, cette intégrale sous forme de la somme d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes et, cependant, pour $k \gg m$, on la perturbe peu en valeur relative.

Notons, tout de suite la différence qui, dès l'abord, existe entre un processus de Markov de longueur m et un processus de mémoire limitée à m. Dans le 1er cas, il s'agit de l'indépendance de I_1 et I_2, conditionnelle lorsque Y est connu sur tout l'intervalle m (comme suggéré par la courbe en +++ de la figure (3.2)). Dans le second, il s'agit d'une indépendance marginale, c'est-à-dire lorsqu'on ne sait rien sur l'intervalle m.

Il est assez naturel de se poser la question suivante : A quelle condition les événements liés aux comportements respectifs de Y(t) dans I_1 ou dans I_2 peuvent-ils être indépendants conditionnellement à n'importe quel événement relatif à l'intervalle de séparation m (on ne sait rien dans m, ou bien : on connaît complètement Y(t) dans m, ou bien : on n'impose à Y(t) que certaines particularités dans m...) ? La réponse à cette question est la suivante : pour cela, il faut - et, naturellement, il suffit - que, ou bien I_1 soit indépendant de (m) x I_2, ou bien I_2 soit indépendant de (m) x I_1. (4)

En particulier, si Y(t) est stationnaire, alors il y a indépendance entre n'importe quels intervalles disjoints arbitraires, de sorte que $\int_0^t Y(t)\,dt$ est une f.a. à accroissements indépendants, ce qui, en fait, revient à dire que Y(t) résulte de la superposition d'une suite d'impulsions poissonniennes avec la dérivée (avec les précautions d'usage !) d'une f.a.W.L..

C. EXEMPLES ILLUSTRANT LA DIFFERENCE ENTRE LES FONCTIONS DE MARKOV ET LES FONCTIONS A MEMOIRE LIMITEE.

A - Premier groupe d'exemples : Processus de Markov de "longueur" Δ et processus à mémoire limitée à m.

Exemple α - Δ = m finis. Soient $\{t_j\}$ une suite stationnaire d'instants poissonniens (densité ρ_0) et n(m,t) le nombre de t_j tombant dans l'intervalle $]t-m, t]$. On pose $Y(t) = n(t,m) - \rho_0 m$.

On a $\Delta Y(t) = +1$ si t est un t_j et $\Delta Y(t) = -1$ si $t - m$ est un t_j [cf fig (3.3)]. La mémoire est, évidemment, limitée à m. D'autre part, le futur $t > t_o$ dépend des t_j contenus sur $]t_o - m, t_o]$; ils sont connus si on connaît Y sur le même intervalle. La f.c. du processus vaut $\rho_o [m - |\tau|]$ pour $|\tau| < m$ et 0 pour $|\tau| > m$.

<u>Exemple β - Δ fini, m infini</u> : $X(t) = X(t + \varphi)$ (3.1)

avec X(t) périodique de période T et φ équiparti sur (OT).

<u>Exemple δ - Δ infini, m fini</u>. Donnons un exemple de processus discret (que l'on pourrait, si on le désirait, rendre continu et stationnaire). Soit, d'abord, X(n) $[n = -\infty, \ldots, -1, 0, +1, \ldots, +\infty]$ une suite de variables aléatoires indépendantes dont chacune vaut + 1 ou - 1 avec équiprobabilité. Nous posons Y(n) = + 1 si X(n) = X(n - 1) = + 1 et Y(n) = 0 s'il n'en est pas ainsi [cf fig (3.4)]. Les Y(n) $(n > n_o)$ dépendent des X(m) $(m \geqslant n_o)$. Les Y(n) $(n < n_o)$ dépendent des X(m) $(m < n_o)$. La fonction Y(n) est donc telle que, pour elle, le futur par rapport à n_o est indépendant du passé, le présent n'étant pas pris en considération: <u>Y(n) est de mémoire limitée à l'ordre 1</u>.

<u>Montrons que, $\forall\ k > C$, la f.a.Y(n) n'est pas de Markov de "longueur" k</u>

a) Soit la condition (C_ℓ) : $Y(0) = +1,\ Y(1) = Y(2) = \ldots\ Y(\ell) = -1$ (3.2)

Posons $p_\ell^+ = \text{Prob}\left[X(\ell) = +1 \mid (C_\ell)\right]$ et $p_\ell^- = \text{Prob}\left[X(\ell) = -1 \mid (C_\ell)\right]$

L'ensemble des situations, pour $X(\ell)$ et $X(\ell + 1)$, en supposant (C_ℓ) rempli, est résumé dans le tableau de la figure (3.5), d'où découlent les relations :

$$p_{\ell+1}^+ = \frac{p_\ell^-}{p_\ell^+ + 2\,p_\ell^-} \qquad \text{et} \qquad p_{\ell+1}^- = \frac{p_\ell^+ + p_\ell^-}{p_\ell^+ + 2\,p_\ell^-} \qquad (3.3)$$

L'étude de $\eta_\ell = (p_\ell^+ / p_\ell^-)$ se fait commodément sur la relation

$$\eta_{\ell+1} = \left\{ 1 / \left[1 + \eta_\ell \right] \right\} \qquad (3.4)$$

η_ℓ converge de façon alternée vers la limite η_∞ égale à la racine positive de $x(1 + x) = 1$ soit, environ, 0,618.

b) Soit alors $k > 0$ qûelconque. Fixons $Y(1) = Y(2) \ldots = Y(k) = -1$ Si Y(n) était de Markov de "longueur" k, alors, les probabilités pour $n > k$ devraient être indépendantes de tout autre renseignement sur Y, relatif à $n \leqslant 0$. Ajoutons $Y(0) = +1$, alors, pour X(k), on aura des probabilités (p_k^+, p_k^-). Au lieu de $Y(0) = +1$, ajoutons $Y(-1) = +1$, $Y(0) = -1$, les probabilités, pour X(k), deviendront (p_{k+1}^+, p_{k+1}^-), différentes des précédentes. Or X(k) influe sur Y(n) pour $n = k + 1$. Donc, si grand que soit k, le processus n'est pas de Markov de "longueur" k.

Exemple - Δ et m infinis. Il suffit, partant du modèle γ, de changer comme suit la définition de Y(n). Pour chaque n, nous tirons au sort un entier $q(n) > 0$, non borné, obéissant à une certaine loi de probabilité $\mathcal{L}$. Nous supposons les q(n) indépendants les uns des autres et nous définissons Y(n) en faisant jouer à $X(n - q(n))$ et X(n) les rôles qui, en γ, étaient respectivement joués par X(n-1) et X(n). On note que $Y(n) = +1$ implique $X(n) = +1$. On en déduit aisément le résultat.

B - Deuxième groupe d'exemples - Processus de Markov (Y) de mémoire finie ou infinie.

Exemple - mémoire m finie. $\{t_j\}$ est une suite d'instants poissonniens (stationnaire). On se donne $a > 0$. A chaque t correspond un intervalle $[t_j(t), t_{j+1}(t)]$ qui le contient. On pose [cf fig (3.6)]

a) si $t_{j+1}(t) - t_j(t) \leqslant a$: $Y(t) = -t + t_{j+1}(t)$

b) si $t_{j+1}(t) - t_j(t) > a$: $Y(t) = -t + t_j(t) + a$ sur $[t_j(t), t_j(t) + a]$

$= 0$ sur $[t_j(t) + a, t_{j+1}(t)]$

On a manifestement $m = 2a$

Exemple β - $m = \infty$. Le basculeur poissonnien

IV. PROCESSUS DE MARKOV ET F.A. DU TYPE I

Il est intéressant de se demander à quelles conditions une f.a. du type (2-1), avec $R(t,\theta)$ certain, peut être de Markov (X). Nous devrons évidemment supposer $R(t,\theta) = 0$ pour $t < \theta$. Posons d'autre part :

$$X_{ab}(t) = \int_a^b R(t,\theta)\, dn(\theta) \tag{4.1}$$

Le caractère markovien (X) de $X(t)$ implique que les $dn(\theta)$ intervenant dans $X_{-\infty,t_o}(t)$, n'influencent le futur $t > t_o$ de $X(t)$ qu'à travers la seule valeur $X(t_o) = X_{-\infty,t_o}(t_o)$. Cela veut dire que si une réalisation particulière des $dn(\theta)$, sur $\theta < t_o$, conduit à une certaine valeur de $X_{-\infty,t_o}(t_o)$ et à une évolution libre $X_{-\infty,t_o}(t)$ pour $t > t_o$, cette évolution libre est valable pour toute autre réalisation des $dn(\theta)$, sur $\theta < t_o$, sous la seule condition qu'elle redonne le même $X_{-\infty,t_o}(t_o)$. Si, en particulier, on multiplie tous les $dn(\theta)$ $(-\infty < \theta < t_o)$ par K, on multipliera par le même facteur et $X(t_o)$ et $X_{-\infty,t_o}(t)$ pour $t > t_o$. D'où :

$$X_{-\infty,t_o}(t) = X(t_o)\Phi(t, t_o) \qquad t > t_o \tag{4.2}$$

Soit, maintenant, $t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3$. Supposons tous les $dn(\theta)$ nuls sur $t_1 < \theta \leqslant t_2$. On doit avoir :

$$X_{-\infty,t_1}(t_3) = X_{-\infty,t_1}(t_1)\,\Phi(t_3,t_1)$$

et

$$X_{-\infty,t_1}(t_3) = X_{-\infty,t_2}(t_3) = X_{-\infty,t_2}(t_2)\,\Phi(t_3,t_2)$$

$$= X_{-\infty,t_1}(t_2)\Phi(t_3,t_2) = X_{-\infty,t_1}(t_1)\Phi(t_2,t_1)\Phi(t_3,t_2)$$

D'où la relation classique

$$\Phi(t_3,t_1) = \Phi(t_3,t_2)\Phi(t_2,t_1) \quad \text{pour } t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3 \qquad (4.3)$$

De même, soit $\Gamma_X(t_1,t_2)$ la covariance de $X(t)$. On déduit immédiatement de ce qui précède que, pour $t_1 \leqslant t_2$, on a :

$$\Gamma_X(t_1,t_2) = E\left\{X_{-\infty,t_1}(t_1)\,X_{-\infty,t_1}(t_2)\right\} = E\left\{X^2(t_1)\right\}\Phi(t_2,t_1) \qquad (4.4)$$

De même encore, en considérant des $dn(\theta)$ bloqués en t_1 :

$$\Phi(t_2,t_1) = R\,(t_2,t_1) \qquad (t_2 > t_1) \qquad (4.5)$$

et

$$\Delta X(t) \approx X(t)\left\{\Phi(t+\Delta t,t) - 1\right\} + \Delta n(t) \qquad (4.6)$$

que l'on peut écrire - en introduisant, avec les précautions requises, les symboles $X'(t)$ et $\frac{dn}{dt}$, bien que ces dérivées n'existent pas en moyenne quadratique :

$$\left.\begin{aligned} &X'(t) = A(t)\,X(t) + \frac{dn}{dt} \\ &\text{avec} \\ &A(t) = \frac{\partial\Phi(t,u)}{\partial t\,(t=u+\varepsilon)} = \frac{\partial\Phi(t,s)}{\partial t\,\Phi(t,s)} \qquad \forall\, s < t \end{aligned}\right\} \qquad (4.7)$$

Toutes ces relations reposent sur le fait que $n(\theta)$ est à accroissements indépendants et n'impliquent pas le caractère gaussien de $X(t)$.

Faisons un changement d'horloge défini par

$$d\theta = -A(t)\,dt^{(+)} \tag{4.8}$$

Alors (4.7) devient :

$$\frac{\partial \Phi(\theta_2,\theta_1)}{\partial \theta_2} = -\Phi(\theta_2,\theta_1) \qquad \forall \theta_2 \geqslant \theta_1 \tag{4.9}$$

D'où

$$\Phi(\theta_2,\theta_1) = e^{-(\theta_2-\theta_1)} \quad \forall\, \theta_2 \geqslant \theta_1 \tag{4.10}$$

La fonction $\Phi(t_2,t_1)$ se déduit donc de $e^{-(\theta_2-\theta_1)}$ par changement d'horloge. Naturellement, la densité $\rho(t)$ du processus à accroissement indépendant doit alors être remplacée par $\rho(\theta) = \rho(t)\frac{dt}{d\theta}$ et $X(\theta)$ ne sera stationnaire que si $\rho(\theta)$ est constant.

Processus $X(t)$ stationnaires - Le processus sera stationnaire si $A(t)$ et $\rho(t)$ sont constants $[A(t) = -a\ ;\ \rho(t) = \rho_o]$. On a alors :

$$\Phi(t_2,t_1) = e^{-a(t_2-t_1)} \qquad \text{pour } t_2 > t_1 \tag{4.11}$$

Ce processus est, en faisant $a = 1$, celui de l'exemple β de processus de Markov (Y) de la page . C'est le seul processus stationnaire de Markov (Y) qui soit du type (2.1). Sa fonction de corrélation est de la forme

$$C_X(\tau) = [\rho_o / 2]\, e^{-a|\tau|} \tag{4.12}$$

Il s'agit là d'un processus de mémoire infinie. Le cas d'un processus stationnaire de Markov $(X, \ldots, X^{(n-1)})$ se ramène à celui d'un processus vectoriel Z à n dimensions $(X, \ldots X^{(n-1)})$ markovien (Z)

(+) Le signe "moins" traduit l'effet d'un amortissement.

V. CONDITION POUR QU'UNE FONCTION DE CORRELATION $C(\tau)$ PUISSE ETRE F.C. D'UNE F.A. SCALAIRE Y MARKOVIENNE (Y)

Nous avons vu que si l'on imposait à Y d'être du type (2.1), il n'y avait qu'une f.c. possible : celle définie par (4.11). On peut alors se poser la question suivante : si on renonce à la condition $Y \in (2.1)$, alors, quelle est la condition pour qu'une f.c. C puisse être celle d'une f.a. scalaire Y markovienne (Y)? Cette question présente de l'intérêt du point de vue mathématique et aussi du point de vue pratique puisque les méthodes d'optimisation quadratique reposent sur la donnée de la f.c.. Il est donc important de savoir si, à une fonction de corrélation donnée, on peut associer un processus Y(t) markovien (Y). Il ne semble pas que le problème posé soit résolu actuellement. Nous nous bornerons à quelques remarques :

1° - Soit $Y(t) = A \sin (2\pi \nu_o t + \varphi)$ (4.13)
où A et ν_o sont certains, φ étant une v.a. équipartie entre 0 et 2π. La connaissance de $Y(t_o)$ ne définit pas complètement Y(t) pour $t > t_o$. Il faut encore connaître le signe de $Y'(t_o)$. Y(t) est donc markovien (Y,Y'). Il en serait de même si A était aléatoire, indépendant de φ, ou si, A étant fixé, ν_o était aléatoire et indépendant de φ.

2° - Il résulte du 1° que la f.c. $C_Y(\tau) = E\{A^2\} \cos 2\pi\nu_o\tau$, pour laquelle Y(t) est p.s. de la forme (4.13), n'est pas f.c. d'une f.a. Y(t) markovienne (Y). Nous dirons qu'elle appartient à $C_{\cancel{M}}$ et la remarque ci-dessus montre que $C_{\cancel{M}}$ n'est pas vide.

3° - Il résulte aussi de cette même remarque qu'à toute f.c. $C_Y(\tau)$ on peut associer au moins une f.a. stationnaire qui n'est pas de Markov (Y) : il suffit de prendre (4.13) où ν_o est une v.a. dont la fonction de répartition est la fonction de répartition spectrale normée correspondant à C_Y et où on a $A=\sqrt{C_Y(0)}$.

4° - Généralisons. Soit une f.a. strictement stationnaire telle que

$$Y(t) = \sum_{1}^{K} r_k \cos (2\pi \nu_k t + \varphi_k) \qquad (4.14)$$

où les ν_k sont certains et où les r_k et les φ_k sont aléatoires (spectre de raies). Il résulte d'un théorème sur l'analyse harmonique des fonctions aléatoires de ce type [cf (1), p. 420 et suivantes] que Y(t) dépend au moins d'un nombre de variables aléatoires indépendantes égal à l'ordre p de la base de $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k)$. p est le nombre d'éléments d'un sous ensemble $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ des ν_k, tel qu'il n'existe aucun système d'entiers non tous nuls $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ satisfaisant à $\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \ldots \alpha_p \lambda_p = 0$. Si Y(t) est de Markov, il le sera donc au moins d'ordre p. D'où la possibilité de construire d'autres f.c. $\in C_M$ (correspondant, il est vrai à des spectres de raies). On remarquera, par ailleurs, qu'il suffit de modifier extrêmement peu les ν_k pour faire varier p très largement dans les limites $1 \leqslant p \leqslant K$. On voit donc que des modifications extrêmement faibles des propriétés du second ordre pourront, dans le cas considéré, perturber considérablement le caractère markovien.

5° - Enfin, on notera qu'un processus de Markov (Y) n'a pas de dérivée à moins que celle-ci soit p.s. nulle. Ceci impose évidemment une limitation à la classe C_M.

Bibliographie

(1) Théorie des fonctions aléatoires par A. Blanc-Lapierre et R. Fortet - (1953) - Masson Editeur - Paris.

(2) Modèles statistiques pour l'étude de phénomènes de fluctuations par A. Blanc-Lapierre, G. Bonnet, P. Faure, H. Mermoz et B. Picinbono (1963) - Masson Editeur - Paris.

(3) Photoelectrons shot noise par B. Picinbono, C. Bendjaballah et J. Pouget. Journal of Mathematical Physics (vol. 11, N° 7, Juillet 1970).

(4) Sur un problème d'indépendance par A. Blanc-Lapierre et A. Tortrat - C.R.A.S. - t. 272 - p. 328 (1971).

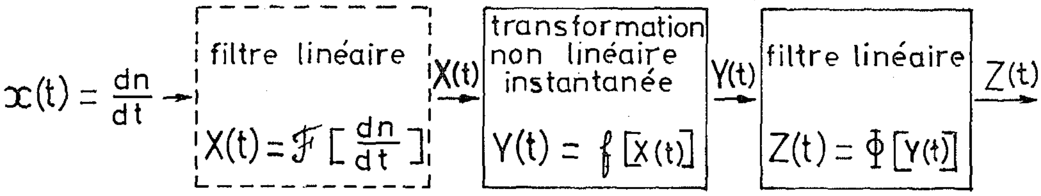

Fig. (2 - 1)

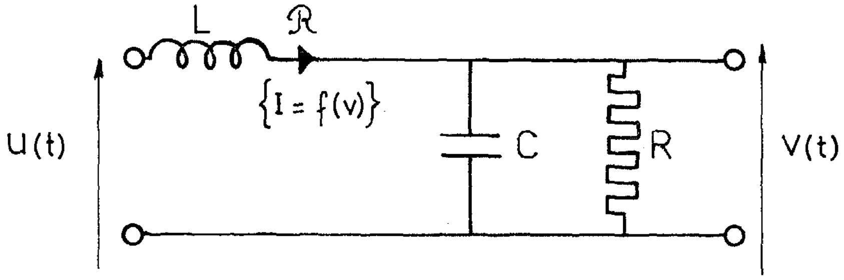

Fig. (2-2)

$$C\frac{dv}{dt}+\frac{V(t)}{R} = f\left\{u(t)-v(t)-L\left(C\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{1}{R}\,\frac{dv}{dt}\right)\right\}$$

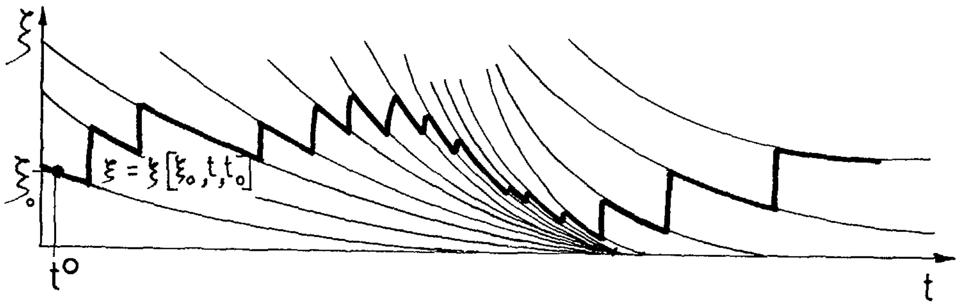

Fig. (3 - 1)

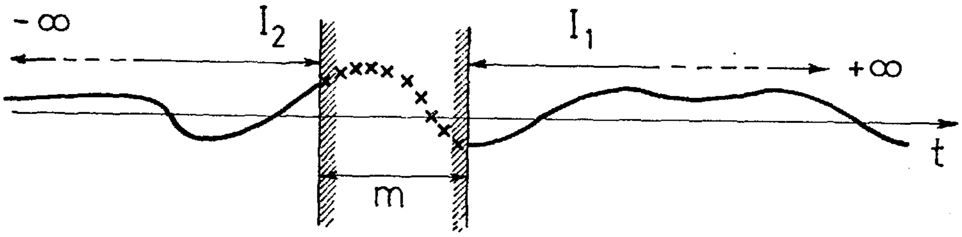

Fig. (3 - 2)

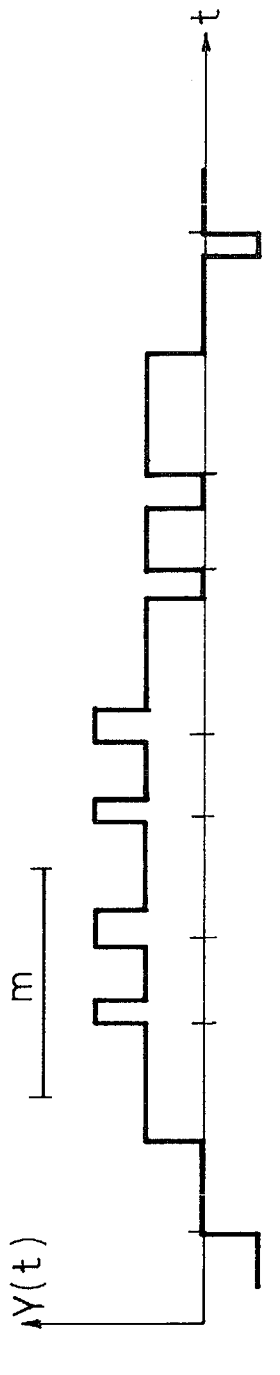

Fig. (3 - 3)

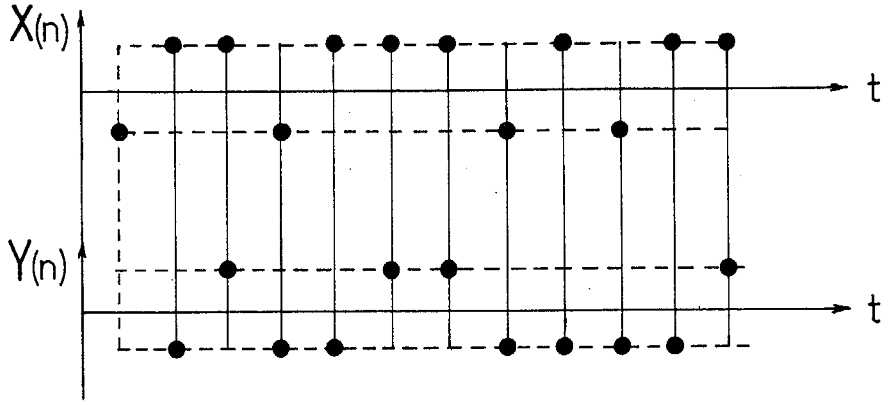

Fig. (3- 4)

$X(l)$	$X(l+1)$		
$+1$	$+1$	(C_{l+1}) non remplie	$Pr = \frac{1}{2} p_l^+$
$+1$	-1	(C_{l+1}) remplie	$Pr = \frac{1}{2} p_l^+$
-1	$+1$	(C_{l+1}) remplie	$Pr = \frac{1}{2} p_l^-$
-1	-1	(C_{l+1}) remplie	$Pr = \frac{1}{2} p_l^-$

Fig. (3-5)

$$p_{l+1}^+ = \frac{p_l^-}{p_l^+ + 2p_l^-} \qquad p_{l+1}^- = \frac{p_l^+ + p_l^-}{p_l^+ + 2p_l^-}$$

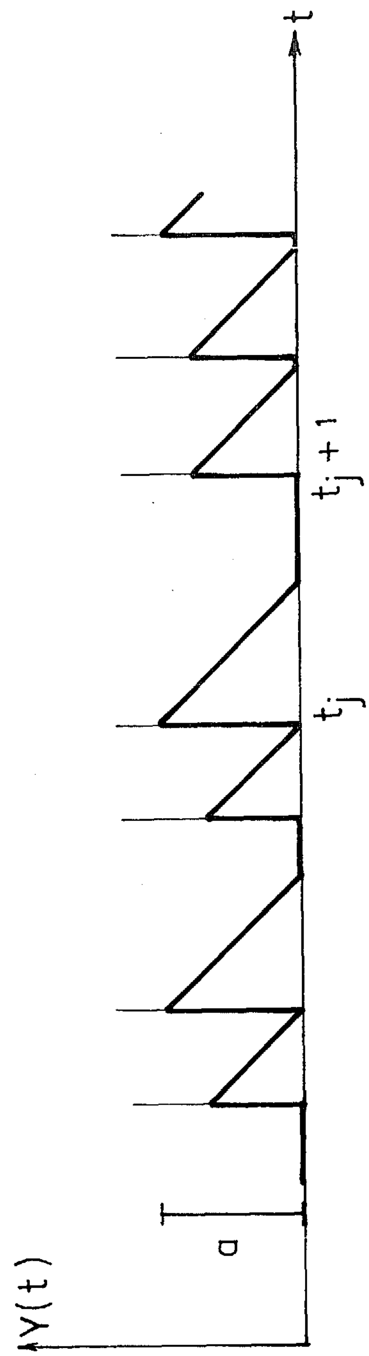

Fig. (3-6)