TROISIEME COLLOQUE SUR LE

TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

Nice 1er au 5 juin 1971

SUR UNE NOUVELLE METHODE D'INVERSION REELLE DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE.

Paul FILIPPI, Chargé de Recherche, C.N.R.S.- C.R.P.- Marseille.

RESUME

On propose une méthode d'inversion réelle de la transformation de Laplace faisant intervenir l'intégrale de la fonction à inverser : on obtient une suite convergente d'approximations. La méthode semble très stable. Des exemples sont donnés.

SUMMARY

A method of real inversion of the Laplace transform is given which uses the integral of the function to be inverted : a convergent sequence of approximations is obtained. The method seems to be very stable. Some examples are given.

SUR UNE NOUVELLE METHODE D'INVERSION REELLE DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE.

par Paul FILIPPI, Chargé de Recherche, C.N.R.S.-C.R.P.- Marseille

INTRODUCTION -

De très nombreux auteurs se sont penchés sur cette question. Ils se sont toujours heurtés à une grande difficulté chaque fois qu'il était impossible d'utiliser la formule complexe d'inversion. Les méthodes les plus courantes (voir par exemple Bellman {1}) consistent à remplacer la relation intégrale

$$f(p) = p\int_0^\infty \varphi(t)\, e^{-pt}\, dt$$

par un système linéaire : pour cela on peut approcher l'intégrale par une somme d'un nombre fini de termes, ou approcher $\varphi(t)$ par un développement en série limitée. Dans tous les cas, on aboutit à des matrices qui sont mal conditionnées, car une perturbation relativement importante de $\varphi(t)$ entraîne une perturbation relativement faible de f(p). De ce fait, ces matrices ne peuvent plus être inversées avec précision. On doit donc se contenter de systèmes linéaires ne dépassant pas l'ordre 15 environ, ce qui donne une précision toujours très limitée.

D'autres auteurs, partant de la formule d'inversion de Post-Widder {2}, ont cherché des formules d'inversion approchées. C'est le cas de Delache {3} qui aboutit à des expressions approchées de $\varphi(t)$ en fonction de f(p) et de ses dérivées successives. Cette méthode est extrêmement agréable pour les premières approximations, puisqu'elle conduit à un procédé graphique : en traçant à la règle et au compas les tangentes en différents points de la courbe représentant la fonction image on peut obtenir la première approximation; en répétant le procédé on obtient les approximations suivantes. Mais cette méthode présente le même inconvénient que la précédente : elle est instable, et elle est très sensible au "bruit" pouvant entâcher d'erreur la fonction f(p) à inverser [f(p) doit tout d'abord être lissé].

Nous avons donc essayé de trouver une méthode ne présentant pas ces inconvénients : pour que le bruit se superposant à la vraie valeur de f(p) perturbe le moins possible le calcul de $\varphi(t)$, il est bon que l'inversion numérique se fasse par intégration (et non par dérivation) de la fonction donnée ; le problème de la stabilité semble pouvoir être résolu en utilisant des transformations intégrales inverses approchées dont le noyau se calcule de façon numériquement stable. Il semble que les résultats que nous avons obtenus répondent, en partie au moins, à ces deux exigences.

I.- PRINCIPE DE LA METHODE -

Il est calqué sur la méthode exposée dans [3].

Soit f(p) et $\varphi(t)$ reliées par :

(1) $$f(p) = p\int_0^\infty \varphi(t)\, e^{-pt}\, dt$$

On pose : $t = e^{\eta}$, $p = e^{-\xi}$

et (1) devient :

(2) $$f(e^{-\xi}) = K(\xi) * \varphi(e^{\xi})$$
$$K(\xi) = \exp\left[-e^{-\xi} - \xi\right]$$

Si $f(e^{-\xi})$ et $\varphi(e^{\xi})$ sont à croissance lente à l'infini, on peut appliquer à (1) la transformation de Fourier ; en posant

$$\hat{f}(\nu) = \mathcal{F} f(e^{-\xi}), \quad \hat{\varphi}(\nu) = \mathcal{F}\varphi(e^{\xi})$$

il vient :

(3) $$\hat{f}(\nu) = \Gamma(1 + 2i\pi\nu)\, \hat{\varphi}(\nu)$$

D'où

(4) $$\hat{\varphi}(\nu) = \frac{\Gamma(1-2i\pi\nu)}{\Gamma(1+2i\pi\nu)\,\Gamma(1-2i\pi\nu)}\hat{f}(\nu)$$

expression qui peut encore s'écrire :

(5) $$\hat{\varphi}(\nu) = \Gamma(1-2i\pi\nu)\prod_{p=1}^{\infty}\frac{(p-2i\pi\nu)(p+2i\pi\nu)}{p^2}\,\hat{f}(\nu)$$

en utilisant le développement de la fonction Γ en produit infini. Si on tronque ce produit aux n premiers termes il vient :

(6) $$\hat{\varphi}_n(\nu) = \Gamma(1-2i\pi\nu)\prod_{p=1}^{n}\frac{(p-2i\pi\nu)(p+2i\pi\nu)}{p^2}\,\hat{f}(\nu)$$

En prenant la transformation de Fourier inverse de (6) et en revenant à la variable t, on obtient la formule d'inversion approchée

(7)
$$\boxed{\begin{aligned} \varphi_n(t) &= \frac{1}{n!}\int_0^{\infty} e^{-\tau}\, L_n^{n+1}(\tau)\,\tau^n f\left(\frac{\tau}{t}\right) d\tau \\ L_n^{n+1}(\tau) &= \sum_{m=0}^{n}\frac{(2n+1)!}{(n+m+1)!\,(n-m)!}\,\frac{(-\tau)^m}{m!} \end{aligned}}$$

= polynôme de Laguerre.

Nous allons maintenant démontrer la relation (7) ; ensuite nous montrerons que $\varphi_n(e^{\xi})$ converge vers $\varphi(e^{\xi})$ dans $\mathcal{S}'$ (espace des distributions tempérées).

II.- DEMONSTRATION DE (7) ET CONVERGENCE -

II.1.- Démonstration de (7) -

En posant $t = e^{\xi}$, $\tau = e^{\eta}$ (7) s'écrit :

(8) $$\varphi_n(e^{\xi}) = \frac{1}{n!}\left[\exp(-e^{\xi})\,L_n^{n+1}(e^{\xi})\,e^{(n+1)\xi}\right] * f(e^{-\xi})$$

qui, par transformation de Fourier, devient :

$$\hat{\varphi}_n(\nu) = \hat{L}_n^{n+1}(\nu)\,\hat{f}(\nu)$$

$$\hat{L}_n^{n+1}(\nu) = \frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m!}\binom{2n+1}{n-m}\Gamma(n+m+1-2i\pi\nu)$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m!}\binom{2n+1}{n-m}\prod_{j=1}^{m}(j-2i\pi\nu)\prod_{j=m+1}^{m+n}(j-2i\pi\nu)\,\Gamma(1-2i\pi\nu)$$

(9) $$= \frac{1}{n!}\left\{\sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m!}\binom{2n+1}{n-m}(-1)^m\prod_{j=1}^{m}(2i\pi\nu-n-j)\right\}\prod_{j=1}^{n}(j-2i\pi\nu)\,\Gamma(1-2i\pi\nu)$$

Posons $2i\pi\nu = h + n$ h entier quelconque $> n + 1$; l'expression entre crochets dans (9) peut s'écrire (voir {4}) :

$$\{\ \} = \sum_{m=0}^{n}\binom{2n+1}{n-m}\frac{1}{m!}\frac{(h-1)!}{(h-1-m)!}$$

$$= \sum_{m=0}^{n}\binom{2n+1}{n-q}\binom{h-1}{q} = \binom{2n+1}{n}$$

Or on a :

$$\left[\prod_{j=1}^{n}\frac{j+2i\pi\nu}{j^2}\right]_{2i\pi\nu = h+n} = \frac{1}{(n!)^2}\frac{(2n+h)!}{(h+n)!} = \frac{1}{n!}\binom{2n+h}{n}$$

Donc :

(10) $$\hat{L}_n^{n+1}(\nu) = \prod_{p=1}^{n}\frac{(p-2i\pi\nu)(p+2i\pi\nu)}{p^2}$$

pour tout ν tel que

$$2i\pi\nu = h+n$$

Donc, les polynômes figurant dans les 2 membres de (10) sont égaux en une infinité de points ; ils sont donc égaux partout dans le plan complexe, sinon leur différence serait un polynôme de degré n ayant une infinité de zéros. Ce qui démontre (7).

II.2.- Démonstration de la convergence -

Posons :

$$\begin{cases} g_n(\nu) = \displaystyle\prod_{p=1}^{n} \frac{p^2+4\pi^2\nu^2}{p^2}\, \Gamma(1+2i\pi\nu) \\ G_n(\xi) = \mathcal{F}^{-1} g_n(\nu) \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_n^{-1}(\nu) = \displaystyle\prod_{p=n+1}^{\infty} \frac{p^2+4\pi^2\nu^2}{p^2} \\ R_n(\xi) = \mathcal{F}^{-1} r_n(\nu) \end{cases}$$

On peut alors écrire $\varphi_n(e^{\xi})$ sous la forme

(11) $$\varphi_n(e^{\xi}) = R_n(\xi) * \varphi(e^{\xi})$$

Or :

$$r_n(\nu) = \prod_{p=1}^{n} \frac{p^2+4\pi^2\nu^2}{p^2}\, \Gamma(1-2i\pi\nu)\Gamma(1+2i\pi\nu) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 .$$

puisque

$$\Gamma(1-2i\pi\nu)\Gamma(1+2i\pi\nu) = \lim_{n\to\infty} \prod_{p=1}^{n} \frac{p^2}{p^2+4\pi^2\nu^2}$$

On en déduit que

$$R_n(\xi) \longrightarrow \delta \quad \text{dans } \mathcal{S}'$$

ce qui démontre la convergence de $\varphi_n(e^{\xi})$ vers $\varphi(e^{\xi})$ dans $\mathcal{S}'$.

SUR UNE NOUVELLE METHODE D'INVERSION REELLE DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE.
par Paul FILIPPI.

III.- EXEMPLES -

Nous avons pris 2 types d'exemples. Dans le premier type on sait calculer analytiquement l'intégrale (7), et on a alors tracé la courbe représentant la fonction analytique obtenue ; dans le second type on a calculé l'intégrale par une méthode de Gauss à 144 points (cette méthode est mal adaptée à ce type d'intégrations ; nous verrons plus loin ce que nous envisageons).

a/ $$f(p) = e^{-ap} \longrightarrow \varphi(t) = Y(t-a)$$

L'intégrale (7) donne :

$$\varphi_n(t) = \frac{a^n t^{n+1}}{(t+a)^{2n+1}} \sum_{m=0}^{n} \frac{(2n-m)!}{m!\,(n-m)!} \left(\frac{t+a}{a}\right)^m \tag{12}$$

On a calculé cette expression pour n allant jusqu'à 300, et a = 0.1 et 1.0. On n'a pas constaté d'instabilité comme il s'en produit en procédant de même avec les expressions données par Delâche. Les résultats sont donnés fig. 1.

b/ $$f(p) = 1 - e^{-0.2p} + 0.2e^{-p} \longrightarrow \varphi(t) = [1 - Y(t-0.2)] + 0.2\,Y(t-1)$$

Cet exemple a été pris dans {3}. Les résultats obtenus à partir de (12) sont consignés fig. 2.

c/ Même exemple que b/ mais l'intégration est faite numériquement. Nous n'avons pas dépassé l'approximation d'ordre 20, car,au-delà, 144 points d'intégrations ne suffisent plus (fig. 3).

d/ $$f(p) = 1 - \frac{2\pi p}{p^2 + 4\pi^2} \longrightarrow \varphi(t) = 1 - \sin 2\pi t$$

Cet exemple est encore tiré de {3} ; et sur la figure 4 on a tracé les approximations d'ordre 10 et 20.

SUR UNE NOUVELLE METHODE D'INVERSION REELLE DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE.

par Paul FILIPPI.

IV.- CONCLUSION -

1°/ L'expression (7) donnant une approximation de $\varphi(t)$ par intégration de $f(\frac{T}{t})$ sera d'autant moins sensible au "bruit" de f(p) que ce dernier contiendra moins de fréquences basses. Il faut cependant pouvoir donner l'ordre maximum d'approximation que l'on peut utiliser en fonction du bruit pour que le $\varphi_n(t)$ calculé ne soit pas entâché d'une erreur gênante par rapport à ce qu'on aurait si on connaissait f(p) de façon parfaite.

Une étude utile sera donc : en fonction des caractéristiques d'un "bruit" donné f(p) et de l'ordre n, quelles sont les caractéristiques de sa transformée inverse approchée $\varphi_n(t)$?

2°/ Il semble que la méthode proposée soit très stable. Le fait qu'on ait pu atteindre l'ordre 300 dans les cas a/ et b/ semble le confirmer. Mais un argument plus sérieux est le fait que les polynômes de Laguerre se calculent par récurrence ; en général les processus de récurrence sont assez stables numériquement. Il est donc utile de voir si la stabilité constatée lors d'intégrations analytiques se confirme lorsqu'on fait une intégration numérique (jusqu'à l'ordre 20 sur les exemples cités, la concordance entre les 2 méthodes est parfaite).

3°/ Dans (7) on a à calculer une intégrale de la forme

$$\int_0^\infty f(t)\, e^{-t}\, t^n\, dt$$

Il est donc naturel d'utiliser pour un traitement numérique les 0 des polynômes de Laguerre $L_j^n(t)$ et les poids correspondants. On aura alors un résultat rigoureux chaque fois que f(p) est un polynôme d'ordre < 2j - 1. Mais il est aussi possible d'envisager un algorithme permettant d'obtenir un résultat rigoureux pour d'autres types de fonctions f(p) ; chaque problème particulier donnera lieu à une étude appropriée. De toutes façons il semble qu'on soit conduit

SUR UNE NOUVELLE METHODE D'INVERSION REELLE DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE.

par Paul FILIPPI.

à calculer des 0 de polynômes de Laguerre $L_j^n(t)$ pour n assez grand. La littérature dans ce domaine est abondante {5}, {6}, {7}, {8}, {9}, {10} mais des tables numériques plus complètes restent à faire.

- BIBLIOGRAPHIE -

{1} R.E. BELLMAN, R.E. KALABA & J.A. LOCKETT, "Numerical Inversion of the Laplace Transform", Am. Elsevier Pub. Comp. Inc., New-York, 1966.

{2} P.V. WIDDER, "The Laplace Transform", Princeton Univ. Press,1946

{3} Ph. DELACHE, Ann. Astrophys., 28, 1966, p. 109-112.

{4} M. ABRAMOWICZ, "Handbook of Mathematical Functions", National Bureau of Standards".

{5} D. BURNETT, Proc. Camb. Phil. Soc., 33, 1937, p. 359-362.

{6} G. TRICOMI, Ann. Mat. Pura & Appl. (4), 28, 1949, p. 263-289.

{7} Ph. RABINOWITZ & G. WEISS, Math. Tables Aids Comput., 13, 1959, p. 285-294.

{8} L. GATTESCHI, Atti. Acad. Sci. Torino el. Sci. fis., 98, n° 1 a, p. 113-124, 1963-64.

{9} P. CONCUS, D. CASSAT, G. JAEHNIG & E. MELBY, Math. Comp. U.S.A., 17, 1963, p. 245-256.

{10} T.S. SHAO, T.C. CHEN & R.M. FRANK, Math. Comp. U.S.A., 18, n°88, p. 598-616.

x x x x

SUR UNE NOUVELLE METHODE D'INVERSION REELLE DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE.

par Paul FILIPPI.

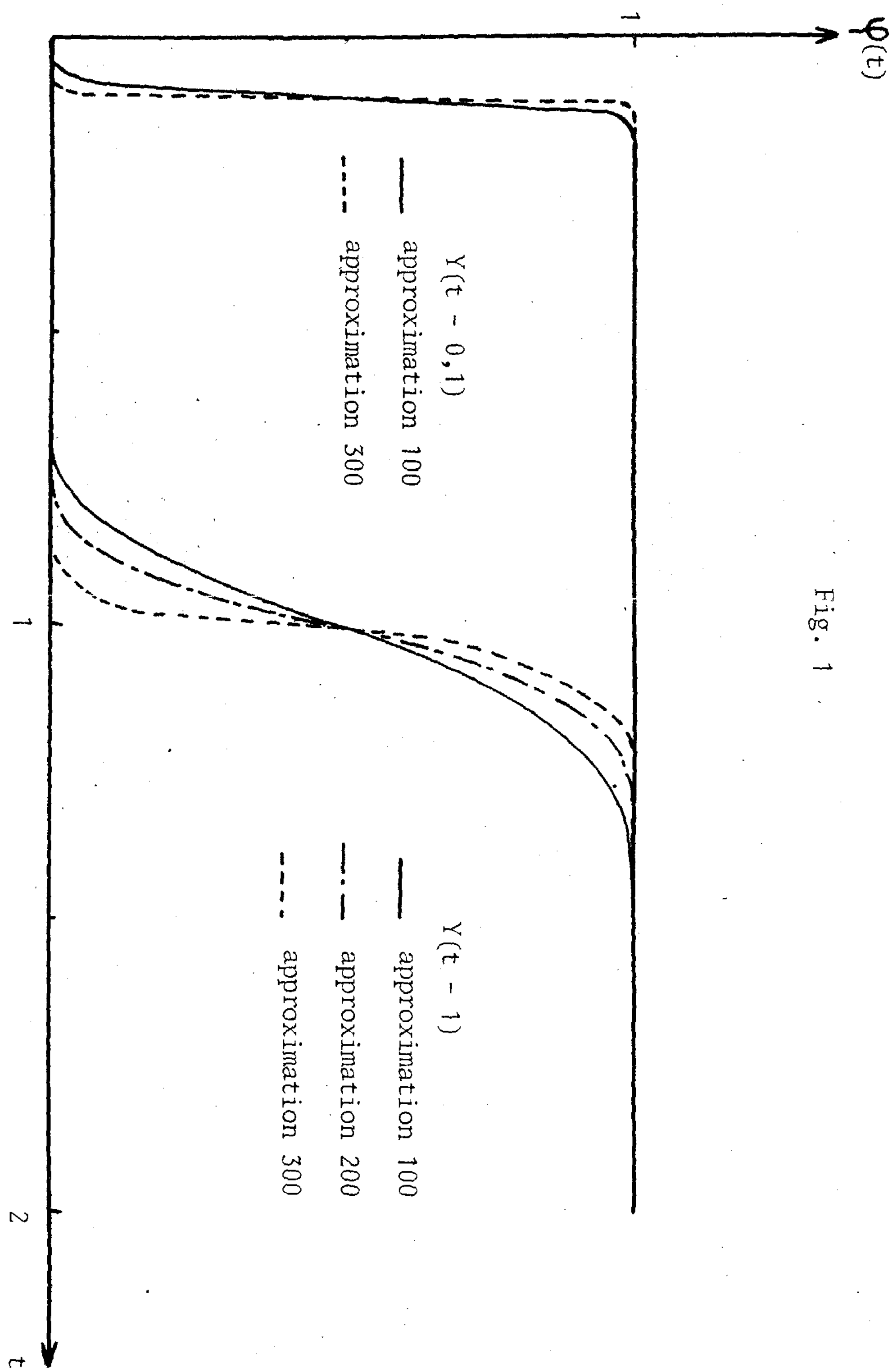

Fig. 1

SUR UNE NOUVELLE METHODE D'INVERSION REELLE DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE.

par Paul FILIPPI.

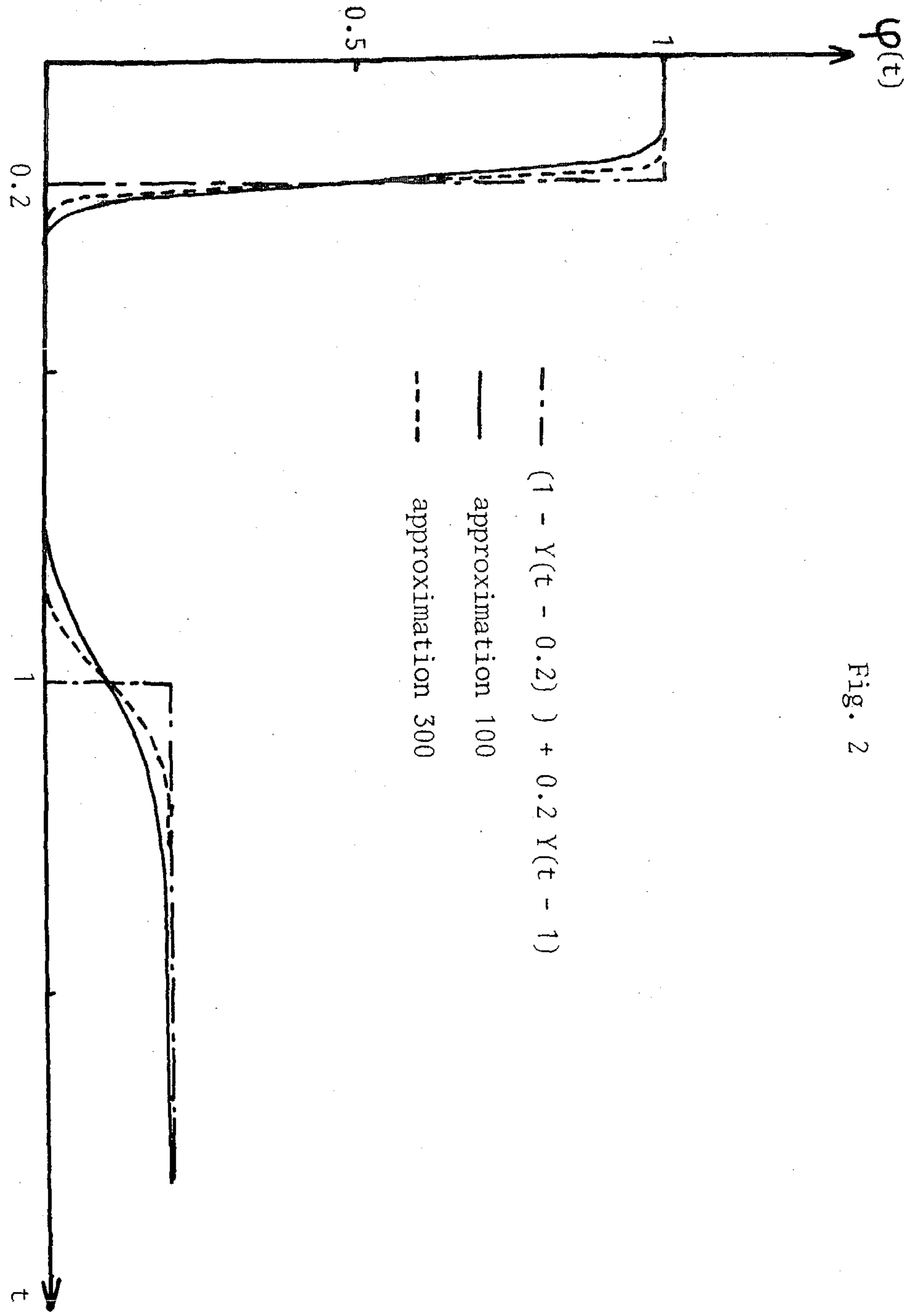

Fig. 2

SUR UNE NOUVELLE METHODE D'INVERSION REELLE DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE.

par Paul FILIPPI.

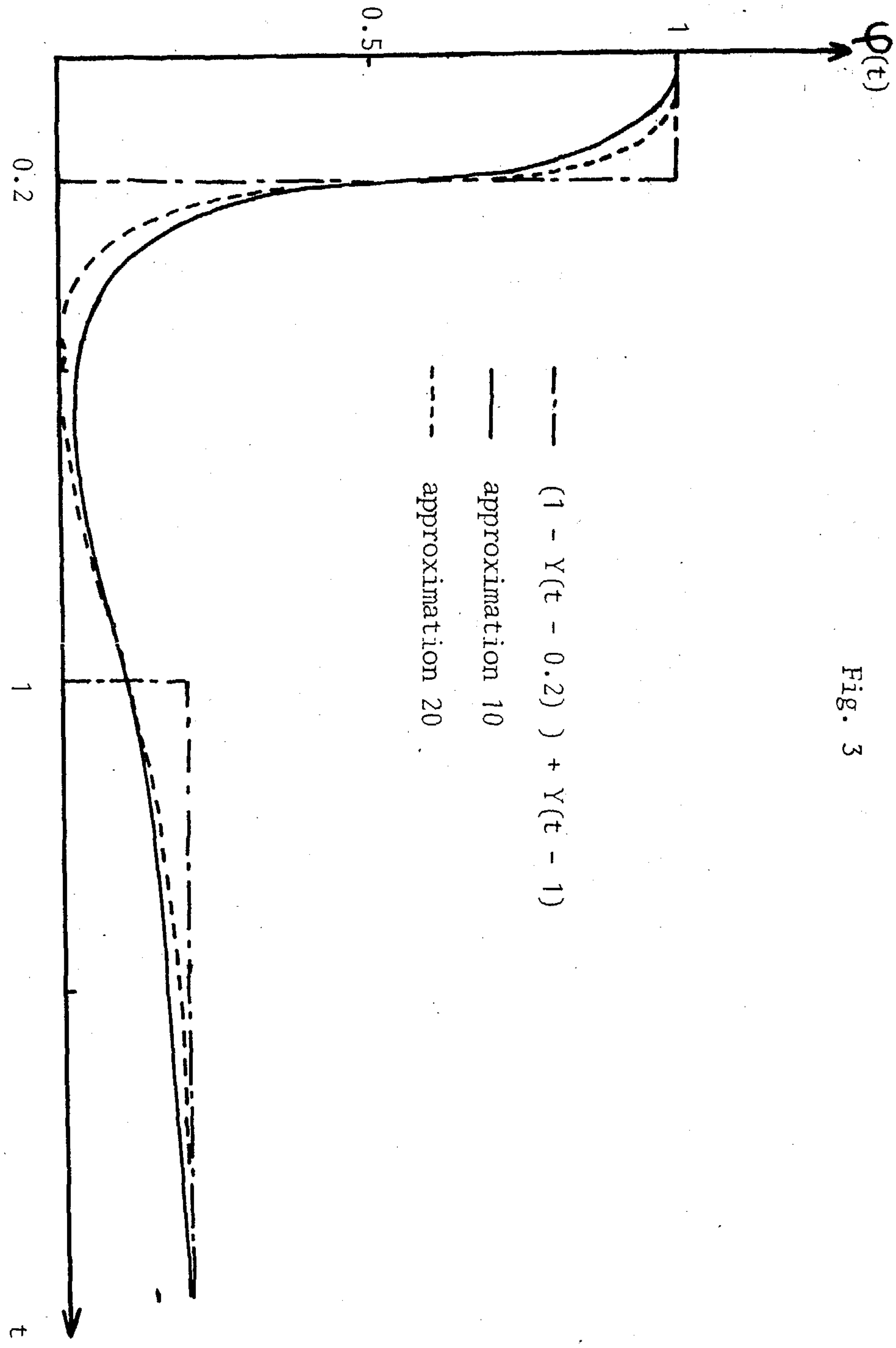

Fig. 3

SUR UNE NOUVELLE METHODE D'INVERSION REELLE DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE.

par Paul FILIPPI.

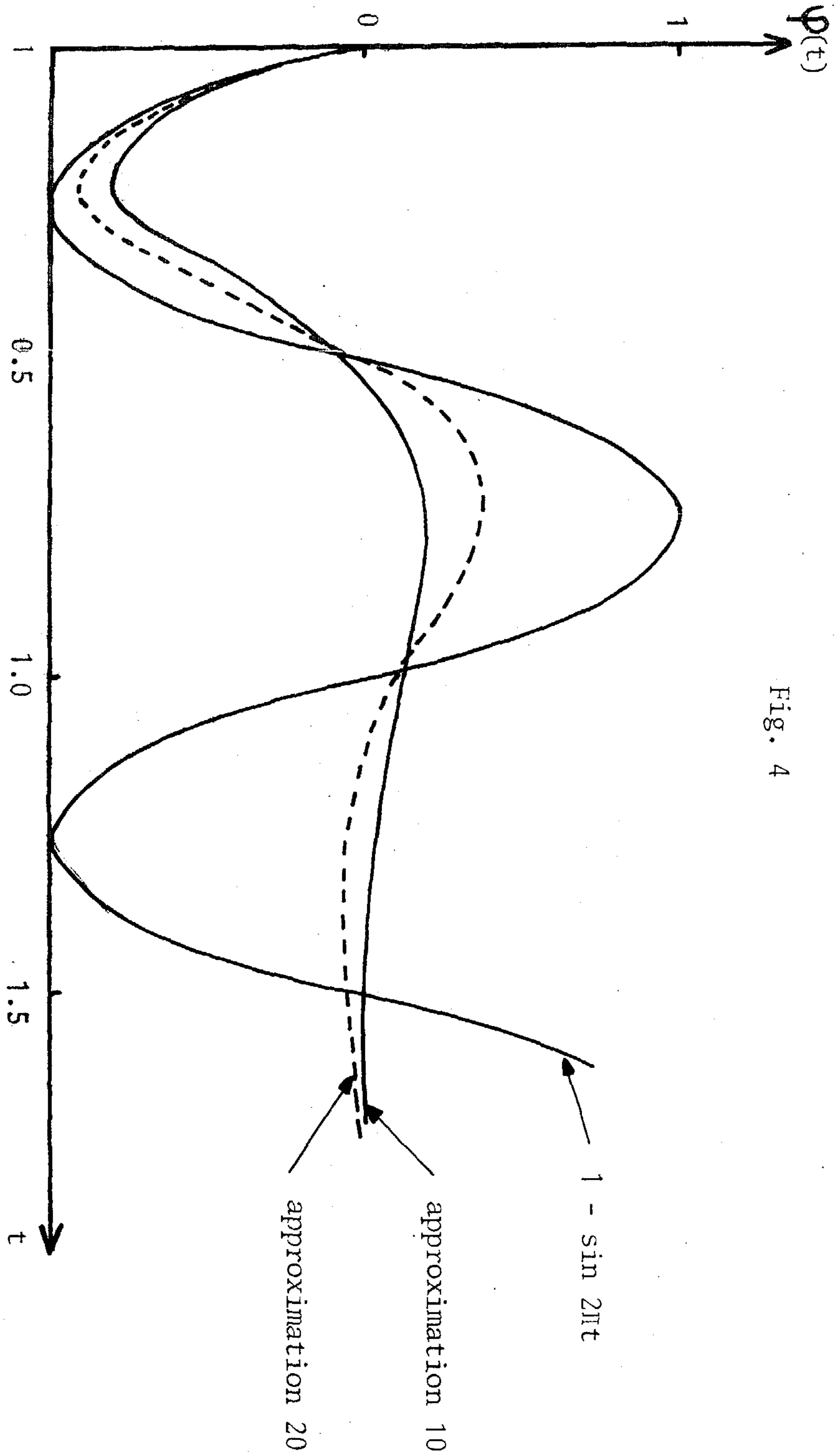

Fig. 4