



TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

Nice 1^{er} au 5 juin 1971

ETUDE THEORIQUE D'UNE CLASSE DE FILTRES OPTIMAUX.
APPLICATIONS AU LISSAGE ET A LA PREDICTION STATIS-
TIQUE.

J.-F. CAVASSILAS *

RESUME

Nous établissons les propriétés d'un filtre à mémoire finie qui annule l'erreur dynamique et minimise l'erreur quadratique moyenne lorsque le signal utile est un polynôme de degré donné dégradé par un bruit dont nous connaissons les caractéristiques spectrales.

SUMMARY

We state the properties of a filter with finite memory, which annuls the dynamic error and minimizes the mean square error when the effective signal is a polynomial of a given degree in the presence of a noise, the spectral characteristics of which are known.

* Centre d'Etude des Phénomènes Aléatoires (associé au C.N.R.S.) 46, av. Félix Viallet, GRENOBLE.



1. INTRODUCTION -

Lofti A. ZADEH et John R. RAGAZZINI [1], en s'inspirant des théories de WIENER [2], ont pu résoudre une série de problèmes relatifs au filtrage à mémoire finie. En résolvant très adroitement certaines équations intégrales [2], ils ont pu fournir des solutions théoriques qui autorisent une minimisation de l'erreur quadratique du bruit en sortie du système calculé ; ce système par ailleurs ne modifiant pas le signal utile considéré comme polynômial. Nous retrouvons par ailleurs des préoccupations analogues dans le livre de LANING et BATTIN [4] et de nombreux textes. Ces idées nous ont semblé heureuses en soi et de façon plus précise pour le lissage et la prédiction. En effet, si nous connaissons les caractéristiques de la classe des fonctions certaines, dégradées par un bruit parasite, ainsi que les caractéristiques de ce dernier, il est possible de choisir un intervalle de temps T , tel que, quelle que soit l'époque considérée, nous puissions approcher les fonctions de cette classe par un polynôme de degré donné, afin que l'erreur soit très petite vis-à-vis de celle introduite, par l'adjonction de la fonction aléatoire. C'est donc très tôt que doivent s'introduire les propriétés physiques de notre signal utile, propriétés qui jouent le rôle de connaissance à priori.

Cependant, les réponses percussionnelles sont extrêmement complexes. Elles sont constituées, en général, de fonctions continues sur $]0, T[$ excessivement délicates à simuler et de combinaisons linéaires de distributions de DIRAC aux extrémités de l'intervalle. Ainsi, pour résoudre les problèmes pratiques avec la théorie de ZADEH et RAGAZZINI, nous avons le choix



entre la construction d'un appareil très compliqué et l'utilisation d'un ordinateur. Nous avons mis au point une technique plus simple qui consiste à ne prendre en considération que des échantillons régulièrement espacés dans le temps et à n'opérer que sur ceux-ci. Le filtrage devient essentiellement numérique ; nous avons cependant pu concevoir la construction d'un filtre sous la forme d'une ligne à retard contrôlable dont le principe découle de la théorie que nous allons maintenant présenter.

2. ENONCE DU PROBLEME

Soit la fonction aléatoire définie de la façon suivante :

$$y = g + n \quad (2.1)$$

La lettre g caractérise une fonction du temps appartenant à l'ensemble des polynômes de degré n ; la lettre n représente une fonction aléatoire stationnaire, ergodique, de valeur moyenne nulle. g sera considérée comme la grandeur d'entrée utile, tandis que n sera l'action perturbatrice dont on désire atténuer les effets.

Nous nous proposons de calculer les caractéristiques d'un filtre numérique \mathcal{F} à mémoire finie T , qui excité par y nous donne une estimation $\hat{g}(t)$ de $g(t)$. Nous imposons au filtre \mathcal{F} de travailler sur N échantillons distants de $\frac{T}{N-1}$.



La réponse impulsionnelle du filtre sera notée $H(z)$.

La réponse du filtre à l'excitation échantillonnée sera par définition à l'instant $t = k\Delta T$:

$$\hat{g}^1(k\Delta T) = \sum_{j=0}^{N-1} [g(k\Delta T - j\Delta T) + n(k\Delta T - j\Delta T)] H(j\Delta T) \quad (2.2)$$

3. CHOIX DES CRITERES

L'erreur peut être définie comme la différence entre la grandeur d'entrée utile et l'estimation $\hat{g}^1(t)$.

$$\varepsilon(k\Delta T) = g(k\Delta T) - \hat{g}^1(k\Delta T)$$

soit encore

$$\varepsilon(k\Delta T) = g(k\Delta T) - \sum_{j=0}^{N-1} g(k\Delta T - j\Delta T) H(j\Delta T) - \sum_{j=0}^{N-1} n(k\Delta T - j\Delta T) H(j\Delta T)$$

Par le jeu de cette écriture nous sommes amenés à faire une distinction très nette entre l'erreur dynamique :

$$\varepsilon_1 = g(k\Delta T) - \sum_{j=0}^{N-1} g(k\Delta T - j\Delta T) H(j\Delta T) \quad (3.1)$$

et l'erreur $\varepsilon_2 = \sum_{j=0}^{N-1} n(k\Delta T - j\Delta T) H(j\Delta T)$ due à l'introduction des perturbations.

Nous allons nous imposer les conditions suivantes pour déterminer les caractéristiques du filtrage

$$\varepsilon_1 = 0 \quad \text{quel que soit } k$$



La valeur moyenne de ξ_2^2 doit être rendue minimum.

Le problème sera donc de minimiser $\langle \xi_2^2 \rangle$ en tenant compte des contraintes imposées par $\xi_1 = 0$.

4. ETUDE DES CONTRAINTES

Remplaçons $g(k\Delta T - j\Delta T)$ dans (3.1) par son développement limité ; (ce qui est toujours possible car g est un polynôme).

$$g(k\Delta T) = \sum_0^{N-1} g(k\Delta T) H(j\Delta T) - \sum_0^{N-1} \dot{g} H(j\Delta T) j\Delta T \\ + \sum_0^{N-1} \ddot{g} j^2 \Delta T^2 H(j\Delta T) \\ + \dots + \sum_0^{N-1} \frac{(-1)^2 j^2}{2!} g^{(2)} \Delta T^2.$$

Par identification, nous obtenons facilement :

$$\sum_0^{N-1} H(j\Delta T) = 1 \\ \sum_0^{N-1} j H(j\Delta T) = 0 \\ \dots \\ \sum_0^{N-1} j^2 H(j\Delta T) = 0$$

soit encore

$$\sum_0^{N-1} H(j\Delta T) = 1 \\ \sum_0^{N-1} j^d H(j\Delta T) = 0 \quad d = 1, 2, \dots, r. \quad (4.1)$$



Ces équations sont nos contraintes au nombre de $(l+1)$ si l est le degré du polynôme à estimer.

Nous allons maintenant montrer comment il est nécessaire de modifier les contraintes (4.1) lorsque notre intérêt se fixe sur les problèmes de filtrage et de prédiction.

5. LE LISSAGE

Il s'agit d'associer une estimation à $g(k\Delta T - l\Delta T)$ dégradée par le bruit η , dans le cas où $l\Delta T$ est un retard que l'on s'impose.

Il est encore possible d'obtenir un développement utile de $g(k\Delta T - j\Delta T)$

$$\begin{aligned}
 g(k\Delta T - j\Delta T) &= g[(k\Delta T - l\Delta T) + (l\Delta T - j\Delta T)] \\
 &= g(k\Delta T - l\Delta T) + [l\Delta T - j\Delta T] \left\{ \frac{dg(\mu)}{d\mu} \right\}_{\mu = k\Delta T - l\Delta T} \\
 &\quad + \frac{[l\Delta T - j\Delta T]^2}{2!} \left\{ \frac{d^2g(\mu)}{d\mu^2} \right\}_{\mu} \\
 &\quad + \dots \dots \dots \\
 &\quad + \frac{[l\Delta T - j\Delta T]^n}{n!} \left\{ \frac{d^ng(\mu)}{d\mu^n} \right\}_{\mu}
 \end{aligned}$$



Avec ce développement l'équation :

$$g(k\Delta T - l\Delta T) = \sum_{j=0}^{N-1} g(k\Delta T - j\Delta T) H(j\Delta T)$$

qui traduit l'annulation de l'erreur dynamique devient , si l'on pose :

$$g^{(k)} = \left\{ \frac{d^k g(\mu)}{d\mu^k} \right\}_{\mu = k\Delta T - l\Delta T}$$

$$\begin{aligned} g(k\Delta T - l\Delta T) &= \sum g(k\Delta T - j\Delta T) H(j\Delta T) \\ &+ g^{(1)} \sum (l\Delta T - j\Delta T) H(j\Delta T). \\ &+ g^{(2)} \sum (l\Delta T - j\Delta T)^2 \cdot \frac{1}{2!} H(j\Delta T). \\ &+ \dots \\ &+ g^{(2)} \sum_0^{N-1} (\Delta T l - \Delta T j)^2 \frac{1}{2!} H(j\Delta T). \end{aligned}$$

L'identification est alors très simple.

$$\begin{aligned} \sum_0^{N-1} H(j\Delta T) &= 1 \\ \sum_{j=0}^{N-1} (l\Delta T - j\Delta T)^d \frac{1}{d!} H(j\Delta T) &= 0 \end{aligned}$$



Par récurrence il est facile de montrer que ces $(\ell+1)$ équations se réduisent aux $(\ell+1)$ contraintes ci-dessous :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-1} H(j\Delta T) &= 1 \\ \sum_{j=0}^{N-1} j H(j\Delta T) &= \ell \\ \dots & \\ \sum_{j=0}^{N-1} j^2 H(j\Delta T) &= \ell^2 \end{aligned}$$

soit encore

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=0}^{N-1} H(j\Delta T) = 1 \\ \sum_{j=0}^{N-1} H(j\Delta T) j^d = \ell^d \end{array} \right. \quad d = 1, 2, \dots, \ell \quad (5.1)$$

6. LA PREDICTION

Dans le cas de la prédiction, il suffit de remplacer dans les calculs précédents ℓ par $(-\ell)$; les équations de contraintes deviennent alors :

$$\sum_{j=0}^{N-1} H(j\Delta T) j^d = (-\ell)^d$$

La conclusion de cette étude relative aux contraintes, dans le cas de la prédiction ou celui du lissage est qu'elles obéissent à une équation



générale que nous écrirons :

$$\sum H(j\Delta T) j^{\ell} = \ell^{\ell} \quad \ell = 0, 1, \dots, 2 \quad (6.1)$$

avec

$$\begin{cases} \ell > 0 & \text{pour le lissage} \\ \ell = 0 & \text{estimation sans retard} \\ \ell < 0 & \text{prédiction} \end{cases}$$

Il est important de noter que malgré l'échantillonnage, le paramètre ℓ peut varier continuellement.

7. ETUDE DE L'ERREUR QUADRATIQUE MOYENNE

Dans le cas présent, le bruit étant stationnaire et ergodique, l'erreur quadratique moyenne pourra s'écrire :

$$\langle \varepsilon^2 \rangle = E \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} n(k\Delta T - j\Delta T) n(k\Delta T - i\Delta T) H(j\Delta T) H(i\Delta T) \right\} \quad (7.1)$$

Soit encore si l'on fait intervenir la fonction d'autocorrélation $\Gamma(t)$ de $n(t)$.

$$\langle \varepsilon^2 \rangle = \sum_0^{N-1} \sum_0^{N-1} \Gamma[(i-j)\Delta T] H(i\Delta T) H(j\Delta T) \quad (7.2)$$

posons :

$$|X\rangle = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{vmatrix} ; \quad x_j = H(j\Delta T) ; \quad a_{ij} = \Gamma[(i-j)\Delta T]$$



A la matrice de terme général a_{ij} .

La matrice A est systématique ; $\langle \varepsilon_2^2 \rangle$ se réduit à la forme quadratique $\langle X | A | X \rangle$.

8. MINIMISATION DE $\langle \varepsilon_2^2 \rangle$

Posons

$$g_0 = X_1 + X_2 + \dots + X_{N-1} - 1$$

$$\begin{cases} g_\nu = X_2 + 2^\nu X_3 + \dots + (N-1)^\nu X_{N-1} \\ \nu = 1, 2, \dots, r. \end{cases}$$

La recherche du minimum de $\langle \varepsilon_2^2 \rangle$ peut s'effectuer en tenant compte des contraintes, par la méthode des multiplicateurs de LAGRANGE.

Si l'on appelle λ_ν les multiplicateurs de LAGRANGE, le système à résoudre devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial X_i} \left[\langle X | A | X \rangle + \sum_{\nu=0}^r \lambda_\nu g_\nu \right] = 0 \\ i = 1, 2, \dots, N \\ g_\nu = 0 \\ \nu = 0, 1, 2, \dots, r \end{cases} \quad (8.1)$$



Ce système est linéaire ; les inconnues X_i et λ_r sont au nombre de $N + r + 1$.

Pour résoudre ce système, nous allons introduire des notations matricielles :

(8.1) devient :

$2\Gamma(0)$	$2\Gamma(\Delta T)$	$2\Gamma(2\Delta T)$	\dots	$2\Gamma[(N-1)\Delta T]$	1	0	0	\dots	0	X_1 X_2 X_3 \dots X_N			
$2\Gamma(\Delta T)$	$2\Gamma(0)$	$2\Gamma(\Delta T)$	\dots	$2\Gamma[(N-2)\Delta T]$	1	1	1	\dots	1		λ_0 λ_1 \dots λ_r		
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	1	2	2^2	\dots	2^r			λ_0 λ_1 \dots λ_r	
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots				λ_0 λ_1 \dots λ_r
$2\Gamma[(N-1)\Delta T]$	$2\Gamma[(N-2)\Delta T]$	\dots	\dots	$2\Gamma(0)$	1	$(N-1)$	\dots	$(N-1)^2$	\dots				
1	1	1	\dots	1	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	λ_0 λ_1 \dots λ_r			
0	1	2	\dots	$N-1$	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots		λ_0 λ_1 \dots λ_r		
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots			λ_0 λ_1 \dots λ_r	
0	1^2	2^2	\dots	$(N-1)^2$	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots				λ_0 λ_1 \dots λ_r
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots				

$$= \begin{array}{|c} \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \vdots \\ r^2 \\ \hline \end{array}$$



9. METHODE CHOISIE POUR INVERSER LA MATRICE DU SYSTEME

posons $K = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$ la matrice à inverser

A_{11} est la matrice du terme général $2 \Gamma (i-j) \Delta T$

A_{12} est la matrice :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (N-1) & \dots & (N-1) & \dots \end{vmatrix}$$

est la matrice nulle, carrée de dimensions

Posons maintenant :

$$\left\{ \begin{array}{l} B = A_{11} \\ C = A_{11}^{-1} A_{12} \\ E = A_{21} A_{11}^{-1} \\ D = A_{22} - A_{21} C \end{array} \right. \quad (9.1)$$



Dès lors K^{-1} peut s'écrire

$$K^{-1} = \left| \begin{array}{c|c} \overbrace{B^{-1} + CD^{-1}}^m & \overbrace{-CD^{-1}}^{r+1} \\ \hline -D^{-1}E & D^{-1} \end{array} \right\}^{r+1}. \quad (9.2)$$

ici A_{11} est connue ; $A_{21} = A_{12}^T$; $A_{22} = 0$.

L'intérêt de la décomposition de K^{-1} selon les matrices indiquées est que seule la matrice $-CD^{-1}$ nous est utile.

Si nous appelons $|y\rangle$, le vecteur colonne dont le premier élément est 1, le second ℓ , le dernier ℓ^2 nous aurons :

$$|x\rangle_{\text{optimal}} = -CD^{-1}|y\rangle \quad (9.3)$$

Nous constatons déjà que cette procédure nous permettra sans difficulté de calculs numériques, d'envisager une étude simple lorsque le bruit perturbateur est à corrélation microscopique.

10 ESTIMATION DE L'ERREUR QUADRATIQUE MOYENNE

$$\langle \varepsilon_2^2 \rangle = \langle X_{op} | A | X \rangle$$



$$\langle \varepsilon_2^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle Y | \{-c\bar{D}'\}^T A_{11} \{-c\bar{D}'\} | Y \rangle.$$

En utilisant les formules (9.1), il est possible de simplifier notre écriture pour arriver à :

$$\langle \varepsilon_2^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle Y | \{A_{12}^T A_{11}^{-1} A_{12}\}^{-1} | Y \rangle \quad (10.1)$$

11. APPLICATIONS IMMEDIATES

Nous allons nous intéresser particulièrement au cas asymptotique du bruit à corrélation microscopique, qui présente l'avantage de pouvoir être traité intégralement sans faire appel aux machines numériques; ceci est particulièrement important car lorsque la fonction d'autocorrélation ne se réduit pas à une distribution de DIRAC, il est nécessaire d'inverser la matrice A_{11} définie au § 9. Cette matrice peut avoir une dimension telle que du point de vue technique l'inversion présente des difficultés. La précision exigée peut être contrôlée dès lors, en choisissant une fonction d'autocorrélation du type $\sigma^2 e^{-\alpha \|i-j\|}$ où α est lui-même choisi suffisamment grand pour que l'on se rapproche étroitement d'un bruit à corrélation microscopique.

D'autre part, l'étude dans le cas du "bruit blanc" fournit des résultats dont l'intérêt propre est indéniable; ils nous amèneront à généraliser la conception d'intégrateur statistique parfait et à tenter d'examiner sous un angle nouveau l'évolution des résultats que l'on obtient lorsque les échantillons extraits de la fonction aléatoire présentent une corrélation



de plus en plus étroite.

11.1 Polynôme du premier degré dégradé par un bruit à corrélation microscopique.

Si nous appelons λ^2 la puissance du bruit à corrélation microscopique l'erreur quadratique moyenne s'écrit :

$$\langle \varepsilon_2^2 \rangle = \sum \sum \lambda^2 \delta_{ij} H(j\Delta T) H(i\Delta T)$$

En simplifiant les notations à l'aide de (7.4)

$$\langle \varepsilon_2^2 \rangle = \sum_0^{N-1} \lambda^2 X_j^2 \quad (11.1)$$

Le système (8.1) devient :

$$\frac{\partial}{\partial X_i} [\langle \varepsilon_2^2 \rangle + \lambda_0 q_0 + \lambda_1 q_1] = 0$$

$$q_0 = X_1 + X_2 + \dots + X_{N-1} = 0$$

$$q_1 = X_2 + 2X_3 + \dots + (N-1)X_N = 0$$

D'après (11;1) la matrice d'autocorrélation est diagonale.

$$A_{ii} = 2\lambda I$$



Les matrices des contraintes sont :

$$A_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & N-1 \end{vmatrix} \quad A_{21} = A_{12}^T$$

Les matrices C et D définies en (9.1)

$$C = [2\lambda I]^{-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & N-1 \end{vmatrix}$$

$$D = -\frac{1}{2\lambda} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & N-1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & N-1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2\lambda} \begin{vmatrix} N & \frac{N(N-1)}{2} \\ \frac{N(N-1)}{2} & \frac{N(N-1)(2N-1)}{6} \end{vmatrix}$$

$$D^{-1} = \frac{4\lambda}{N(N+1)} \begin{vmatrix} -(2N-1) & 3 \\ 3 & -\frac{6}{N-1} \end{vmatrix}$$

Le calcul de $-CD^{-1}$ est immédiat :

$$-CD^{-1} = \frac{2}{N(N+1)} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & k \\ \vdots & \vdots \\ 1 & (N-1) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2N-1 & -3 \\ -3 & \frac{6}{N-1} \end{vmatrix}$$



Les termes généraux de la $k^{\text{ième}}$ ligne de $-c\bar{D}^{-1}$ sont dans l'ordre :

$$\frac{2}{N(N-1)} (2N-1-3k) ; \frac{2}{N(N-1)} \left(-3 + \frac{6k}{N-1} \right) .$$

k variant de 0 à $N-1$

Ce calcul élémentaire nous a permis de constater que dans le cas où $N = 30$ nous pouvions espérer une précision supérieure au millième lors de l'inversion de la matrice A_{11} avec l'ordinateur.

11/2 Résultats numériques

Les figures 1, 2, 3 montrent l'évolution de l'erreur quadratique en fonction de l'avance ou du retard que l'on impose au filtre et ceci pour les polynômes du premier, second et troisième degré. T est ici le support de la réponse percussionnelle. Nous avons exprimé les retards ou avances en fractions de T ; par ailleurs le tracé des courbes pour $T = 12$, 10, et 7,5 secondes montre l'influence de la corrélation entre échantillons.

L'étude faite sur le bruit à corrélation microscopique nous a permis de tracer les courbes asymptotes ($T = \infty$).

Il ressort de cette étude numérique que quel que soit le degré du polynôme, les courbes sont sy-



métriques par rapport à la droite $\tau = -\frac{T}{2}$; que ξ^2 est minimum en ce point lorsque l'on lisse un polynôme du premier degré ou un polynôme du 3e degré, mais qu'il n'en est pas du tout de même pour le lissage des polynômes du second degré où les minimums de ξ^2 se situent en $-T/4$ et $-3T/4$.

Dans le cas où l'on filtre des polynômes du 3e degré, il est pratiquement indispensable d'accepter un retard même petit si l'on désire diminuer l'influence du bruit dans des proportions considérables ; le premier minimum se situe à $-T/8$.

Les figures 4, 5, 6, 7 montrent les formes des réponses percussionnelles que l'on doit associer au filtrage des polynômes du 2e degré lorsque $\ell = -\frac{3}{16}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$. Dans tous les cas, les points qui les définissent se répartissent sur une parabole (sauf aux extrémités du segment $[0T]$).

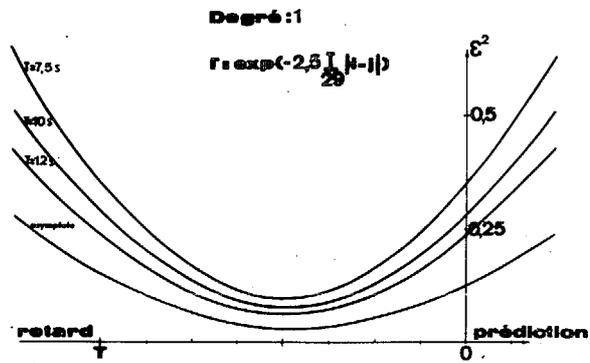
Les figures 8, 9 montrent les réponses percussionnelles à associer aux polynômes du premier degré lorsque $\ell = 0$ et $\ell = \frac{1}{2}$.

Les figures 10, 11 montrent dans les mêmes conditions les réponses à associer au filtrage des polynômes du 3e degré. Dans ce cas les points se répartissent sur une cubique sauf encore aux extrémités du segment $[0, T]$.

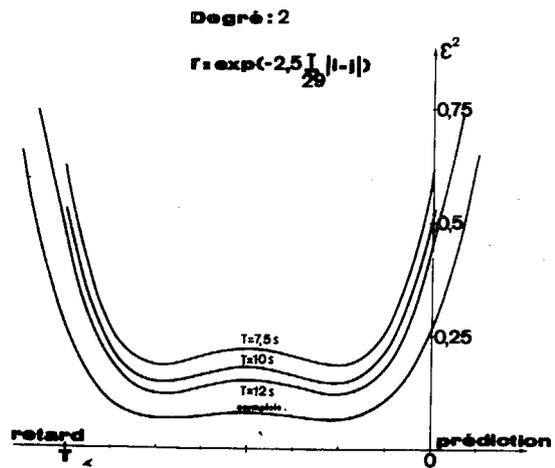
Dans tous les cas de figures sans exception la réponse percussionnelle à associer à $\ell = \frac{1}{2} + \ell_0$ se déduit de celle relative à ℓ_0 par une symétrie par rapport à $t = T/2$.



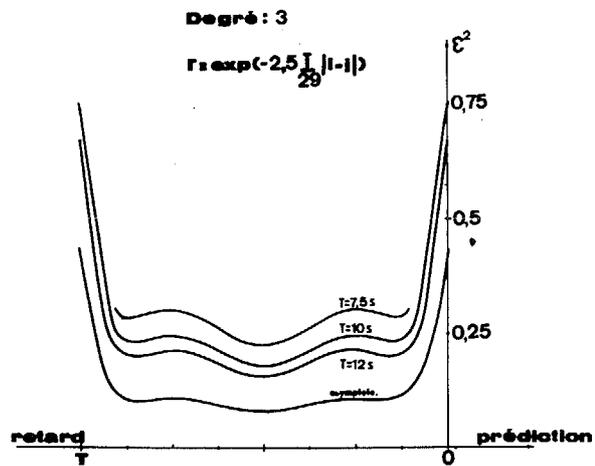
F 1

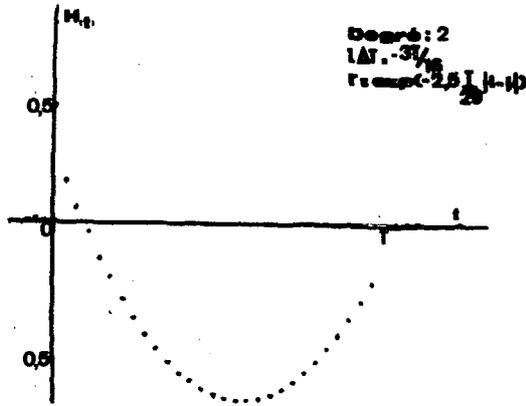


F 2

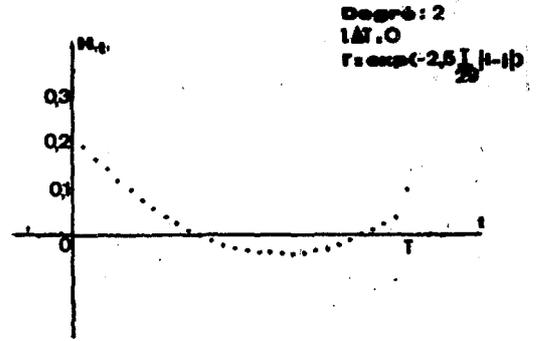


F 3



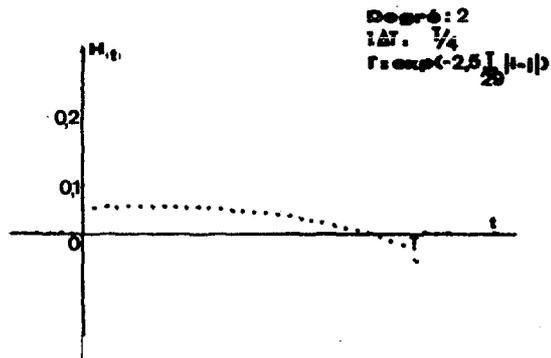


F4

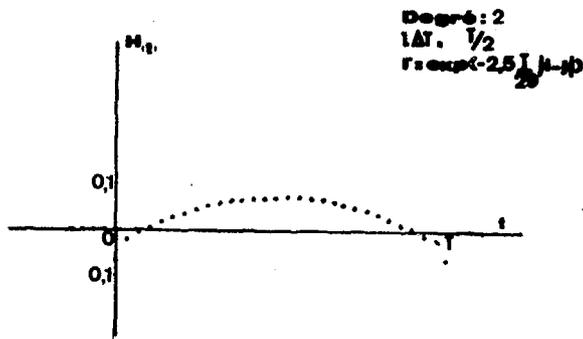


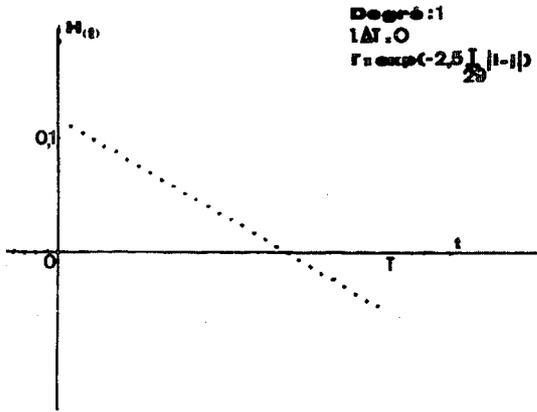
F5

F6

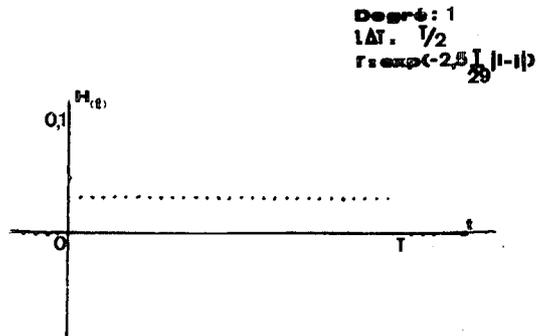


F7



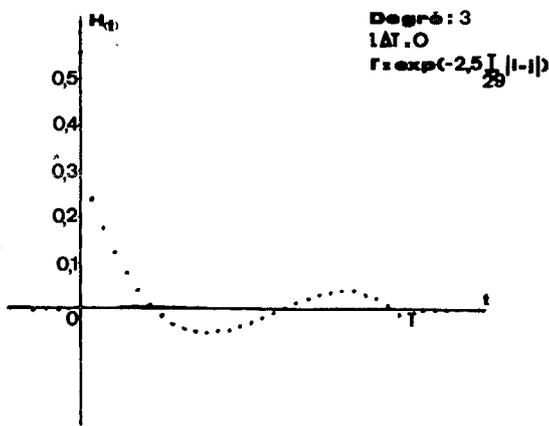
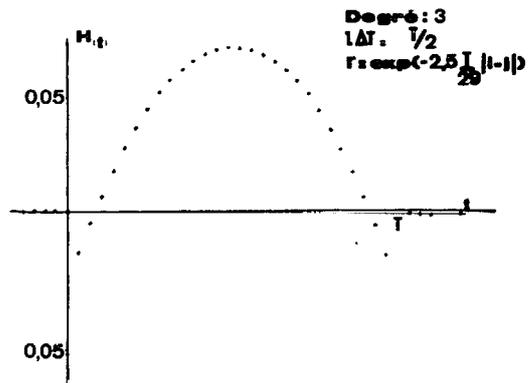


F 8



F 9

F_10



F_11



BIBLIOGRAPHIE -

- [1] ZADEH J.R. - RAGAZZINI - An extension of
Winer's theory of prediction. J. Applied Phys.
Vol. 21, N° 7 July 1950
- [2] WIENER . - Extrapolation, interpolation and
smoothing of stationnary time series. Wiley
New York (1949)
- [3] V.S. PUGACHEV - Theory of Random Functions and
its applications to control Problems, p. 616-695.
- [4] LANING --BATTIN - Control systems Engineering
Mc Graw Hill S(1956)