TROISIEME COLLOQUE SUR LE

TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

Nice 1er au 5 juin 1971

DETECTION d'un SIGNAL CERTAIN dans un BRUIT de PUISSANCE inconnue.

I - STRUCTURE du RECEPTEUR.

B. PICINBONO et G. VEZZOSI

Laboratoire d'Etude des Phénomènes Aléatoires
Université de Paris-Sud.
91 - ORSAY -

RESUME Utilisant le modèle du bruit sphériquement invariant (bruit gaussien de puissance aléatoire), on traite le problème de la détection d'un signal certain ou d'amplitude inconnue. Dans le premier cas, on montre que la structure du récepteur tend à devenir indépendante de la loi de probabilité de la puissance. Dans le second cas la loi de probabilité du signal ne peut être éliminée, c'est pourquoi on détermine le récepteur optimal dans la classe de ceux à fausse alarme constante. On montre que ce récepteur existe et utilise le test de Student.

SUMMARY

The problem of deterministic or with random amplitude signal detection in a spherically invariant noise is considered. In the first case we show that the optimal receiver can be independent of the probability distribution of the noise power. In the second one we determine the optimal receiver in the constant felse alarm receiver class and we show that this receiver is defined by a Student test.

- I -

- INTRODUCTION -

Le bruit capté par l'antenne d'un récepteur sonar est caractérisé par la grande instabilité temporelle de ses propriétés statistiques ; cette instabilité résulte de la multiplicité des sources de bruit en présence, et des variations brutales de leurs niveaux respectifs ; elle n'est en pratique jamais connue ni prévisible ; c'est pourquoi une théorie générale de la détection par les procédés acoustiques devrait prendre en compte, en principe, non seulement les incertitudes liées au signal, comme le fait la théorie habituelle, mais aussi toutes les incertitudes relatives aux caractéristiques du bruit.

Une telle étude est parfaitement irréalisable, en raison du nombre des paramètres inconnus du bruit, et de l'impossibilité de les prévoir avec assez de précision. Cependant, on peut penser que le "récepteur idéal", calculé pour un bruit Gaussien stationnaire, doit être sérieusement modifié lorsque ces hypothèses ne sont plus réalisées.

C'est ce que nous allons montrer dans cette étude réalisée dans le cas très schématique où seule la puissance moyenne du bruit est inconnue, et où l'incertitude sur le signal est soit inexistante (le signal est connu exactement), soit réduite au maximum (le signal est connu à un facteur d'amplitude près).

Le point de vue adopté est celui de la théorie de la décision statistique. On sait que cette théorie considère le problème de détection comme un problème de test entre deux hypothèses statistiques. Pour définir sans ambiguïté une stratégie optimale en moyenne, il convient alors de spécifier au préalable :

1°) Les densités de probabilité de l'observation, sous les deux hypothèses, conditionnelles à une certaine réalisation des paramètres inobservables.

2°) Les lois a priori des paramètres inobservables.

Dans le cas présent le signal est supposé certain et additif au bruit ; sa présence a pour seul effet de décentrer la loi du bruit seul, et donc la loi du mélange Signal + Bruit se déduit de celle du bruit seul.

Dans toute cette étude nous supposons que l'observation est discrète, c'est à dire qu'elle est formée d'un certain nombre (aussi grand qu'on le peut dans la pratique) d'échantillons de l'observation pris à des instants d'échantillonnage (t_i). Mais nous n'envisagerons pas ici le problème mathématique du passage à la limite pour un nombre infini d'échantillons. Ce problème à la fois délicat et intéressant n'a peut-être pas grande signification physique, dans la mesure où il n'est pas certain qu'on puisse physiquement extraire de l'information d'échantillons très voisins. Ainsi pour une observation $X(t)$ durant de 0 à T, nous admettons que le nombre d'échantillons significatifs est borné. Ceci revient à dire que l'observation peut être représentée par le vecteur ligne

$$(1\text{-}1) \qquad \vec{X}^{\,T} = \left[X_1 = X(t_1), \; \ldots\ldots, \; X_n = X(t_n) \right],$$

n étant inférieur à la valeur maximum compatible avec la validité du problème.

Pour représenter les fluctuations de puissance moyenne du bruit échantillonné $\vec{B}$, il est commode de considérer $\vec{B}$ comme le produit d'une v.a. positive $\sqrt{A}$ par une v.a. gaussienne n dimensionnelle $\vec{Y}$, de matrice de covariance Γ connue, déduite d'une fonction de covariance sous-jacente : $\Gamma\ (s, t)$.

Le problème de détection étudié se schématise alors comme suit :

1°) Lorsque l'amplitude du signal est connue :
Décider entre :

$$\begin{cases} H_0 : & \vec{X} = \sqrt{A}\ \vec{Y} \\ H_1 : & \vec{X} = \sqrt{A}\ \vec{Y} + \vec{S} \end{cases}$$

2°) Lorsque l'amplitude du signal est inconnue :

$$\begin{cases} H_0 : & \vec{X} = \sqrt{A}\ \vec{Y} \\ H_1 : & \vec{X} = \sqrt{A}\ \vec{Y} + \mu\ \vec{S} \end{cases}$$

avec :
- $\vec{Y}$ v.a. gaussienne, centrée,non dégénérée, de matrice de covariance Γ (donc Γ^{-1} existe).
- A v.a. positive, de loi $p(a)$.
- $\vec{S}$ signal, ou copie du signal.
- μ v.a. positive, de loi a priori $q(\mu)$.

Notons que le problème N° 1 est un cas particulier du N° 2, obtenu lorsque la densité $q(\mu)$ est concentrée en un point.

La section II applique les résultats de la théorie aux problèmes de détection définis précédemment ; on constate alors que, dans le cas d'une observation discrète et finie, la structure du récepteur optimal dépend des deux lois a priori.

Ce résultat assez décevant nous conduit dans la section III à rechercher une forme asymptotique du r.d.v., valable lorsque le nombre n d'échantillons prélevés est grand ; cette démarche revient à effectuer le passage de l'observation discrète à l'observation continue, c'est à dire le passage de l'espace euclidien à l'espace de Hilbert, que nous voulions précisément éviter, lors de la schématisation du problème réel. Cependant, même si cette opération est dénuée de signification physique, car elle suppose le bruit gaussien à n'importe quelle échelle, elle s'avère néanmoins extrêmement commode pour la situation actuelle ; en effet, dans l'espace de Hilbert, l'estimation de la puissance inconnue du bruit est possible sans erreurs ; lorsque l'amplitude du signal est connue, le r.d.v. tend à devenir indépendant de la loi a priori $p(a)$.

Le même phénomène se présente lorsque l'amplitude du signal est inconnue ; mais alors la loi a priori $q(\mu)$ subsiste dans l'expression limite du r.d.v. et donc la structure du récepteur optimal dépend irrémédiablement de cette loi a priori.

Pour échapper à nouveau à cette dépendance, on effectue, dans la section IV, l'optimisation dans une classe plus restreinte de récepteurs, celle des récepteurs à probabilité de fausse alarme conditionnelle constante ; on montre alors que, dans cette classe, le récepteur optimal existe, est indépendant de toute loi a priori, même lorsque le nombre d'échantillons prélevés est fini, et utilise la statistique classique de Student. On montre enfin pourquoi ce résultat pouvait être prévu.

Le problème que nous abordons ici avait été ébauché lors du précédent colloque GRETSI [1] mais avec des hypothèses très restrictives sur le bruit et sans l'étude du passage à la limite. Il a été également abordé par Spooner [2], mais également en traitant uniquement de cas particuliers, et enfin Tuteur [3] a donné des indications sur la solution dans le cas d'un signal aléatoire. Enfin la première partie de cette étude est en cours de publication de manière plus détaillée [4] .

II - STRUCTURE du RECEPTEUR OPTIMAL en MOYENNE.

Le récepteur optimal en moyenne compare le rapport de vraisemblance (r.d.v.) à un seuil ; dans la situation présente, ce r.d.v. s'écrit :

1) Lorsque l'amplitude du signal est connue :

$$(2\text{-}1) \quad L(\vec{X}) = \frac{\displaystyle\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{1}{2a}(\vec{X}-\vec{S})^T \Gamma^{-1}(\vec{X}-\vec{S})\right\} p(a)\, da}{\displaystyle\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{1}{2a}\vec{X}^T \Gamma^{-1}\vec{X}\right\} p(a)\, da}$$

2) Lorsque l'amplitude est inconnue :

$$(2\text{-}2) \quad L(\vec{X}) = \frac{\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{1}{2a}(\vec{X}-\vec{S})^T \Gamma^{-1}(\vec{X}-\vec{S})\right\} p(a)\, q(\mu)\, da\, d\mu}{\displaystyle\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{1}{2a}\vec{X}^T \Gamma^{-1}\vec{X}\right\} p(a)\, da}$$

En examinant les expressions (2-1) et (2-2) on constate que, dans les deux cas, la structure du récepteur optimal dépend étroitement des lois a priori ; cette circonstance est fâcheuse pour les applications, mais n'est nullement surprenante. Dans la mesure où l'on a choisi, au départ, de rechercher une optimalité moyenne, on doit s'attendre à ce que le récepteur optimal correspondant exploite toute l'information nécessaire à la définition de l'optimalité, en particulier celle concernant les densités de probabilité a priori des paramètres inconnus.

Nous avons cependant montré [4] que $L(\vec{X})$ était effectivement calculable dans le premier cas pour une gamme assez large de lois de probabilité $p(a)$. La structure du récepteur optimal construisant le r.d.v. à partir de l'observation $\vec{X}$ ne s'en déduit pas très aisément, mais apparait toujours non linéaire, contrairement au cas du bruit gaussien pur où ce détecteur idéal est un filtre adapté. Nous avons également montré par un calcul direct que moyennant des hypothèses très générales le r.d.v. prenait pour n grand une forme asymptotique indépendante de la loi $p(a)$. Nous allons maintenant brièvement montrer comment ce résultat peut se comprendre.

III - ASPECT ASYMPTOTIQUE.

A cause du caractère gaussien du bruit, il est intuitivement évident que, lorsque n devient très grand, le rapport de vraisemblance tend à devenir indépendant de la loi a priori $p(a)$, sous réserve que le problème de détection conditionnel ne soit pas singulier, c'est à dire que

$$\lim_{n \to \infty} \vec{S}^{T} \Gamma^{-1} \vec{S} < \infty . \tag{3-1}$$

La situation est en effet la suivante :

1°) Les v.a. X_i, $i = 1, \ldots, n$, sont gaussiennes (non centrées sous H_1), et leurs liaisons statistiques sont connues à un facteur près, a. Plaçons nous sous H_0 ; il est possible de les décorréler, et donc, puisqu'elles sont gaussiennes, de les rendre indépendantes. On obtient ainsi n v.a. normales, centrées et indépendantes ξ_i, $i = 1, \ldots, n$, de variance commune a inconnue.

Cette opération peut être effectuée quel que soit n ; supposons donc que n croisse indéfiniment ; on peut affirmer alors que la v.a. $\frac{1}{n} \sum_1^n \xi_i^2$ converge en moyenne quadratique (et même presque sûrement), vers la puissance inconnue a, et que donc la statistique $\frac{1}{n} \sum_1^n \xi_i^2$ est un estimateur de a qui tend à devenir parfait.

2°) Plaçons nous maintenant sous H_1 ; visiblement, la présence du signal introduit un biais dans l'estimation de a; mais puisque, par hypothèse, le problème de détection conditionnel est régulier, ce biais tend nécessairement vers zéro lorsque n croit indéfiniment (sinon, dans le problème conditionnel, il suffirait de comparer $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_1^n \xi_i^2$ à la puissance connue a_0 ; tout écart de cette fonction de décision à a_0 serait révélateur de la présence du signal, et le problème serait singulier).

3°) Dès lors, à chaque épreuve, et sous les deux hypothèses, l'observateur dispose d'un estimateur de la puissance du bruit qui tend à devenir parfait lorsque n est suffisamment grand ; pour n très grand, tout se passe comme si la puissance du bruit était fournie a priori, en même temps que l'enregistrement ; on sait que, dans ce cas, la meilleure stratégie possible consiste à calculer le rapport de vraisemblance conditionnel (c'est à dire le rapport des densités du bruit seul et du mélange, conditionnelles à une certaine valeur du paramètre), et à le comparer à un seuil fixe. On peut donc conclure que, par exemple, dans le problème où l'amplitude du signal est connue, le r.d.v.

$$(3\text{-}2)\quad L(\vec{X}) = \frac{\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{a^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2a}(\vec{X}-\vec{S})^T \Gamma^{-1}(\vec{X}-\vec{S})\right\} p(a)\,da}{\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{a^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2a}\vec{X}^T \Gamma^{-1}\vec{X}\right\} p(a)\,da}$$

peut s'écrire

$$(3\text{-}3) \qquad \exp \frac{\vec{X}^T \Gamma^{-1} \vec{S} - \frac{1}{2} \vec{S}^T \Gamma^{-1} \vec{S}}{\frac{1}{n} \sum_1^n \xi_i^2}$$

Il reste alors à exprimer $\sum_1^n \xi_i^2$ en fonction de l'observation $\vec{X}$; un calcul simple, présenté en annexe, montre que $\sum_1^n \xi_i^2$ peut être identifié à $\vec{X}^T \Gamma^{-1} \vec{X}$.

Ainsi pour n très grand on peut prendre comme valeurs approchées du r.d.v.

- lorsque l'amplitude du signal est connue

$$(3\text{-}4) \qquad L(\vec{X}) \simeq \exp \frac{\vec{X}^T \Gamma^{-1} \vec{S} - \frac{1}{2} \vec{S}^T \Gamma^{-1} \vec{S}}{\frac{1}{n} \vec{X}^T \Gamma^{-1} \vec{X}}$$

- lorsque l'amplitude du signal est aléatoire

$$(3\text{-}5) \qquad L(\vec{X}) \simeq \int_0^{\infty} \exp \frac{\mu \vec{X}^T \Gamma^{-1} \vec{S} - \frac{\mu^2}{2} \vec{S}^T \Gamma^{-1} \vec{S}}{\frac{1}{n} \vec{X}^T \Gamma^{-1} \vec{X}} q(\mu) d\mu$$

On retrouve le cas du bruit gaussien en remplaçant $p(a)$ par $\delta(a-a_0)$ dans les Eqs. (2-1) et (2-2). On trouve alors immédiatement que les termes quadratiques $\vec{X}^T \Gamma^{-1} \vec{X}$ sont éliminés du r.d.v.

Dans le cas du signal connu on peut remplacer $L(\vec{X})$ par toute fonction monotone de $L(\vec{X})$ et prendre ainsi comme fonction test :

$$(3\text{-}6) \qquad T_1(\vec{X}) = \frac{\vec{X}^{\,T}\,\Gamma^{-1}\,\vec{S} - \frac{1}{2}\,\vec{S}^{\,T}\,\Gamma^{-1}\,\vec{S}}{\frac{1}{n}\;\vec{X}^{\,T}\,\Gamma^{-1}\,\vec{X}}$$

Dans le cas du bruit gaussien, cette fonction test est évidemment

$$(3\text{-}7) \qquad T_g(\vec{X}) = \vec{X}^T\,\Gamma^{-1}\,\vec{S},$$

qui est le filtre adapté.

Par contre lorsque l'amplitude du signal est aléatoire, il n'y a pas de test indépendant de $q(\mu)$. Cette situation est suffisamment génante pour qu'on cherche la structure d'un récepteur fondé sur d'autres critères.

Les seconds membres des expressions (3-4) et (3-5) permettent de définir les récepteurs asymptotiquement optimaux. La loi a priori $p(a)$ a disparu dans ces expressions ; par contre la loi $q(\mu)$ subsiste dans (3-5). Cette dernière particularité limite la portée pratique de la forme asymptotique.

IV - RECEPTEUR OPTIMAL à PROBABILITE de FAUSSE ALARME CONDITIONNELLE CONSTANTE.

Pour échapper à la dépendance par rapport aux lois a priori, on est contraint de restreindre la classe des récepteurs en concurrence ; c'est cette idée que nous voulons préciser, en l'appliquant à la classe des tests à fausse alarme conditionnelle constante.

On sait que, si l'on exclut les stratégies aléatoires, la donnée d'un test est équivalente à la donnée d'une partition de l'espace des valeurs observées χ , en deux régions disjointes et complémentaires $\mathcal{X}_0$ et $\mathcal{X}_1$; dire que $\mathcal{X}_1$ définit un test à probabilité de fausse alarme constante (ou semblable, ou CFAR) c'est dire que $\mathcal{X}_1$ satisfait la condition suivante :

$$(4\text{-}1)\quad \begin{cases} \alpha\,(\mathcal{X}_1|a) = \displaystyle\int_{\mathcal{X}_1} p_0(\vec{X}|a)\, d\vec{X} = C^{te} \text{ indépendante de } a = \alpha \\ 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

Cette condition est très particulière et ne permet pas d'assurer l'existence des tests désirés ; en fait, lorsque la densité $p_0\,(\vec{X}|a)$ est quelconque, l'équation (4-1) peut ne jamais avoir de solution, ou n'en avoir que pour certaines valeurs de α . Nous allons montrer que, lorsque $p_0(\vec{X}|a)$ est une densité gaussienne :

$$p_0(\vec{X}|a) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\; e^{-\frac{\vec{X}^T \Gamma^{-1} \vec{X}}{2a}} \times \frac{1}{a^{n/2}\sqrt{\det\Gamma}} ,$$

l'équation (4-1) admet une infinité de solution.

Le récepteur optimal cherché sera alors celui qui maximise la probabilité de détection moyenne

$$\beta\;(\mathcal{X}_1) = \int_{\mathcal{X}_1} p_1(\vec{X})\; d\vec{X}$$

avec :

$$p_1(\vec{X}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \times \frac{1}{\sqrt{\det\Gamma}} \times \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{a^{n/2}}$$

$$e^{-\frac{1}{2a}(\vec{X} - \mu\vec{S})^T\,\Gamma^{-1}(\vec{X} - \mu\vec{S})} \quad p(a)\ q(\mu)\ da d\mu .$$

sous la contrainte (4-1).

Les composantes de l'observation $\vec{X}$ sont corrélées ; c'est pourquoi il est préférable de poser dès le début le problème dans l'espace Ξ des réalisations des v.a. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ indépendantes, et déduites de $X_1 \ldots X_n$ par les transformations linéaires appropriées (cf l'annexe). Cette substitution ne change rien au problème de détection proprement dit, car les transformations qui blanchissent l'observation sont linéaires et inversibles, de sorte que le contenu informationnel de l'observation reste inaltéré. Soit $\vec{\mu}$ l'image du signal dans l'une quelconque de ces transformations ; on a alors :

$$(4\text{-}3) \quad \begin{cases} \vec{X}^T\,\Gamma^{-1}\,\vec{X} = \sum_1^n{}_i\,\xi_i^{\,2} \\ \vec{S}^T\,\Gamma^{-1}\,\vec{S} = \sum_1^n{}_i\,\mu_i^{\,2} \\ \vec{X}^T\,\Gamma^{-1}\,\vec{S} = \sum_1^n{}_i\,\xi_i\mu_i \end{cases}$$

Il s'agit alors de trouver la région Ξ_1 de l'espace $\Xi = R^n$ telle que la probabilité de détection :

$$(4\text{-}4) \qquad \int_{\Xi_1} p_1(\vec{\xi})\, d\xi \qquad \text{soit maximale}$$

sous la contrainte :

$$(4\text{-}5) \qquad \int_{\Xi_1} p_0(\vec{\xi}\,|a)\, d\vec{\xi} = C^{te}$$

avec

$$(4\text{-}6)\begin{cases} p_0(\vec{\xi}\,|a) = \dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}} \times \dfrac{1}{a^{n/2}}\, e^{-\frac{1}{2a}\sum_1^n \xi_i^2} \\[2ex] p_1(\vec{\xi}) = \dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}} \displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty \dfrac{1}{a^{n/2}}\, e^{-\frac{1}{2a}\sum_1^n (\xi_i - \mu \times \mu_i)^2}\, p(a)\, q(\mu)\, da\, d\mu \end{cases}$$

La détermination de la région optimale Ξ_1 s'effectue en deux étapes : on détermine la famille des domaines Ξ_1 qui satisfait la relation (4-5). Puis, dans cette famille, on recherche l'élément qui maximise l'intégrale (4-4).

IV - 1 - CARACTERISATION de la REGION CRITIQUE des TESTS SEMBLABLES.

La région critique Ξ_1 d'un test semblable doit satisfaire la condition :

$$(4\text{-}7)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}} \times \dfrac{1}{a^{n/2}} \displaystyle\int_{\Xi_1} e^{-\frac{1}{2a}\Sigma_i \xi_i^2} d\xi_1 \ldots d\xi_n = C^{te} = \alpha \\ 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

Considérons l'intégrale (4-7) : l'intégrant présente une symétrie sphérique ; pour exploiter cette symétrie, il est avantageux d'effectuer un passage en coordonnées sphériques ; soit donc la boule centrée à l'origine, de rayon r ; soit $\mathcal{S}_{\Xi_1}(r)$ la portion de la surface de cette boule intérieure au domaine Ξ_1. Alors l'intégrale (4-7) devient :

$$(4\text{-}8)\quad \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \times \frac{1}{a^{n/2}} \times \int_0^\infty dr \int_{\mathcal{S}_{\Xi_1}(r)} e^{-\frac{r^2}{2a}}\, dS = \alpha$$

où dS désigne l'élément d'aire superficielle sur la sphère. Considérons maintenant l'intégrale (4-8) ; l'intégrant $e^{-\frac{r^2}{2a}}$ ne dépend pas du point choisi sur la surface $\mathcal{S}_{\Xi_1}(r)$; par suite l'expression (4-8) se réduit à l'intégrale simple :

$$(4\text{-}9)\quad \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \; \frac{1}{a^{n/2}} \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2a}}\, S_{\Xi_1}(r)\, dr = \alpha$$

où $S_{\Xi_1}(r)$ désigne l'aire de la surface $\mathcal{S}_{\Xi_1}(r)$. La relation (4-9) définit une équation intégrale par rapport à la fonction $S_{\Xi_1}(r)$. Cette équation admet la solution évidente :

$$(4\text{-}10)\qquad S_{\Xi_1}(r) = \Sigma \times r^{n-1}$$

où Σ est une constante complètement déterminée par l'équation (4-9).

On a :

$$(4\text{-}11)\quad \alpha = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \times \frac{1}{a^{n/2}} \times \Sigma \times \int_0^{\infty} \times e^{-\frac{r^2}{2a}} r^{n-1}\, dr$$

relation qui s'écrit encore :

$$(4\text{-}12)\quad \boxed{\alpha = \Sigma \times \frac{1}{2\times\pi^{n/2}} \times \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

Remarque : D'après la structure de la solution (4-10), Σ peut être interprétée comme l'angle solide de la surface $\mathcal{S}_{\Xi_1}(r)$, vu de l'origine.

Il reste à montrer l'unicité de la solution de l'équation intégrale (4-9). Pour cela, il suffit de vérifier que l'opérateur intégral défini par :

$$(4\text{-}13)\quad \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2a}} f(r)\, dr$$

est inversible.

Ceci est le cas, car, moyennant un changement de variables approprié, (4-13) devient une transformée de Laplace et il est bien connu que la transformation de Laplace et inversible.

Ainsi toutes les solutions de l'équation (4- 9) sont du type (4-10), et, visiblement, la relation (4-10) suffit à les caractériser. On a donc la proposition suivante :

"Considérons laboule de centre 0 et de rayon r, et soit $\mathcal{S}_{\Xi_1}$ (r) la portion de la surface de cette boule intérieure ou domaine Ξ_1 . Pour que Ξ_1 définisse un test semblable, il suffit que l'angle solide de $\mathcal{S}_{\Xi_1}$ (r) vu de l'origine soit constant lorsque r varie".

IV - 2- RECHERCHE de L'ELEMENT OPTIMAL de la FAMILLE.

Nous devons maintenant, parmi toutes les régions Ξ_1 satisfaisant la condition

$$S_{\Xi_1}(r) = \Sigma \times r^{n-1}$$

déterminer celle qui maximise la probabilité de détection moyenne :

$$(4\text{-}14) \quad \beta(\Xi_1) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\Xi_1} d\xi_1 \ldots d\xi_n \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{a^{n/2}} e^{-\frac{1}{2a}\Sigma_i(\xi_i - \mu\mu_i)^2} q(\mu)\,da\,d\mu.$$

Puisque la condition établie précédemment concerne les surfaces $\mathcal{S}_{\Xi_1}(r)$, il est avantageux d'effectuer dans (4-14) un passage en coordonnées sphériques. Il vient ainsi :

$$(4\text{-}15)\quad \beta(\Xi_1) = \int_0^\infty dr \int_{\mathcal{S}_{\Xi_1}(r)} dS \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{a^{n/2}} e^{-\frac{1}{2a}\Sigma_i(\xi_i - \mu\,\mu_i)^2} p(a)\, q(\mu)\,da\,d\mu.$$

Maximiser $\beta\,(\Xi_1)$ équivaut à maximiser en tout point $r = \sqrt{\Sigma_i \xi_i^2}$ la fonction :

$$(4\text{-}16)\quad \int_{\mathcal{S}_{\Xi_1}(r)} dS \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{a^{n/2}} e^{-\frac{1}{2a}\Sigma_i(\xi_i - \mu\,\mu_i)^2} p(a)\, q(\mu)\, da\,d\mu$$

En isolant le terme qui dépend de $\mathcal{S}_{\Xi_1}(r)$, il vient :

$$(4\text{-}17)\quad \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2a}\left[r^2+\mu^2\sum_1^n \mu_i^2\right]} \frac{1}{a^{n/2}}\, p(a)q(\mu)\,da\,d\mu \int_{\mathcal{S}_{\Xi_1}(r)} e^{\frac{\mu}{a}\sum_i \xi_i\mu_i}$$

La meilleure maximisation possible d'une intégrale du type (4-17) est celle qui maximise la fonction :

$$(4\text{-}18)\quad \int_{\mathcal{S}_{\Xi_1}(r)} e^{\frac{\mu}{a}\sum_i \xi_i\mu_i}$$

en tout point a et μ, lorsque les données du problème le permettent. Or μ et a sont positifs ; par suite le meilleur choix de $\mathcal{S}_{\Xi_1}(r)$ est celui pour lequel le produit scalaire entre $\vec{\xi}$ et $\vec{\mu}$ est le plus grand possible ; par raison de symétrie, la surface $\mathcal{S}_{\Xi_1}(r)$ optimale est la calotte sphérique de révolution, d'axe $\vec{\mu}$, d'angle solide Σ ; cette surface est évidemment indépendante de a et μ : elle maximise également la probabilité de détection conditionnelle.

Cette calotte sphérique engendre un cône de révolution d'axe $\vec{\mu}$ lorsque r varie ; ce cône est la région critique optimale cherchée.

Soit θ le demi angle au sommet de ce cône ; l'intérieur de la région critique peut être indifféremment défini par une condition en cosinus :

$$\cos(\vec{\xi},\vec{\mu}) > \cos\theta$$

$$(4\text{-}19)\quad \frac{\sum_1^n \xi_i\mu_i}{\sqrt{\sum_i \mu_i^2}\,\sqrt{\sum_i \xi_i^2}} > \cos\theta$$

ou par une condition en cotangente,

$$\text{cotg}(\vec{\xi}, \vec{\mu}) > \text{cotg}\ \theta$$

$$(4\text{-}20) \qquad \frac{\Sigma_i \xi_i \mu_i}{\sqrt{\Sigma_i \mu_i^{\,2}} \ \sqrt{\Sigma_i \xi_i^{\,2} - \frac{(\Sigma_i \xi_i \mu_i)^2}{\Sigma_i \mu_i^{\,2}}}} > \text{cotg}\ \theta$$

La forme (4-20) est la <u>forme habituelle du test de Student</u> : le dénominateur obéit alors à une loi de χ^2 à $(n - 1)$ degré de liberté sous H_0 comme sous H_1 ; il constitue une "référence bruit seul" pour l'estimation de la puissance inconnue [5].

Nous utilisons dans la suite la forme (4-19) ; dans l'espace des valeurs observés de $\vec{X}$, l'inégalité (4-19) s'écrit, compte tenu de (4-3) :

$$\frac{\vec{X}^T \Gamma^{-1} \vec{S}}{\sqrt{\vec{S}^T \Gamma^{-1} \vec{S}} \ \sqrt{\vec{X}^T \Gamma^{-1} \vec{X}}} > \cos\ \theta$$

En laissant de côté la constante $\sqrt{\vec{S}^T \Gamma^{-1} \vec{S}}$, et en normalisant la forme quadratique $\vec{X}^T \Gamma^{-1} \vec{X}$ par $\frac{1}{n}$, il vient le test $T_2(\vec{X})$, étudié ci dessous.

$$(4\text{-}21) \qquad \boxed{T_2(\vec{X}) = \frac{\vec{X}^T \Gamma^{-1} \vec{S}}{\sqrt{\frac{1}{n} \vec{X}^T \Gamma^{-1} \vec{X}}} > k}$$

La forme (4-21) est intuitivement plus satisfaisante : elle montre que l'observation est normalisée par une estimation de l'écart-type du bruit.

Au terme de cette partie théorique on constate que les tests obtenus dépendent nettement de la manière de poser le problème, ce qui ne doit pas nous étonner. Le cadre limité de cet exposé ne nous permet pas d'approfondir le lien entre ces tests et ceux dit "uniformément plus puissants". Mais pour le praticien la qualité d'un test est liée aux courbes opérationnelles de réception qui sont construites dans la seconde partie de cet exposé.

ANNEXE

Transrormations linéaires qui "blanchissent" l'observation dans le cas discret fini.

Soit $\vec{X}$ une v.a. n-dimensionnelle non dégénérée $N(0, a\Gamma)$. Nous cherchons à caractériser les transformations linéaires quiblanchissent l'observation $\vec{X}$, c'est à dire qui lui substituent la v.a. $\vec{\xi}$ $N(0, aI)$, I : matrice identité
Ces transformations sont représentées par des matrices T :

$$\vec{\xi} = T\vec{X} \tag{A 1}$$

et satisfont la condition :

$$E\vec{\xi}\,\vec{\xi}^{\,T} = a\,I. \tag{A 2}$$

Compte-tenu de (A 1), et de la relation :

$$E\,\vec{X}\vec{X}^{\,T} = a\,\Gamma$$

l'équation (A 2) s'écrit :

$$E\,T\vec{X}\,\vec{X}^{\,T}\,T^{T} = T\,\Gamma\,T^{T} = I. \tag{A 3}$$

Cette dernière égalité montre que T est nécessairement non singulière ; l'équation (A - 3) peut donc être mise sous l'une des formes équivalentes :

$$\Gamma = T^{-1}\,(T^{-1})^{T} \tag{A 4}$$

(A 5) $(T^{-1})^T \Gamma^{-1} T^{-1} = I.$

On reconnait dans la forme (A 4) un problème de factorisation de la covariance, et dans la forme (A 5) un problème de réduction de la forme quadratique $\vec{X}^T \Gamma^{-1} \vec{X}$ à une somme de carrés ; cette dernière interprétation est spécialement intéressante : elle nous permet d'écrire immédiatement :

(A 6) $\vec{X}^T \Gamma^{-1} \vec{X} = \Sigma_i \xi_i^2$

Soit maintenant $\vec{\mu}$ l'image du signal dans l'une quelconque des transformations, solutions de (A 3).

On a évidemment :

(A 7) $\vec{S}^T \Gamma^{-1} \vec{S} = \Sigma_i \mu_i^2$

et, en considérant la forme bilinéaire associée $\vec{X}^T \Gamma^{-1} \vec{S}$:

(A 8) $\vec{X}^T \Gamma^{-1} \vec{S} = \Sigma_i \xi_i \mu_i$

Les relations (A 6), (A 7) et (A 8) sont les relations cherchées.

REFERENCES

[1] B. PICINBONO et G. VEZZOSI, Modèle de Bruit non gaussien, Application à la théorie de la détection, Colloque GRETSI; 1969, p. 727.

[2] R.L. SPOONER, On the detection of known Signal in a non Gaussian noise process, Jour. Acoust. Soc. Amer., 44, 142, (1968).

[3] F.B. TUTEUR, On the detection of a moving noise in a non stationnary noise background, Jour. Acoust. Soc. Amer., 44, 912, (1968).

[4] B. PICINBONO et G. VEZZOSI, Détection d'un Signal certain dans un bruit non stationnaire et non gaussien, à paraître dans les Annales des Télécommunications.

[5] H. MERMOZ, Essai de Synthèse sur les antennes de détection optimales et adaptatives, Annales des Télécommunications, T. 25, N° 7-8, 1970.