TROISIEME COLLOQUE SUR LE

TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

Nice 1er au 5 juin 1971

TEST ENTRE DEUX HYPOTHESES POUR UN PROCESSUS DEFINI PAR UNE EQUATION DIFFERENTIELLE STOCHASTIQUE

par M. LAIDAIN
Attaché de Recherches
au CENTRE D'ETUDES THEORIQUES DE LA DETECTION
ET DES COMMUNICATIONS,
5 bis, Avenue de la Porte de Sèvres
75 - PARIS 15° -

RESUME Observant le processus défini par (1), On donne sous certaines conditions (théorème 1), le couple de décision optimal (τ^*, d^*), où τ^* est le temps d'arrêt où l'on prend la décision $d^*(\theta = 0$ ou $\theta = 1)$.

SUMMARY : Observing the process $\xi(t,\omega)$ defined by the stochastic equation : $d\xi(t,\omega) = \theta A(t,\omega)dt + dW(t,\omega)$ (where $W(t,\omega)$ is the Wiener process), a theorem is given under certain conditions for the couple of optimal decision (τ^*, d^*), where τ^* is the stopping time when is taken the decision d^* ($\theta = 0$ or $\theta = 1$).

Test entre deux hypothèses pour un processus défini par une équation différentielle stochastique.

Position du problème, notations

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité $\{W(t,\omega)\}_{t\geqslant o}$, le processus de Wiener : $W(o,\omega)= o$, $EW(t,\omega)=0$, $E\,W^2(t,\omega)=t, \forall t\geqslant o$.

On observe le processus $\{\xi(t,\omega)\}_{t\geqslant o}$ défini par (1).

$$(1)\begin{cases} d\xi(t,\omega)= \theta A(t,\omega)dt+dW(t,\omega) \\ \xi(o)=o \ . \end{cases}$$

Le paramètre θ (non aléatoire) prend deux valeurs 0 et 1 (respectivement : Hypothèses H_o (bruit seul) H_1 signal plus bruit).

On suppose réalisées les conditions pour que $\{\xi(t,\omega)\}$ existe et soit unique (à une équivalence stochastique près).

On sait alors, que l'ensemble des $\omega\in\Omega$ tels que les trajectoires $W(\cdot,\omega)$ soient continues à une probabilité égale à un (de même pour $\xi(\cdot,\omega)$).

On donnera plus loin les hypothèses complètes sur A.

Il est alors naturel de se placer dans l'espace $\Omega = ([0,+\infty),\mathbb{R})$ des fonctions $x(\cdot)$ continues de $[0,+\infty)$ dans $\mathbb{R}$ qui s'annulent en 0.

On notera ${}_t$ la σ_ algèbre engendrée par les cylindres jusqu'à l'instant t.

Soient $t_o= o < t_1 <- - -<t_{n-1} \leqslant t_n \leq t$.

On construit une mesure $P_{o,t}$ sur $(\Omega_t,\mathcal{F}_t)$ de la façon suivante :

../..

$$P_{o,t}\Big(\bigcap_1^n C_{tk}(A_k)\Big) = P_o\,\{x\,(\cdot) : x(t_1)\in A_1, \text{---}, x(t_n)\in A_n\}$$

$$=(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} (t_i-t_{i-1})^{-1/2} \int_{A_1}\text{---}\int_{A_n} \exp\{-\frac{1}{2}\sum_1^n \frac{(x_i-x_{i-1})^2}{t_i-t_{i-1}}$$

$$x\, dx_1 \text{---} dx_n$$

où $A_1, --, A_n$ sont des Boréliens de $\mathbb{R}$ et on peut prolonger $P_{o,t}$ à Ω_t de façon unique.

Soit $\mathcal{F} = \sigma\{\bigcup_{t\geq o} \mathcal{F}_t\}$. On définit P_o sur $(\Omega, \mathcal{F})$ comme l'unique mesure dont les restrictions à $(\Omega_t \mathcal{F}_t)$ sont $P_{o,t}$; $\forall t \geq o$. On pose $W\,(t,x\,(\cdot)\,) = x\,(t)$.

Alors $W(t,x(\cdot)\,)$ est par rapport à $P_o, \mathcal{F}_t$ un processus de Wiener adapté aux $\mathcal{F}_t$, $\forall \epsilon \geq o$.

On va définir sur $\mathbb{R}^+ x\, \Omega$, un processus $A\,(t,x(\cdot)\,)$ tel que

H_o) $A(t,x(\cdot)\,)$ soit $\mathcal{F}_t$ mesurable pour un t fixé

H_1) $|A(t,x(\cdot)| \leq C$ pour presque tout (t,x)

On pose $A\,(t,x(\cdot)\,) = A\,\big(t,y(\cdot)\big)$ si $x(s) = y(s)$ $\forall\ s \leq t$.

Alors, on a le théorème suivant dû à Girsanov.

<u>Théorème</u> : Soit $[\mathcal{H}] = \{W(s,x), P_{o,t}, \Omega_t, \mathcal{F}_s\}$ le processus de Wiener. Soit $A(s,x)$ défini comme plus haut Posons : pour $x\,(\cdot) \in \Omega_t$

Test entre deux hypothèses pour un processus défini par une équation différentielle stochastique.

$$P_{1,t}(dx) = \exp\{\mathcal{J}_o^t(A)\}P_{o,t}(dx)$$

ou $\mathcal{J}_s^t(A) = \int_s^t A(u,x)dW(u,x) - \frac{1}{2}\int_s^t A^2(u,x)du$

(2) Posons $\xi(t,x_o) = W(t,x) - \int_o^t A(s,x)ds$

alors $P_{1,t}(\Omega_t) = 1$

et $\boxed{\tilde{\tilde{H}}} = \{\xi(s,x), P_{(1,t)}, \Omega_t, \quad_s\}$ est un processus de Wiener.

Remarque : On définit de la même façon $P_1 \; (\Omega, \vec{\mathcal{F}})$

$\xi(t,x)$ est pour P_1 le processus de Wiener

(3) et on a $\frac{dP_{1,t}}{dP_{o,t}} = \frac{dP_1}{dP_o}\Big|_{F_t} = \exp\{\mathcal{J}_o^t(A)\}.P_o$ p.p

Soit τ un temps d'arrêt par rapport à la famille $\mathcal{F}_t$ (i e $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq o$), tel que

(4) $E_i \int_o^\tau A^2(s,x)ds < +\infty \quad i = o,1$

On note $\tau \in \mathfrak{m}(\xi)$. Soit d une application $\mathcal{F}_\tau$ mesurable qui prend deux valeurs 0 et 1 .

$\mathcal{F}_\tau = \{ A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq o\}$

On note $d \in \mathcal{D}_\tau$ et $\Delta = \{\delta = (\tau, d); \tau \in \mathfrak{m}(\xi), d \in \mathcal{D}_\tau\}$

α et β positifs étant donnés, on note par $\Delta_{\alpha,\beta}(\xi)$, l'ensemble des règles de décision δ pour lesquelles ../..

$P_1(d=o) \leqslant \alpha$, $P_o \ (d=1) \leqslant \beta$

c'est à dire les règles δ pour lesquelles les probabilités de non-détection et de fausse alarme sont bornées par α et β .

Le problème est celui-ci, existe t-il dans $\Delta_{\alpha,\beta}$), $\delta^* = \tau^*, d^*)$ qui minimise(4)?

Nous démontrons le résultat suivant :

Théorème 1 : Soient α et $\beta > o$, $\alpha+\beta < 1$, $A(t)$ satisfait aux hypothèses H_o et H_1, alors dans $\Delta_{\alpha,\beta}$, il existe $\delta^*=(\tau^*,d^*)$ telle que pour tout $\delta=(\tau,d) \in \Delta_{\alpha,\beta}$.

$$E_i \int_o^{\tau^*} A_s^2 \, ds \leqslant E_i \int_o^{\tau} A_s^2 \, ds \quad i=0,1; \tau \in m(\xi)$$

et $\tau^* = \inf \{t \geqslant o : \psi_t = \tilde{A} \text{ ou } \tilde{B}\}$

$$d^* = \begin{cases} 1 \text{ si} & \psi_{\tau^*} \geq \tilde{B} \\ 0 \text{ si} & \psi_{\tau^*} \leq \tilde{A} \end{cases}$$

$$\psi_t(x) = \ln \varphi_t(x) = \int_o^t A_s \, dx_s - \frac{1}{2} \int_o^t A_s^2 \, ds$$

$$\psi_o(\omega) = o \quad \tilde{A} = \ln \frac{\alpha}{1-\beta} \ , \ \tilde{B} = \ln \frac{1-\alpha}{\beta}$$

$$E_o \int_o^{\tau^*} A_s^2 \, ds = 2\,\omega(\beta,\alpha), E_1 \int_o^{\tau^*} A_s^2 \, ds = 2\,\omega(\alpha,\beta)$$

$$\omega(x,y) = (1-x)\ln \frac{1-x}{y} + x \ln \frac{x}{1-y}$$

Remarque : Deux méthodes sont données : la première directe la seconde se ramène au cas de Shyraiev [4] pages 180-188)

Test entre deux hypothèses pour un processus défini par une équation différentielle stochastique.

<u>Lemme 1</u> : Soit $\{W_t\}_{t \geqslant o}$, un processus de Wiener

$W_o = o$, $EW_t = o$, $E\,W_t^2 = t$, $\forall\, t \geqslant o$.

Supposons qu'il existe $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geqslant o}$ telle que

$\mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2}$ si $t_1 < t_2$ et $W_{t+h} - W_t$ est indépendante des évènements de $\mathcal{F}_t$ pour tout $h > o$, W_t est $\mathcal{F}_t$ mesurable pour chaque $t \geqslant o$.

Alors si $A(t)$ satisfait aux hypothèses H_o, H_1 et $\tau = \tau(\omega)$ un temps d'arrêt (pour la famille $\mathcal{F}_t$) tel que

$E \int_o^\tau A^2(s)ds < \infty$ alors :

$$E \int_o^\tau A(s)dW(s) = o$$

<u>Preuve</u> : Cf. Gikhman-Skorokhod [2]

Considérons la fonction $A_N(t) = A(t)$ pour $t \leqslant N$ et $|A(t)| \leqslant N$ et zéro dans les autres cas. Alors :

$$E \int_o^\tau A_N(t)dW(t) = 0$$

et faisant tendre N vers l'infini, on a le résultat.

Posons $X_t^x(\omega) = x + \phi_t(\omega)$; $X_t^o(\omega) = \phi_t(\omega)$

$$\tau_{A,B}^x = \inf\{t \geqslant o : X_t^x(\omega) = A \text{ ou } B\}$$

$$\alpha(x) = P_1(X_{\tau_{A,B}^x}^x = A\}, \beta(x) = P_o(X_{\tau_{A,B}^x}^x = B) \text{ où}$$

(5)

$x \in [A,B], A < o, B > 0.$

Test entre deux hypothèses pour un processus défini par une équation différentielle stochastique.

Lemme 2 : Posons $m_i(x) = E_i \int_0^{\tau_{A,B}^x} A^2(s)ds$

$A \leqslant x \leqslant B$, $i = 0, 1$.

Alors $m_i(x) \in C^2(A,B)$ et satisfait à l'équation

$$\frac{1}{2} m_i''(x) + \frac{(-1)^{i+1}}{2} m_i'(x) = -1$$

$m_i(A) = m_i(B) = 0$.

Preuve 1 : Pour abréger, posons $X_t = X_t^x$, $\tau_{A,B}^\tau = \tau$

Examinons d'abord le cas $i = 0$. Soit V, une fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2 fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $V(A) = V(B) = 0$ et $\frac{V''}{2} - \frac{V'}{2} = 0$

Quand $\theta = 0$; $\xi_t = W(t)$

$$X_t = x + \int_0^t A(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t A^2(s)ds ,$$

$$dX_t = -\frac{1}{2} A^2(t)dt + A(t)dW(t)$$

Par la formule de Ito [2]

$$dV(X_t) = +\frac{1}{2} A^2(t)(V''-V')dt + V' A(t)dW(t)$$

d'où $V(X_t) = V(x) + \int_0^t V'A(s)dW(s) + \int_0^t A^2(s)\frac{V''-V'}{2} ds$

posons $\tau_T = \min.(\tau, T)$

pour $t < \tau_T$, $X_t^\cdot \in]a,b[$ avec probabilité 1. D'où, pour $t < \tau_T$, $\frac{1}{2}(V''(X_t) - V'(X_t)) = 1$.

alors $V(X_{\tau_T}) = V(x) + \int_0^{\tau_T} V'A(s)dW(s) - \int_0^{\tau_T} A^2(s)ds$

$$E_0\ V(X_{\tau_T})=E_0\ V(x)-E_0\int_0^{\tau_T} A^2(s)ds = V(x)-E_0\int_0^{\tau_T} A^2(s)ds$$

d'après le lemme 1.

$$E_0 \int_0^{\tau_T} A^2(s)ds = V(x)-E_0\ V(X_{\tau_T})$$

lorsque $T \to +\infty$: $\tau_T \to \tau$ en croissant

et $E_0 \int_0^{\tau_T} A^2(s)ds$ est uniformément bornée en T.

Alors $E_0 \int_0^{\tau_T} A^2(s)ds \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} E_0 \int_0^{\tau} A^2(s)ds < \infty$

Donc $E_0 \int_0^{\tau} A^2(s)ds = \lim\limits_{T\to\infty} E_0 \int_0^{\tau_T} A^2(s)ds =$

$$= V(x)-\lim_{T\to\infty} E_0\ V(X_{\tau_T}) = V(x)$$

De même , pour $i = 1$

Lemme 3 : Soit α et β définis par (5)
alors $\alpha \in C^2[A,B]$ et satisfait à l'équation

$\alpha'' + \alpha' = 0 \quad \alpha(A)=1,\ \alpha(\beta)= 0$

et $\beta \in C^2\ [A,B]$ et satisfait à l'équation

$\beta'' - \beta' = 0,\ \beta(A)= 0,\ \beta(B)= 1$

Preuve : Par rapport à P_1 $X_t^x = x + \int_0^t A(s)dW(s) +$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^t A^2(s)ds\ .$$

$$dX_t^x = \frac{1}{2} A^2(t)dt + A(t)dW(t)$$

Soit $V(x)\in C^2(-\infty,+\infty)$, alors pour la formule de Ita (Gikhman-Skorokhod [2] page 25] ../..

Test entre deux hypothèses pour un processus défini par une équation différentielle stochastique .

$$dV(X_t^x) = \{\frac{1}{2}\frac{dV}{dt}(\quad)A^2(t)+\frac{1}{2}\frac{d^2V}{dx^2}(X_t^x)\}\quad dt +$$

$$+ \frac{dV}{dt}(X_t^x)A(t)dW(t)$$

Par le même raisonnement, que dans le lemme 2, on trouve

$$E_1 \; V(X_\tau^x) = E_1 V(x) = V(x)$$

Or X_τ^x ne prend que les valeurs A et B, donc

$$E_1 \; V(X_\tau^x) = 1 \; P_1(X_\tau^x = A) + 0 \; P_1(X_\tau^x = B)$$

$$= P_1(X_\tau^x = A) = V(x)$$

de même pour β

1ère démonstration du théorème

Utilisant la démonstration de Shyraiev [4], il est facile de voir que sous les hypothèses données

(5)
$$E_0 \int_0^\tau A^2(s)ds \geqslant 2\,\omega(\beta,\alpha)$$
$$E_1 \int_0^\tau A^2(s)ds \geqslant 2\,\omega(\alpha,\beta)$$

$\forall \tau \in m(\xi)$.

Simple calcul et utilisation du lemme (1), puis le même raisonnement que Shyraiev [4]; page 186. Toutefois, le livre de Shyraiev, parce qu'en russe, étant peu connu en France, nous redonnons la démonstration

Soit $\tau \in m(\xi)$

$$E_1 \ln \varphi_\tau(\omega) = E_1\{\int_0^\tau A(s)[d\tilde{W}_s + A(s)ds] - \frac{1}{2}\int_0^\tau A^2(s)ds\}$$

$$= \frac{1}{2} E_1 \int_o^{\tau} A^2(s)ds.$$

D'un autre côté :

$$E_1 \ln \varphi_\tau(\omega) = - E_1 \ln \frac{dP_o}{dP_1} = - \int_{\{\omega : d(\omega)=1\}} \ln \frac{dP_o}{dP_1} dP_1 -$$

$$- \int_{\{\omega : d=o\}} \ln \frac{dP_o}{dP_1} dP_1 = - P_1(d(\omega)=1) \int_\Omega \ln \frac{dP_1}{dP_o} dP_1(\omega | d(\omega)=1)$$

$$- P_1(d(\omega)=o \int_\Omega \ln \frac{dP_o}{dP_1}(\omega | d(\omega)=0) \geqslant$$

$$(7) \quad \geqslant - P_1(d(\omega)=1 \ln \int_\Omega \frac{dP_o}{dP_1} dP_1(\omega | d(\omega)= 1) -$$

$$- P_1(d(\omega)=o \ln \int_\Omega \frac{dP_o}{dP_1} dP_1 (\omega | d(\omega)= 0)$$

où nous avons utilisé l'inégalité de Jensenn

$$\ln E \eta(\omega) \geqslant E \ln \eta(\omega)$$

vraie pour toute variable aléatoire non négative.

<u>Remarque</u> : Si $P_1(d(\omega) = i) = o$ alors

$$P_1(d(\omega)=i) . \int_\Omega \ln \frac{dP_o}{dP_1} dP_1(\omega) d(\omega)=i)$$

est par définition égale à 0.

Transformant le membre droit de (7), nous trouvons :

$$E_1 \ln \varphi_\tau(\omega) \geqslant - P_1(d(\omega)=1) \ln \left[\frac{1}{P_1(d(\omega)=1)} \int_{d=1} \frac{dP_o}{dP_1} dP_1 - \right.$$

$$- P_1(d=o) \ln \left[\frac{1}{P_1(d=o)} \int_{d=o} \frac{dP_o}{dP_1} dP_1 \right] =$$

$$= - P_1(d=1)\ln \frac{P_o(d=1)}{P_1(d=1)} - P_1(d=o)\ln \frac{P_o(d=o)}{P_1(d=o)} \geqslant$$

$$\geqslant (1-\alpha)\ln \frac{\beta}{1-\alpha} - \alpha \ln \frac{1-\beta}{\alpha} = (1-\alpha)\ln \frac{1-\alpha}{\beta} + \alpha \ln \frac{\alpha}{1-\beta} = \omega(\alpha,\beta)$$

D'après le lemme 3 appliqué à (τ^*, d^*)

$$P_1(d^* = 0) = \alpha(0) = \alpha$$

$$P_o(d^* = 1) = \beta(o) = \beta$$

D'autre part, le lemme 2 donne (Cf. Shyraiev [4])

$$E_o \int_o^{\tau^*} A^2(s)ds = 2\,\omega(\beta,\alpha) \text{ de même pour } E_1$$

Le théorème est démontré.

<u>2ème démonstration</u>

Elle s'appuie sur un changement de temps et ramène le cas étudié au cas de Shyraiev. Posons :

$$\tau^* = \inf \{t \geqslant o : \phi_t = A \text{ ou } B\}$$

$$\tau_h = \inf \{t \geqslant o : \int_o^t A^2(s)ds = h\}, h > o, \tau_o = o$$

$$\sigma = \inf \{ h \geqslant o : \phi_{\tau_h} = A \text{ ou } B \}$$

<u>Lemme 5</u> : $\tau^* = \tau_\sigma (P_o pp)$

<u>Preuve</u> : Soit ω_o fixé : Montrons que pour tout $t\ [o, \tau_{\sigma(\omega_o)}(\omega_o)[$ Alors $A < \phi_t(\omega) < B$ sauf $\omega_o \in N_o$ de mesure P_o nulle. S'il existait $t_o, \tau_{\sigma(\omega_o)}(\omega_o)$ tel que ../..

$\phi_{t_o}(\omega_o)$ =A ou B. Alors sauf pour $\omega_o \in N_o$, il existerait h_o tel que to = $\tau_{h_o}(\omega_o)$ donc $\phi_{\tau_{ho}(\omega_o)}(\omega_o)$ = A ou B ceci impliquerait $h_o \geqslant \sigma\ (\omega_o)$ or $\tau_{h_1} \geqslant \tau_{h_2}$ si $h_1 \geqslant$. Donc to = $\tau_{h_o}(\omega_o)$ $\tau\sigma(\omega_o)$ (ω_o) ce qui est impossible. Donc

$t < \tau_{\sigma(\omega_o)}(\omega_o) \Rightarrow t < \tau^*(\omega_o)$. Donc $\tau_{\sigma(\omega_o)}(\omega_o) \leqslant \tau^*(\omega_o)$.

Maitenant, posons $\tau^*(\omega_o)=t^*$. Nous avons $\phi_{t^*}(\omega_o)$=A ou B et soit h^* tel que $\int_0^{t*} A^2(s)ds = h^*$.

Nous disons : h^* est le plus petit des $h \geqslant o$ pour lesquels $\phi_{\tau_{h(\omega_o)}^{**}}(\omega_o)$ = A ou B alors $t^{**} < t^*$ ce qui est impossible, donc $\tau_\sigma(\omega_o) \geqslant \tau_{h^*}(\omega_o)$

<u>Lemme 6</u> : Posons $\int_0^{\tau_h} A(s)d\xi_s = \tilde{\xi}(h)$, alors $\tilde{\xi}(o)= o$,

$$d\tilde{\xi}(h)=dh+dW(h)$$

<u>Preuve</u> : $\tilde{\xi}(o)=o$ évident, $\tilde{\xi}_t$ est à trajectoires continues.

Soit Δ assez petit : $\Delta\tilde{\xi}_h = \tilde{\xi}(h+\Delta)-\tilde{\xi}(h)=\int_0^{\tau_{h+\Delta}} A(s)d\xi_s - \int_0^{\tau_h} A(s)d\xi_s$

Or $\tau_{h+\Delta} \leqslant \tau_h$ presque sûrement

$$\Delta\ \tilde{\xi}_h = \Delta + \int_{\tau_h}^{\tau_{h+\Delta}} A(s)dW(s)$$

On voit que $E\ \Delta\tilde{\xi}(h)= \Delta$

$$E\ (\Delta\xi(h)\ )^2 = \Delta+\Delta^2 \simeq \Delta$$

../..

Le théorème de Dobb [7] donne le résultat, or

$$E_i \int_o^{\tau^*} A^2(s)ds = M_i \sigma \qquad i = o, 1$$

et $\sigma = \inf \{ h \geqslant o : \xi_h - \frac{h}{2} = A \text{ ou } B \}$

On est ramené au cas de Shyraiev [4], quand $r=1$, $\sigma = 1$;
et donc

$$E_1 \sigma^* = 2\, \omega(\alpha,\beta)$$

$$E_o \sigma^* = 2\, \omega(\beta,\alpha)$$

Le lemme 2 termine le théorème.

Nous tenons à remercier le Professeur Shyraiev sous la direction duquel a été effectué ce travail.

<u>Conclusion</u> : Nous avons insisté dans la première partie sur l'espace des fonctions continues, pour pouvoir travailler sur les réalisations du processus. Alors, toute trajectoire observée pourra être considérée comme une trajectoire du processus de Wiener soit pour la mesure P_o, soit pour la mesure P_1.

On peut penser que l'hypothèse $|A| \leqslant C$ peut être affaiblie, mais dans la plupart des applications, cette hypothèse est vérifiée.

Sans doute, plus près des applications serait l'étude du cas où $\xi(t)$ présenterait des discontinuités.

Test entre deux hypothèses pour un processus défini par une équation différentielle stochastique.

BIBLIOGRAPHIE

1 Skorokhod : recherches dans la théorie des processus aléatoires - Edition de l'Université de Kiev (traduction anglaise Addison-Wesley 1965).

2 Gikhman-Skorokhod : Equation différentielles stochastiques - Edition "Nauka"Moscou, 1968 (en russe).

3 Girsanov : Dans la revue "Théorie des probabilités et ses applications "Tome 5, n 3, 1960 pages 314 - 330 ".

4 Shyraiev : Analyse séquentielles statistique "Nauka" 1969 (en russe).

5 Duncan : Likelihood functions for stochastic signal in white noise, Information and control 16, 303-310 (1970).

6 Shyraiev et Lipser : Sur la densité des mesures de probabilité des processus de type diffusion : yopekhi matematicheskhix nauk, 1969 (en russe).

7 Doob : Stochastic Processes : Wiley 1956.