



## TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

Nice 1<sup>er</sup> au 5 juin 1971ITERATION STOCHASTIQUE ET DETECTION

César MACCHI

Ingénieur Principal de l'Armement  
Service Technique des Constructions et Armes Navales.

-----

**RESUME**

On propose un théorème d'itération stochastique général. On l'utilise pour résoudre l'équation  $R\vec{H}_* - \vec{S} = 0$ , où  $\vec{S}$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^L$  connu, et où  $R$  est une matrice  $L \times L$ , appréhendée par une suite infinie de matrices aléatoires  $R_i$ , de valeur moyenne  $R$ . Ce théorème permet en particulier de concevoir un filtre autoadaptatif pour détecter un signal certain, ou un signal de forme inconnue, dans un bruit de corrélation inconnue.

**SUMMARY**

A general stochastic approximation theorem is presented, and used to solve the equation  $R\vec{H}_* - \vec{S} = 0$ , where  $\vec{S}$  is a known  $\mathbb{R}^L$  vector, and where  $R$  is an  $L \times L$  matrix.  $R$  is accessible only through an infinite sequence of random matrices  $R_i$ , having all  $R$  as mean value. Particularly, this theorem provides a means to design an adaptive filter to detect a known or unknown signal in a noise of unknown correlation function.

ITERATION STOCHASTIQUE ET DETECTION

César MACCHI

1. - INTRODUCTION.

Très fréquemment, la clef de problèmes de détection et d'estimation donnée par la théorie statistique de la décision, est contenue dans un vecteur  $\vec{H}_*$  de  $\mathbb{R}^L$  solution d'une équation du type :

$$(1.1.) \quad R\vec{H}_* - \vec{S} = 0$$

où  $\vec{S}$  est un vecteur connu et où  $R$  est la matrice  $L \times L$  de corrélation d'un vecteur  $\vec{N}$  aléatoire, centré, stationnaire. Cependant, dans la pratique, la matrice  $R$  est souvent inconnue, et n'est appréhendée que par une suite d'échantillons  $\vec{N}_j$  de  $\vec{N}$ . Pour estimer  $\vec{H}_*$ , plusieurs auteurs [1], [2] ont repris la méthode d'itération stochastique de ROBBINS et MONRO [3], préalablement généralisé au cas multidimensionnel par BLUM [4]. Considérant l'algorithme :

$$(1.2.) \quad \vec{H}_{j+1} = \vec{H}_j + \mu_j (-\vec{N}_j \vec{N}_j^T \vec{H}_j + \vec{S})$$

ils ont montré que la suite  $\vec{H}_j$  converge en moyenne quadratique [1], ou presque sûrement [4] vers  $\vec{H}_*$  sous un certain nombre de conditions ; celles-ci nous ont paru inacceptables dans la pratique, parce qu'elles conduisent toujours à supposer que la norme de  $\vec{H}_j$  est bornée :

$$(1.3.) \quad \forall j, E (\| \vec{H}_j - \vec{H}_* \|^2) < M.$$

L'application à l'algorithme (1.2.) du théorème que nous présentons dans la section 2,



## ITERATION STOCHASTIQUE ET DETECTION

permet de démontrer sa convergence en s'affranchissant de la condition (1.3.). Nous le montrons dans la section 3. Les sections 3 et 4 sont une illustration de l'intérêt de l'itération stochastique.

### 2.- ITERATION STOCHASTIQUE.

#### 2.1. Généralités.

Tous les vecteurs considérés appartiennent à  $\mathbb{R}^L$ . L'algorithme étudié est le suivant :

$$(2.1.) \quad \vec{H}_{j+1} = \vec{H}_j + \mu_j \vec{Y}_j(\vec{H}_j), \quad j = 1, 2, 3 \dots,$$

dans lequel  $\vec{H}_1$  est un vecteur quelconque,  $\mu_j$  est un nombre réel positif et la suite  $\vec{Y}_j(\vec{H})$  est une suite infinie de fonctions aléatoires (f.a.) vectorielles indépendantes de même loi, de moyenne

$$(2.2.) \quad \mathbb{E} \left\{ \vec{Y}_j \right\}(\vec{H}) = \vec{M}(\vec{H}).$$

Nous supposons que  $\vec{M}(\vec{H})$  est une application de  $\mathbb{R}^L$  dans lui-même, telle que  $\vec{H}_*$  est solution de l'équation

$$(2.3.) \quad \vec{M}(\vec{H}_*) = \vec{0}.$$

Le problème traité est la recherche de cette solution, sans connaître la fonction vectorielle  $\vec{M}(\cdot)$ , mais en disposant d'une suite  $\vec{Y}_1(\cdot), \vec{Y}_2(\cdot), \dots$  de réalisations.



ITERATION STOCHASTIQUE ET DETECTION

2.2. Définitions - Notations.

La suite  $\vec{H}_j$ , donnée par (1.1.) constitue un processus aléatoire discret dont l'espace des épreuves noté  $\Omega$  est  $(\mathbb{R}^L)^\infty$ . Nous appelons  $F_n$ , pour  $n$  entier positif, la  $\sigma$  algèbre engendrée dans  $\Omega$  par la classe des ensembles  $B_{j,A}$  pour lesquels la coordonnée  $\vec{H}_j$  appartient à  $A$ , avec  $A$  Borélien quelconque de  $\mathbb{R}^L$  et  $j \leq n$ . Il est clair que les tribus  $F_n$  sont emboîtées.

Nous introduisons une fonction numérique certaine  $f(\vec{H})$  deux fois continûment différentiable. Soient  $\vec{D}(\vec{H})$  son gradient et  $A(\vec{H})$  la matrice ( $L \times L$ ) de ses dérivées secondes. La fonction numérique  $F(\vec{H}_j + \mu_j \vec{Y}_j(\vec{H}_j))$  de la variable réelle  $\mu_j$  admet le développement de TAYLOR :

$$(2.4.) \quad f(\vec{H}_{j+1}) = f(\vec{H}_j) + \mu_j \langle \vec{D}(\vec{H}_j), \vec{Y}_j(\vec{H}_j) \rangle \\ + \frac{1}{2} \mu_j^2 \langle \vec{Y}_j(\vec{H}_j), A(\vec{H}_j + \mu_j \theta \vec{Y}_j(\vec{H}_j)) \vec{Y}_j(\vec{H}_j) \rangle$$

avec  $\theta \in ]0, 1[$ .

Posons :

$$(2.5.) \quad U(\vec{H}) = \langle \vec{D}(\vec{H}), \vec{M}(\vec{H}) \rangle$$

$$(2.6.) \quad V_a(\vec{H}) = E \left\{ \langle \vec{Y}_j(\vec{H}), A(\vec{H} + \theta_a \vec{Y}_j(\vec{H})) \vec{Y}_j(\vec{H}) \rangle \right\}$$



## ITERATION STOCHASTIQUE ET DETECTION

et affectons simplement d'un indice  $j$ , les valeurs prises par ces fonctions à la  $j$  ième itération, c'est-à-dire pour  $\vec{H} = \vec{H}_j$  et  $a = u_j$ .

En tenant compte de l'indépendance des (f.a.)  $\vec{Y}_j(\cdot)$ , l'espérance conditionnelle de (2.4.) s'écrit avec les notations précédentes :

$$(2.7.) \quad E \left[ f(\vec{H}_{j+1}) - f(\vec{H}_j) / F_j \right] = u_j U_j + \frac{1}{2} u_j^2 V_j.$$

Notons encore  $A_\epsilon$  (resp.  $B_\epsilon$ ) l'ensemble des vecteurs  $\vec{H}$  tels que  $\|\vec{H} - \vec{H}_*\| \geq \epsilon$  (resp.  $\|\vec{H} - \vec{H}_*\| < \epsilon$ ).

### 2.3. Théorème (2.3.).

S'il existe une fonction  $f(\vec{H})$  à valeurs réelles, définie sur  $\mathbb{R}^L$ , deux fois continûment différentiable, satisfaisant à :

$$C-1 \quad \forall \epsilon > 0, \inf_{\vec{H} \in A_\epsilon} f(\vec{H}) - f(\vec{H}_*) > 0 ;$$

$$C-2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \epsilon > 0, \exists \lambda(\epsilon) > 0 \text{ et } \eta(\epsilon) > 0 \text{ tels que } \forall a \in ]0, 2\lambda(\epsilon) \\ \sup_{\vec{H} \in A_\epsilon} U(\vec{H}) + \frac{1}{2} a V_a(\vec{H}) < -\eta(\epsilon) ; \end{array} \right.$$

ITERATION STOCHASTIQUE ET DETECTION

$$C-3 \quad \begin{cases} U(\vec{H}) \ll 0 \quad \forall \vec{H}; \\ \exists v \text{ et } \exists \epsilon_1 > 0 \text{ tels que } \forall \vec{H} \in B_{\epsilon_1} \text{ et } \forall 0 < a \ll 2 \lambda(\epsilon_1) \\ v_a(\vec{H}) \ll v; \end{cases}$$

alors, pour toute suite de nombres réels positifs  $\mu_j$  tels que :

$$C-4 \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j = \infty, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^2 < \infty;$$

la suite des vecteurs  $\vec{H}_j$  définie par l'algorithme (2.1.), converge presque sûrement vers le vecteur  $\vec{H}_*$ .

2.4. Démonstration.

Considérons tout d'abord la convergence de la suite  $f(\vec{H}_j)$ .

Lemme (2.4.1.).

La suite  $f(\vec{H}_j)$  de variables aléatoires (v.a.) définies par (2.1.), converge presque sûrement vers une v.a. pourvue que soient remplies les conditions C-1, C-2, C-3, C-4.

Une démonstration du lemme (2.4.1.) consiste à prouver qu'il existe un entier positif  $J_1$  tel que :

$$(2.8.) \quad E \left\{ f(\vec{H}_{j+1}) - f(\vec{H}_j) / F_j \right\} \ll \frac{1}{2} \mu_j^2 \quad \forall \text{ pour } j > J_1.$$

Il apparaît ainsi que les v.a. :

$$(2.9.) \quad \xi_j = f(\vec{H}_j) - \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{2} \mu_k^2 V$$

constituent pour  $j > J_1$ , une surmartingale qui, grâce à C-1 et C-4, est bornée inférieurement. D'après un théorème de DOOB, la suite  $\xi_j$  converge presque sûrement vers une v.a. ; par suite, d'après (2.9.), il en est de même pour la suite  $f(\vec{H}_j)$ .

Considérons maintenant la convergence de la suite  $\vec{H}_j$ .

Lemme (2.4.2.).

Dans les conditions du lemme (2.4.1.), la suite des vecteurs  $\vec{H}_j$  vérifie la propriété :

$$(2.10.) \quad \forall \varepsilon > 0, \liminf P \left\{ \vec{H}_j \in A_\varepsilon \right\} = 0.$$

Pour prouver (2.10.), nous introduisons pour tout  $\varepsilon > 0$ , la v.a.  $W_j$  définie par :

$$(2.11.) \quad W_j = \begin{cases} U_j \dots & \text{si } \vec{H}_j \in B_\varepsilon, \\ U_j + \frac{1}{2} \mu_j V_j \dots & \text{si } \vec{H}_j \in A_\varepsilon. \end{cases}$$

Il apparaît que cette v.a. est négative, et telle que :

$$(2.12.) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j E \left\{ W_j \right\} > -\infty, \text{ si } 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1,$$

ITERATION STOCHASTIQUE ET DETECTION

d'où il vient, puisque la série des  $\mu_j$  diverge,

$$(2.13.) \quad \liminf E \left\{ -W_j \right\} = 0 \text{ si } 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1.$$

L'égalité (2.13.) entraîne (2.10).

Corollaire.

Dans les conditions du lemme (2.4.1.), la suite  $f(\vec{H}_j)$  converge presque sûrement vers  $f(\vec{H}_*)$ .

Ce corollaire est une conséquence directe du lemme (2.4.2.). Or, la condition C-1 implique que  $f(\vec{H})$  ne peut tendre vers  $f(\vec{H}_*)$  sans que  $\vec{H}$  tende vers  $\vec{H}_*$ ; ce qui achève la démonstration du théorème énoncé.

Dans la suite nous illustrons ce théorème par les deux exemples d'application suivants :

- détection d'un signal certain dans un bruit de corrélation inconnue ;
- détection d'un signal inconnu dans un bruit de corrélation inconnue.



## ITERATION STOCHASTIQUE ET DETECTION

### 3.- DETECTION D'UN SIGNAL CERTAIN.

#### 3.1. Position du problème.

Considérons le problème de la détection d'un signal certain  $s(t)$ ,  $0 \ll t \ll T$ , dans un bruit  $n(t)$  supposé stationnaire, centré, de fonction de corrélation  $\Gamma(\tau)$  inconnue. Par échantillonnage de pas  $\Delta$ , les vecteurs suivants sont associés respectivement au signal et au bruit,

$$(3.1.) \quad \begin{cases} \vec{S}^T = (s(\Delta), s(2\Delta), \dots, s(L\Delta)) \\ \vec{N}_j^T = (n(j\Delta), n[(j+1)\Delta], \dots, n[(j+L-1)\Delta]) \end{cases}$$

$i = 1, 0, -1, -2, \dots ;$

à partir de (3.1.), nous définissons la matrice  $L \times L$  :

$$(3.2.) \quad R = E \left\{ \begin{matrix} \vec{N}_j \\ \vec{N}_j^T \end{matrix} \right\}$$

supposée inversible, et le vecteur :

$$(3.3.) \quad \vec{H}_* = R^{-1} \vec{S} ;$$

l'entier  $L$  étant égal à la partie entière de  $\frac{T}{\Delta}$ .

La théorie statistique de la détection d'un signal certain  $\vec{S}$  dans un bruit  $\vec{N}$ , montre que le détecteur optimal au sens



## ITERATION STOCHASTIQUE ET DETECTION

du maximum de vraisemblance a posteriori, utilise un filtre digital dont les coefficients sont les coordonnées du vecteur  $\vec{H}_*$  (3.3.), [5].

Nous nous proposons, à l'aide du théorème précédent, de déterminer  $\vec{H}_*$  à partir d'une suite de vecteurs  $\vec{N}_j$ , (3.1.).

### 3.2. Théorème (3.2.).

Soient une suite de réels positifs  $\mu_j$  satisfaisant C-4, et une suite  $\vec{Y}_j(\vec{H})$  de fonctions aléatoires vectorielles de  $\mathbb{R}^L$ , indépendantes, satisfaisant les conditions B.1. et B.2.

$$B.1. \quad E \left\{ \vec{Y}_j(\vec{H}) \right\} = -R \vec{H} + S = -R (\vec{H} - \vec{H}_*);$$

B.2. }  $K_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ , non négatifs tels que :

$$E \left\{ \left\| \vec{Y}_j(\vec{H}) \right\|^2 \right\} \leq \sum_{i=0}^2 K_i \left\| \vec{H} \right\|^i;$$

alors l'algorithme suivant :

$$B.4.) \quad \vec{H}_{j+1} = \vec{H}_j + \mu_j \vec{Y}_j(\vec{H}_j), \quad j = 1, 2, \dots$$

engendre, à partir d'un vecteur  $\vec{H}_1$  quelconque, une suite  $\vec{H}_j$  de vecteurs de  $\mathbb{R}^L$ , qui converge presque sûrement vers  $\vec{H}_*$ .

### Démonstration.

Dans le but d'utiliser le théorème (2.3.) nous choisissons :



ITERATION STOCHASTIQUE ET DETECTION

$$(3.5.) \quad f(\vec{H}) = \frac{1}{2} \left\| \vec{H} - \vec{H}_* \right\|^2$$

dont le gradient  $\vec{D}(\vec{H})$  et la matrice  $L \times L$  notée  $A(\vec{H})$  de ses dérivées secondes sont :

$$(3.6.) \quad \begin{cases} \vec{D}(\vec{H}) = \vec{H} - \vec{H}_* , \\ A(\vec{H}) = I. \end{cases}$$

Vérifions que les conditions C-1, C-2, C-3, sont satisfaites.

La condition C-1 est satisfaite par le choix même de  $f(\vec{H})$ . Pour montrer que C-2 est satisfaite, considérons  $\vec{\phi}_a(\vec{H})$  :

$$(3.7.) \quad \vec{\phi}_a(\vec{H}) = U(\vec{H}) + \frac{1}{2} a V_a(\vec{H}).$$

Notons, qu'à cause de l'inégalité triangulaire pour la norme, B.2. équivaut à B'.2.

B'.2.  $\exists K'_i, i = 0, 1, 2$ , non négatifs tels que :

$$E \left\{ \left\| \vec{Y}_j(\vec{H}) \right\|^2 \right\} \leq \sum_{i=0}^2 K'_i \left\| \vec{H} - \vec{H}_* \right\|^i.$$

En introduisant B.1. et B'.2. dans (3.7.), et en appelant  $e_m$  la plus petite valeur propre de  $R$ , il vient :

$$(3.8.) \quad \vec{\phi}_a(\vec{H}) \leq \frac{a}{2} \sum_{i=0}^2 K'_i \left\| \vec{H} - \vec{H}_* \right\|^i - e_m \left\| \vec{H} - \vec{H}_* \right\|^2.$$



A tout  $\varepsilon > 0$ , associons les réels, non négatifs, ainsi définis :

$$(3.9.) \quad g_1(\varepsilon) = \frac{K_1'}{\varepsilon}, \quad g_0(\varepsilon) = \frac{K_0'}{\varepsilon^2};$$

à l'aide de ces notations, l'inégalité (3.8.), considérée pour  $\vec{H} \in A_\varepsilon$ , devient :

$$(3.10.) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \\ \Phi_a(\vec{H}) \leq \|\vec{H} - \vec{H}_*\|^2 \left[ \frac{a}{2} (g_0(\varepsilon) + g_1(\varepsilon) + K_2) - e_m \right], \\ \forall H \in A_\varepsilon. \end{array} \right.$$

Posons par exemple :

$$(3.11.) \quad \lambda(\varepsilon) = \frac{1}{2} \frac{e_m}{g_0(\varepsilon) + g_1(\varepsilon) + K_2},$$

alors d'après (3.10.) la condition C-2 est satisfaite avec :

$$(3.12.) \quad \eta(\varepsilon) = \varepsilon^2 \frac{e_m}{2}.$$

Il est aisé de déduire, de B.1. et B.2. que C-3 est satisfaite.

Le théorème (3.2.) ainsi établi, permet d'énoncer et de démontrer le théorème suivant.

### 3.3. Théorème (3.3.).

Soit une suite  $\vec{N}_{M_j}$  de vecteurs indépendants, déduits par (3.1.) d'un processus  $n(t)$  stationnaire, centré, possédant des moments du 4 ième ordre finis, et soit une suite de réels



ITERATION STOCHASTIQUE ET DETECTION

positifs  $\mu_j$  satisfaisant C-4, alors l'algorithme :

$$(3.13.) \quad \vec{H}_{j+1} = \vec{H}_j + \mu_j \left( -\vec{N}_{Mj} \vec{N}_{Mj}^T \vec{H}_j + \vec{S} \right), \quad j = 1, 2, \dots$$

engendre, à partir d'un vecteur  $\vec{H}_1$  quelconque, une suite  $\vec{H}_j$  de vecteurs qui converge presque sûrement vers  $\vec{H}_*$  (3.3.).

Corollaire (3.3.).

Le théorème (3.3.) est vrai si le processus  $n(t)$  est gaussien, de puissance finie.

Démonstration du théorème (3.3.).

En posant conformément à (3.13.) que :

$$(3.14.) \quad \vec{Y}_j(\vec{H}) = -\vec{N}_{Mj} \vec{N}_{Mj}^T \vec{H} + \vec{S}$$

il apparaît d'après (3.2.) que la condition B.1. est satisfaite. Achéons la démonstration en montrant que B.2. est satisfaite, et pour cela considérons l'espérance de la norme de  $\vec{Y}_j(\vec{H})$ ,

$$(3.15.) \quad E \left\{ \left\| \vec{Y}_j(\vec{H}) \right\|^2 \right\} = E \left\{ \left\| \vec{N}_{Mj} \vec{N}_{Mj}^T \vec{H} \right\|^2 \right\} - 2 \vec{S}^T R \vec{H} + \|\vec{S}\|^2$$

En posant :

$$(3.16.) \quad \begin{cases} \vec{H}^T = (h_1, h_2, \dots, h_L) , \\ \vec{N}_{Mj}^T = (N_1, N_2, \dots, N_L) , \end{cases}$$

il vient :



$$E \left\{ \left\| \begin{matrix} \vec{N}_{Mj} \\ \vec{N}_{Mj}^T \end{matrix} \vec{H} \right\|^2 \right\} = \sum_{l,m} h_l h_m \sum_k E \left[ \begin{matrix} N_k^2 & N_l N_m \end{matrix} \right] ;$$

et, puisque les moments du 4 ième ordre de  $n(t)$  sont finis, il existe un réel positif  $K_2$  tel que (3.15.) soit ainsi majorée :

$$E \left\{ \left\| Y_j(\vec{H}) \right\|^2 \right\} \ll \left\| \vec{S} \right\|^2 + 2 \left\| \vec{RS} \right\| \cdot \left\| \vec{H} \right\| + K_2 \left\| \vec{H} \right\|^2 ,$$

ce qui achève la démonstration du théorème (3.3.).

Ainsi sommes-nous parvenus à démontrer la convergence de (1.2.) en nous affranchissant de la condition (1.3.). Les hypothèses du théorème précédent sont très peu exigeantes.

### 3.4. Simulation sur ordinateur.

Le pas d'échantillonnage  $\Delta$  vaut 15  $\mu$ s. Le bruit  $n(t)$  est gaussien, de puissance 1, de spectre plat dans la bande  $0 \leq \nu \leq \frac{1}{2\Delta}$ . Le signal est une portion de sinusoïde à 14 500 Hz, d'amplitude 1.

L'algorithme (3.13.) mis en oeuvre avec  $M = 1$ , permet au ordinateur d'élaborer un filtre auto-adaptatif ( $L = 40$ ) qui converge peu à peu vers  $\vec{H}_*$ , comme le montre la figure 1 qui visualise l'évolution du rapport signal à bruit

$$\left(\frac{S}{B}\right)_i = \frac{(\vec{H}_i^T \cdot \vec{S})^2}{\vec{H}_i^T \vec{R} \vec{H}_i} \quad \text{lorsque } i \text{ varie.}$$

ITERATION STOCHASTIQUE ET DETECTION4. - DETECTION D'UN SIGNAL DE FORME INCONNUE.4.1. Position du problème.

Pour résoudre le problème de la détection d'un signal imparfaitement connu, la méthode généralement utilisée, consiste à schématiser le signal en lui conférant un caractère aléatoire régi par certaines lois. On peut alors trouver le récepteur optimum pour la statistique introduite. Ces récepteurs ont toujours une partie quadratique [6], [7], [8]. Dans le traitement que nous envisageons, nous retrouvons ce caractère quadratique qui semble fondamental. Cependant nous avons abordé le problème dans une optique un peu différente, puisque nous avons refusé de schématiser le signal par des lois statistiques. La méthode que nous utilisons, comporte une adaptation à la statistique du bruit.

Celle-ci est rendue possible par l'hypothèse que sur l'intervalle  $t \leq 0$  précédant la détection, l'onde reçue  $x(t)$  n'est constituée que du bruit  $n(t)$ . Nous utiliserons cet intervalle de temps pour connaître les propriétés statistiques de  $n(t)$ , en particulier sa fonction de corrélation  $\Gamma(\tau)$ .

A la fin de la période de détection proprement dite,  $(0, T)$ , nous devons



## ITERATION STOCHASTIQUE ET DETECTION

décider entre les deux hypothèses  $\mathcal{H}_0$  et  $\mathcal{H}_1$  suivantes

$$(4.1.) \quad \begin{cases} \mathcal{H}_0 : x(t) = n(t) \quad , \quad t \in (0, T) \quad , \\ \mathcal{H}_1 : x(t) = n(t) + s(t) \quad , \quad t \in (\theta, \theta + \Theta) \cup (0, T). \end{cases}$$

Le bruit  $n(t)$  est un échantillon d'un processus stationnaire, centré; le signal  $s(t)$  n'est pas connu. Dans le cas général, l'instant de début de signal  $\theta$  et sa durée  $\Theta$  sont eux-mêmes inconnus; toutefois, nous savons que le support du signal  $(\theta, \theta + \Theta)$  est inclus dans  $(0, T)$ . Ces hypothèses générales rendent bien compte d'un grand nombre de situations dans lesquelles on dispose d'une fourchette pour la localisation de l'éventuel signal.

Pour rendre possible un traitement sur ordinateur numérique, les signaux considérés sont échantillonnés. Nous appelons  $\Delta$  le pas d'échantillonnage.

### 4.2. Structure du récepteur proposé.

#### 4.2.1. Cas particulier.

Considérons tout d'abord le cas simple dans lequel, la localisation  $(\theta, \theta + \Theta)$  de  $s(t)$  est connue. Définissons les vecteurs  $\vec{X}$ ,  $\vec{N}$  et  $\vec{S}$ , à partir de  $x(t)$ ,  $n(t)$  et  $s(t)$ , pour  $t \in (\theta, \theta + \Theta)$ , en associant à toute fonction  $f(t)$ ,  $t \in (\theta, \theta + \Theta)$ , le vecteur  $\vec{F}_i$ ,



ITERATION STOCHASTIQUE ET DETECTION

$$(4.2.) \quad \vec{F}_i = \left( f(i\Delta), f[(i+1)\Delta], \dots, f[(i+L-1)\Delta] \right),$$

avec :

$$(4.3.) \quad \begin{cases} i = 1 + \left\{ \frac{\theta}{\Delta} \right\}, \\ i+L-1 = \frac{\theta + \Theta}{\Delta}; \end{cases}$$

où  $\{s\}$  désigne la partie entière du réel  $s$ . Appelons  $R$  la matrice ( $L \times L$ ) de corrélation de  $\vec{N}$  :

$$(4.4.) \quad R = E \left[ \vec{N} \cdot \vec{N}^T \right];$$

nous supposons comme précédemment que  $R$  est inversible, [9].

Le fondement du traitement proposé est de considérer le vecteur  $\vec{X}$  observé, comme un signal certain à détecter dans un bruit  $\vec{N}$ . Nous savons d'après la théorie de la détection d'un signal certain dans un bruit [5] que le filtre digital optimal pour détecter  $\vec{X}$  dans  $\vec{N}$ , est caractérisé par le vecteur  $R^{-1} \vec{X}$ , et que le rapport signal sur bruit correspondant a pour expression :

$$(4.5.) \quad \rho = \vec{X}^T R^{-1} \vec{X}.$$

Nous appelons caractéristique de  $\vec{X}$ , la quantité  $\rho$ , qui est, remarquons-le, quadratique en  $\vec{X}$ .

Pour décider entre les deux hypothèses



## ITERATION STOCHASTIQUE ET DETECTION

$\mathcal{H}_0$  et  $\mathcal{H}_1$ , nous proposons le récepteur qui calcule  $\rho$  et le compare à un seuil.

### 4.2.2. Cas général.

Revenons au cas général (4.1.), d'un signal imparfaitement localisé. Nous reprenons (4.2.) et (4.3.), pour définir les vecteurs  $\vec{X}_i$ ,  $\vec{N}_i$  et  $\vec{S}_i$ , mais avec un indice  $i$  variable de 1 à  $I = \left\{ \frac{T}{\Delta} \right\} - L + 1$ , puisque  $\theta$  est alors inconnu dans  $(0, T)$ . La caractéristique  $f_i$  devient alors fonction de  $i$ ; avant de la comparer au seuil, nous effectuons une certaine intégration :

$$(4.6.) \quad Y_j = \sum_{i=j}^{j+K} \rho_i, \quad j = 1, 2, \dots, I-K.$$

Le test entre  $\mathcal{H}_0$  et  $\mathcal{H}_1$  est alors de comparer tous les  $Y_j$  à un seuil et de décider  $\mathcal{H}_1$  si, et seulement si, l'un d'entre eux au moins, est plus grand.

Dans la pratique, certaines connaissances a priori sur  $\theta$  peuvent faciliter le choix des entiers  $L$  et  $K$ .

### 4.3. Processus d'apprentissage.

Le calcul de  $\rho$  suppose la connaissance de  $R^{-1}$ . Nous calculons cette matrice par itérations stochastiques, en utilisant  $n(t)$  pour  $t \leq 0$  [10].



ITERATION STOCHASTIQUE ET DETECTION

Considérons la suite  $R_j$  des matrices  $L \times L$ , engendrée à partir d'une matrice  $R_1$  quelconque par l'algorithme :

$$(4.7.) \quad R_{j+1} = R_j + \mu_j \left( -\vec{N}_{jM} \vec{N}_{jM}^T R_j + I_L \right), \quad j=1, 2, \dots ;$$

$I_L$  étant la matrice unité, et  $M$  un entier tel que, quels que soient les entiers  $j$  et  $k$  distincts,  $\vec{N}_{jM}$  et  $\vec{N}_{kM}$  sont statistiquement indépendants.

Le théorème (3.3.) permet de conclure que, pour des  $\mu_j$  satisfaisant  $C^{-1/4}$ , la suite des  $R_j$ , converge presque sûrement vers  $R^{-1}$ , sous des conditions assez faibles concernant les propriétés statistiques de  $n(t)$  ; il en est ainsi en particulier si  $n(t)$  est gaussien, d'après le corollaire (3.3.).

4.4. Performance du traitement.

Soit  $\rho_*$  le rapport signal à bruit

$$(4.8.) \quad \rho_* = \vec{S}^T R^{-1} \vec{S}.$$

A partir de (4.5.), il vient :

$$(4.9.) \quad E(\rho) = \begin{cases} L & \dots \dots \dots \mathcal{H}_0, \\ L + \rho_* & \dots \dots \dots \mathcal{H}_1 ; \end{cases}$$

et en supposant  $n(t)$  gaussien :

$$(4.10.) \quad E \left\{ \left[ \rho - E(\rho) \right]^2 \right\} = \begin{cases} 2L & \dots \dots \mathcal{H}_0, \\ 2L + 4\rho_* & \dots \dots \mathcal{H}_1. \end{cases}$$

ITERATION STOCHASTIQUE ET DETECTION

L'indice de performance  $r$  du traitement proposé, défini par :

$$(4.11.) \quad r^2 = \frac{\left[ E(\rho)_{H_1} - E(\rho)_{H_0} \right]^2}{E \left\{ \left[ \rho - E(\rho) \right]^2 \right\}_{H_1}}$$

a donc, pour expression :

$$(4.12.) \quad r = \left( \frac{\rho_*^2}{2L + 4\rho_*} \right)^{1/2},$$

c'est ainsi une fonction croissante de  $\rho_*$ .  
Or, d'après (4.8.) :

$$(4.13.) \quad \frac{1}{e_M} \leq \frac{\rho_*}{\vec{S}^T \vec{S}} \leq \frac{1}{e_m}$$

où  $e_m$  et  $e_M$  sont respectivement la plus petite et la plus grande des valeurs propres de  $R$ .

Il apparaît ainsi que, pour une même énergie de  $\vec{S}$ ,  $r$  peut varier suivant la forme de  $\vec{S}$ , et qu'il est maximum lorsque  $\vec{S}$  un vecteur propre associé à  $e_m$ .



## ITERATION STOCHASTIQUE ET DETECTION

### 1.5.- SIMULATION SUR CALCULATEUR.

Le pas d'échantillonnage  $\Delta$  vaut 15  $\mu$ s.

Nous nous plaçons dans le cas où  $\theta$  et  $\phi$  sont inconnus. Le bruit  $n(t)$ , de puissance 0,5, est la somme de deux bruits gaussiens, centrés, indépendants, de même puissance. L'un d'eux a un spectre plat dans la bande  $0 \leq |\omega| \leq \frac{1}{2\Delta}$ , et l'autre se déduit d'un bruit blanc par filtrage à travers un simple circuit oscillant centré sur 15 000 Hz, avec une largeur à 3 dB de 200 Hz.

Le signal est une portion d'une sinusoïde à 18 000 Hz, d'amplitude 0,5.

Le traitement a consisté à traiter  $x(t)$   $0 \leq t \leq 24$  ms, (Fig.2a) pour calculer  $\hat{\rho}_t$  (Fig.2b), et  $\hat{\gamma}_j$ , (Fig.2c) avec  $L = 10$  et  $K = 250$ .

Ces figures font apparaître l'intérêt du traitement proposé.



ITERATION STOCHASTIQUE ET DETECTION

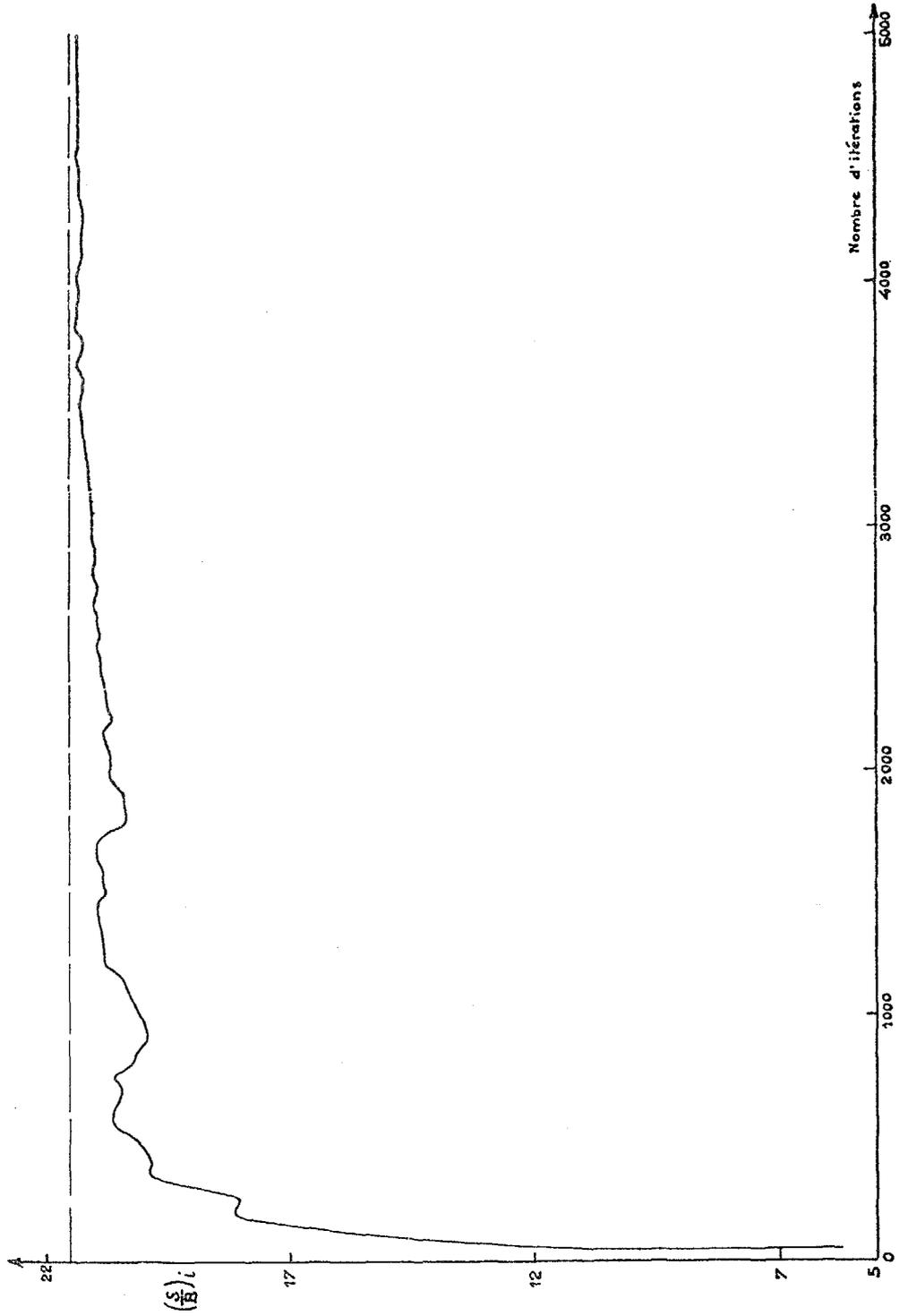
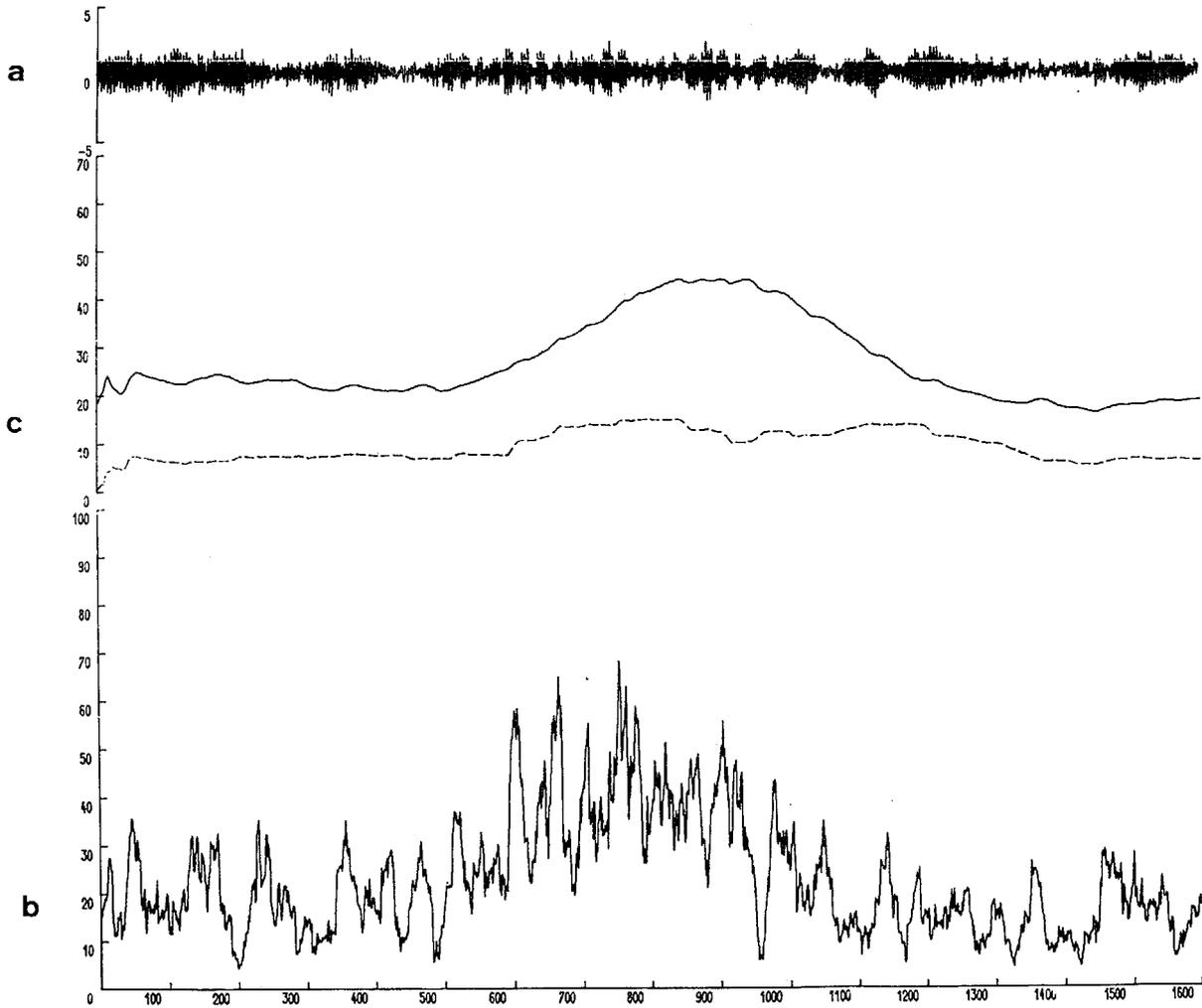


Fig. 1 Amélioration du rapport signal à bruit (cas certain)  $\mu_k = \mu_0 \frac{100}{99+k}$



ITERATION STOCHASTIQUE ET DETECTION

SINUSOIDE 18000HZ AMPLITUDE .50 BRUIT BLANC ET BRUIT 14900HZ 15100HZ PUISSANCE TOTALE .50



ITERATION STOCHASTIQUE ET DETECTION

## R E F E R E N C E S

=====

- [1] SAKRISON  
"Stochastic approximation, a recursive method for solving regression problems"  
In Advances in Communication Systems,  
A.V. BALAKRISHNAN, Ed., N.Y. Academic Press  
1966 - p. 51.
- [2] J. CHANG and F. TUTEUR  
"Adaptative tapped delay line filters"  
Proc. Second Annual Conference on information sciences and systems - pp. 164-168,  
March 1968.
- [3] H. ROBBINS and S. MONRO  
"Astochastic approximation method"  
The Annals of Mathematical Statistics  
Vol. 22, 1951, p. 400.
- [4] J.R. BLUM  
"Multidimensional stochastic approximation methods"  
The Annals of Mathematical Statistics  
Vol. 25, 1954, p. 737.
- [5] VAN TREES  
"Detection, estimation and modulation theory" - 1968.

ITERATION STOCHASTIQUE ET DETECTIONREFERENCES

(Suite et fin)

- [6] T. KAILATH  
"A general likelihood ratio formula for  
random signals in gaussian noise"  
IEEE. Trans. on IT. Vol. IT-15 n° 3.  
Mai 1969.
- [7] A.J. VITERBI  
"Principles of coherent communication"  
Mc Graw Hill, 1966.
- [8] O. MACCHI  
"Détection optimale d'un signal de temps  
d'arrivée inconnu"  
Ann. des Télécom. T 25, n° 7 et 8  
Juillet-Août 1970.
- [9] GRENANDER et SZEGO  
"Toeplitz forms and their application"  
Univ. of Calif. Press. 1958.
- [10] C. et O. MACCHI  
Compte rendu à l'Académie des Sciences  
(A paraître).