TROISIEME COLLOQUE SUR LE

TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

Nice 1er au 5 juin 1971

ESTIMATION de FLUX LUMINEUX FAIBLES - UN PROBLEME de la THEORIE des PROCESSUS PONCTUELS.

Odile MACCHI

Laboratoire d'Etude des Phénomènes Aléatoires

UNIVERSITE de PARIS-SUD - 91 - ORSAY -

RESUME Cette étude est consacrée à des problèmes de la théorie statistique de l'estimation, s'offrant dans le cadre des communications optiques, et aussi en différents secteurs de la physique. Il s'agit de mesurer l'intensité lumineuse d'un flux faible détecté par un photomultiplicateur. La situation est donc caractérisée par le fait suivant : l'information utilisée pour l'estimation se présente nécessairement sous la forme d'un processus ponctuel, celui des instants d'émission d'un photoélectron par le détecteur. Deux cas sont envisagés : estimation de l'intensité d'un signal optique de forme connue, estimation de l'intensité d'une lumière thermique durant tout un intervalle de temps.

SUMMARY

This paper is concerned with problems from the statistical theory of estimation, occurring in the optical communication field, and also in various areas of physics. The objective is to measure the light intensity of a weak flux, detected by a photomultiplier. The characteristic context is as follows : necessarily the information used for estimation is enclosed in a point process, that of the instants when the detector delivers a photoelectron. Two cases are treated : the estimation of the intensity of an optical signal with known shape, the estimation of a thermal light intensity.

I - INTRODUCTION -

Un grand nombre de systèmes physiques comportent le traitement d'un flux lumineux : c'est le cas des systèmes de communications optiques, qui est un sujet d'investigations très récent. C'est aussi le cas dans différents secteurs de la physique, comme les recherches sur la diffusion de la lumière, les études de Physique Atomique , ou les études de particules par l'intermédiaire d'un scintillateur suivi d'un photomultiplicateur. Dans tous les cas que nous envisageons, il s'agit d'extraire l'information contenue dans ce flux lumineux, en mesurant son intensité $I(t)$.

Dans cette étude nous n'avons considéré que le cas des flux faibles, où la nature corpusculaire du rayonnement électromagnétique, mise en évidence par les progrès récents de l'Optique Statistique, joue un rôle déterminant. De nombreux auteurs [1]- [2] ont étudié le signal de sortie d'un détecteur très sensible, à large bande, irradié par un flux lumineux faible : il est constitué par une suite d'impulsions très brèves, de formes pratiquement identiques correspondant à l'absorption d'un photon et à l'émission d'un photoélectron par le détecteur. Les époques t_i de ces impulsions sont aléatoires. La seule information accessible sur le flux lumineux est donc constituée par le processus ponctuel (p.p.) $\mathcal{P}$ formé par les t_i.

Dans le cas des communications optiques, remarquons la nouveauté d'une telle situation, par rapport à la théorie classique où l'information est recueillie par l'observation d'une fonction aléatoire (f.a.) continue. Dans la suite, nous appelons "observation" et nous notons symboliquement $\{t_n\}$ la suite $t_1, \ldots, t_n$, aléatoire par l'entier n et les positions t_i, des époques des impulsions observées durant l'intervalle de temps $J = [0, T]$, que l'on considère.

Pour résoudre les problèmes d'estimation statistique que nous étudions ici, l'outil indispensable est evidemment la densité de probabilité de cette observation. Celle-ci est définie, pour $n = 0, 1, 2 \ldots$ par

(1) $$p_J(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n = \Pr [\mathcal{A}]$$

où $\mathcal{A}$ est l'évènement :

{exactement n points dans J, respectivement situés dans $[t_1, t_1 + dt_1]$, ..., $[t_n, t_n + dt_n]$} ; nous l'appelons "distribution des évènements sur J".

La nature du p.p. $\mathcal{P}$ est maintenant bien connue [2] [4] [5] : il s'agit d'un processus de Poisson composé (p. P. c.), c'est à dire d'un p.p. qui, conditionnellement à une réalisation d'une f.a. positive $\lambda(t)$, appelée densité, est poissonnien de densité $\lambda(t)$. Avec cette définition, l'étude des grandeurs statistiques du p.P.c. se fait très simplement à partir de l'étude similaire du processus de Poisson pur (p.P.p.). Cependant, la grande difficulté de la théorie des lois de probabilité conditionnelles nous conduit à donner une autre définition du p.P.c. par sa loi temporelle.

Pour tout p.p. on appelle $dN(t)$ le nombre de ses points situés dans l'intervalle $[t, t + dt]$. On montre [6] que les densités de multicoïncidence, définies pour p points distincts $t_1, \ldots, t_p$, par

(2) $$h_p(t_1, \ldots, t_p)\, dt_1 \ldots dt_p = \Pr\Big([dN(t_1) = 1] \ldots [dN(t_p) = 1] \Big)$$

fournissent une description statistique complète de ce processus.

Les p.P.c. sont alors définis comme ceux pour lesquels les multicoïncidences h_p sont les divers moments d'une f.a. positive $\lambda(t)$:

$$(3) \qquad h_p(t_1, \ldots, t_p) = E(\lambda(t_1) \ldots \lambda(t_p)).$$

On trouve aisément que la distribution des évènements de $\mathcal{P}$ dans J vaut

$$(4) \quad p_J(t_1, \ldots, t_n) = E\left\{\lambda(t_1) \ldots \lambda(t_n) \exp - \int_J \lambda(\theta)\, d\theta\right\},$$

en observant que pour un p.P.p. de densité $\alpha(t)$, le résultat similaire [7] est

$$(5) \quad \tilde{p}_J(t_1, \ldots, t_n) = \alpha(t_1) \ldots \alpha(t_n) \cdot \exp - \int_J \alpha(\theta)\, d\theta .$$

Le résultat (4) s'obtient aussi à l'aide de la définition (3) (voir [6], équation (20) et suite, où la distribution des évènements d'un p.p. est exprimée en fonction de ses multicoïncidences). La probabilité $P_n(J)$ d'avoir n évènements dans J se calcule aisément à l'aide de (4) :

$$(6) \quad P_n(J) = \frac{1}{n!} \; E\left\{\left[\int_J \lambda(\theta)\, d\theta\right]^n \exp - \int_J \lambda(\theta)\, d\theta\right\}.$$

Le caractère aléatoire de la densité $\lambda(t)$ du p.p. $\mathcal{P}$ est dû au caractère aléatoire de la densité $\rho(t)$ des photo-électrons. En effet $\rho(t)$ est donnée par la relation ;

$$(7) \qquad \rho(t) = s \; I(t),$$

en fonction de l'intensité lumineuse $I(t)$, qui est une f.a. de par la nature même du champ électromagnétique.

Le coefficient s est une constante positive, caractéristique de l'efficacité du détecteur. En plus des photoélectrons, le détecteur délivre des thermoélectrons, correspondant à son bruit interne, et indiscernables des premiers électrons. On peut admettre que ceux-ci forment un p.P.p. stationnaire de densité b (certaine), et indépendant du processus des photoélectrons. On voit alors aisément que le p.p. $\mathcal{S}$ résultant de la superposition des deux, est encore un p.P.c. de densité

$$(8) \qquad \lambda(t) = \rho(t) + b = s\, I(t) + b.$$

Dans le paragraphe II, nous traitons d'une impulsion lumineuse de forme connue $I_0(t)$. On a alors

$$(9) \qquad I(t) = a\, I_0(t)$$

où a est un paramètre inconnu qui traduit l'énergie du champ lumineux et qu'il s'agit d'estimer à partir de l'observation $\{t_n\}$. C'est le cas de l'intensité lumineuse émise par un scintillateur lorsqu'il est irradié par un faisceau de particules dont on veut mesurer l'énergie. Egalement, dans l'étude des radars optiques, se pose ce genre de problème.

Tenant compte de (9), (8) devient alors :

$$(10) \qquad \lambda(t) = a\, \rho_0(t) + b\,.$$

La fonction $\rho_0(t)$ est connue, et nous supposons que a est une variable aléatoire (v.a.), possédant une densité de probabilité $q(a)$, continûment dérivable. Dans le cas où a n'est pas une v.a., mais une valeur certaine inconnue, le p.p. de détection est un p.P.p. , et le problème a déjà été envisagé [7] .

Nous adoptons successivement les critères (Q) de l'erreur quadratique moyenne et (V) du maximum de vraisemblance a posteriori, qui sont les deux critères statistiques les plus employés. On verra que l'estimateur dépend peu du critère choisi.

Dans le troisième paragraphe nous considérons le cas de la lumière thermique où l'intensité lumineuse fluctue, et où le champ $E(t)$ est gaussien, quasimonochromatique. C'est le cas des lumières naturelles, et pseudo-thermiques [3]. On a montré [8] qu'alors :

$$(11) \qquad I(t) = |X(t)|^2,$$

où $X(t)$ est le signal analytique complexe [9] associé au champ optique réel $E(t)$. On sait que $X(t)$ s'obtient en supprimant les fréquences négatives dans la décomposition harmonique de $E(t)$. Le problème traité ici est l'estimation optimale de $I(t)$, au sens du critère (Q), à partir de l'observation des $\{t_n\}$ et en l'absence de tout bruit de détection. Le résultat s'exprime très simplement en faisant intervenir la résolvante d'une équation intégrale de Fredholm, dont le noyau est la covariance $C(t, u)$ de $X(t)$.

Dans le cas particulier du laser monomode stabilisé en amplitude, le temps de cohérence τ_c de $X(t)$ est très grand. Si la durée d'observation n'est pas trop longue, c'est à dire si

$$(12) \qquad (T/\tau_c) << 1$$

la f.a. $I(t) = I_0$ est pratiquement constante durant l'intervalle J. C'est une v.a. et l'on est ramené à l'étude du II .

II - ESTIMATION de L'INTENSITE d'un SIGNAL OPTIQUE de FORME CONNUE.

A - Résultats généraux.

Nous notons $a_q\{t_n\}$ (respectivement $a_v\{t_n\}$) l'estimateur de la v.a. a au sens du critère (Q) (resp.(V)). On les obtient tous deux aisément à l'aide de la loi $p_J(a/\{t_n\})$ du paramètre a, conditionnelle à l'observation $\{t_n\}$; avec des notations évidentes, celle-ci vaut :

$$p_J(a/\{t_n\}) = \frac{q(a)\, p_J(t_1, \ldots, t_n/a)}{p_J(t_1, \ldots, t_n)},$$

dans laquelle, d'après (4) et (10), on a

$$(13)\quad p_J(t_1, \ldots, t_n) = e^{-bT}\, E\left\{\exp - a \int_J \rho_0(\theta)\, d\theta \prod_{i=1}^{n} (a\, \rho_0(t_i)+b)\right\}.$$

On sait [10] que $a_q\{t_n\}$ est la moyenne conditionnelle de a. Ainsi

$$(14)\quad a_q\{t_n\} = \frac{E\left\{a\, e^{-\rho a} \prod_{i=1}^{n} (a\rho_0(t_i) + b)\right\}}{E\left\{e^{-\rho a} \prod_{i=1}^{n} (a\rho_0(t_i) + b)\right\}},$$

avec

$$(15) \qquad \rho = \int_J \rho_0(\theta)\, d\theta .$$

Quant à l'estimateur $a_v\ \{t_n\}$, il est donné par :

$$(16) \qquad a_v\ \{t_n\} = a/q(a)\ e^{-\rho a} \prod_{i=1}^{n} (a\, \rho_0(t_i) + b) \text{ maximum.}$$

Posons

$$(17) \qquad f_n = E\,(a^n\ e^{-\rho a}) ,$$

$$(18) \qquad F_n = \frac{f_{n+1}}{f_n} ,$$

$$(19) \qquad H_p\ \{t_n\} = \Sigma' \frac{b}{\rho_0(t_{i_1})} \cdots \frac{b}{\rho_0(t_{i_p})} , \quad p = 1, 2, \ldots, n,$$

$$(20) \qquad \begin{cases} N\ \{t_n\} = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{f_{n-p+1}}{f_{n+1}}\ H_p\ \{t_n\} , \\[2ex] D\ \{t_n\} = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{f_{n-p}}{f_n}\ H_p\ \{t_n\} , \end{cases}$$

$$(21) \qquad r_a\ \{t_n\} = \frac{q'(a)}{q(a)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\rho_0(t_i)}{a\rho_0(t_i)+b} - \rho ;$$

dans (19) la somme s'étend à toutes les combinaisons $i_1, \ldots, i_p$ des n premiers entiers. Avec ces notations (14) et (16) deviennent :

(22) $$a_q\{t_n\} = F_n \left[1 + N\{t_n\}\right] \left[1 + D\{t_n\}\right]^{-1},$$

(23) $$a_v\{t_n\} = a/r_a\{t_n\} = 0.$$

En utilisant la distribution (13) de l'observation, on montre facilement que $a_q\{t_n\}$ est un estimateur sans biais :

(24) $$E\left[a_q\{t_n\}\right] = E(a) .$$

En appliquant l'inégalité de Schwarz, on voit que sa variance est toujours plus petite que la variance initiale σ^2_a de la v.a. a :

(25) $$E\left[|a_q\{t_n\} - E(a)|^2\right] \leqslant \sigma_a^2.$$

En outre, on peut montrer que cet estimateur est une fonction croissante de n, en ce sens que

(26) $$a_q(t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}) \geqslant a_q(t_1, \ldots, t_n),$$

et qu'il partage cette propriété avec l'estimateur $a_v\{t_n\}$, sous des hypothèses très faibles concernant q(a), d'ailleurs nécessaires pour que $a_v\{t_n\}$ soit effectivement bien défini. De la même manière on peut voir sur (22) que :

(27) $$a_q\{t_n\} \leqslant F_n .$$

Puisque $a_q^0\{t_n\} = F_n$ lorsque b = 0, (27) signifie que pour une même observation, l'estimation $a_q\{t_n\}$ en présence de bruit, est toujours inférieure à ce qu'elle serait en l'absence de bruit de détection. A l'aide de (23), on démontre la même propriété pour $a_v\{t_n\}$. Toutes ces propriétés (24)-(27) sont très naturelles pour des estimateurs.

B - Cas d'un bruit faible.

Le cas où le bruit est faible est le plus intéressant: un détecteur émettant plus d'électrons de bruit que de photoélectrons ne serait pas très utile pour estimer l'intensité d'un faisceau de photons.

Supposons d'abord que le bruit interne du détecteur soit négligeable, de sorte que $b = 0$. Sur (14) et (16), on voit qu'alors le nombre n d'évènements enregistrés est un résumé exhaustif pour l'estimation de a, et ceci quelque-soit la loi $q(a)$. Ce résultat est intuitivement évident lorsque l'intensité est constante ; il est d'ailleurs valable dans ce cas, même si le bruit n'est pas nul. Il est moins intuitif dans le cas où le signal a une forme quelconque : celle-ci n'intervient, en fait, que par son intégral ρ, (15).

L'hypothèse du bruit faible est assez délicate à discuter dans le cas du critère (V), car la seule procédure générale pour approcher l'estimateur $a_v\{t_n\}$ est de le remplacer par la racine d'un développement limité $\tilde{r}_a\{t_n\}$ de (21), en fonction du bruit b. Cependant, on peut voir sur des exemples que cette méthode n'est pas toujours légitime. Au contraire, dans le cas du critère (Q), la forme (22) de l'estimateur, fournit immédiatement, sous la condition

(28) $\quad D\{t_n\} \ll 1, \qquad N\{t_n\} \ll 1,$

l'approximation suivante

$$(29) \quad a_q \{t_n\} \simeq F_n \left[1 - \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{f_{n-p}}{f_n} - \frac{f_{n-p+1}}{f_{n+1}} \right) H_p \{t_n\} \right].$$

On constate sur (29) qu'au fur et à mesure que le bruit diminue, le nombre n s'approche de plus en plus d'un résumé exhaustif, puisque les positions de $t_1, \ldots, t_n$ n'interviennent que dans le complément infinitésimal $\sum_{p=1}$. Par exemple en ne retenant que le terme correspondant à $p=1$, le plus significatif, on voit que les t_i n'interviennent que par l'intermédiaire des v.a. n et X

$$(30) \qquad X = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\rho_0(t_i)} .$$

Il est à noter que les variables n et X sont toutes deux linéaires par rapport à l'observation, en ce sens que chacune d'elles est la sortie d'un filtre linéaire bien choisi, à l'instant de fin d'observation, lorsque l'entrée est constituée par la suite d'impulsions unitaires $\sum_{i=1}^{n} \delta(t - t_i)$ associée au processus $\mathcal{S}$.

C - Exemple

A cause de la forme (17) de la quantité f_n, fondamentale pour l'estimation, la loi du χ^2, ou loi gamma est particulièrement indiquée pour $q(a)$:

$$(31) \qquad q(a) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(t)} k^t a^{t-1} e^{-ka} & , a \geq 0,\ t > 0,\ k > 0 \\ 0 & , a < 0. \end{cases}$$

On a alors facilement :

$$f_n = \frac{1}{\Gamma(t)} \quad k^t \quad \Gamma(n+t) \qquad (k+\rho)^{-n-t} . \tag{32}$$

On sait qu'en outre, la loi du χ^2 traduit de nombreuses situations physiques, à cause de son lien avec la loi de Gauss. C'est ainsi que si $a = | X + i Y |^2$, où X et Y sont deux v.a. réelles centrées, indépendantes, gaussiennes et de même variance, alors a suit une loi exponentielle, c'est à dire (31) avec $t = 1$. Dans les mêmes conditions, si $a = X^2$, sa loi est (31) avec $t = 1/2$. Nous désignons respectivement par α et β ces deux cas particuliers. Ainsi, lorsque la modulation d'amplitude d'un laser a un temps de corrélation τ_c très grand, comme en (12), l'intensité lumineuse est constante, et aussi le signal :

$$\rho_0(t) = s. \tag{33}$$

Si alors la modulation est du type (11), on se trouve dans le cas particulier α. On peut aussi réaliser expérimentalement [11] une modulation du type :

$$I(t) = E_1^2 (t), \tag{34}$$

où $E_1(t)$ est une f.a. réelle, centrée, gaussienne. On se trouve alors dans le cas β .

Nous traitons d'abord le cas d'un détecteur sans bruit. En reportant (31), (32) et $b = 0$ dans les formules (18) -(23), on trouve immédiatement

$$a_q^0 (n) = \frac{n+t}{k+\rho} \tag{35}$$

$$a_v^0 (n) = \frac{n+t-1}{k+\rho} \tag{36}$$

Ces estimateurs sont très proches, puisqu'ils ne diffèrent que par la constante $(k+\rho)^{-1}$, et ils sont tous les deux linéaires par rapport à l'observation $\{t_n\}$. Pour n grand, ils sont équivalents. On vérifie aisément que le premier est sans biais, tandis que $a_v^0(n)$ a un biais constant. Pour leur variance commune, on trouve

$$(37) \qquad \sigma^2 = \frac{\rho\, t}{k^2\,(k+\rho)} = \sigma_a^2 \, \frac{\rho}{k+\rho} .$$

La condition générale (28) d'un bruit de détection faible, se traduit, dans l'hypothèse (31), par la condition simple

$$(38) \qquad \beta \ll 1 .$$

Le coefficient β, sorte de rapport bruit à signal est ici défini par

$$(39) \qquad \beta \stackrel{\bullet}{=} \sup_{t \in J} \; (k+\rho) \frac{b}{\rho_0(t)}$$

Pour prouver (38), il suffit de remarquer qu'à cause de (32), et pour des $t > 1$,

$$1 + N\{t_n\} \leq 1 + D\{t_n\} \leq \exp\,(k+\rho)\,\beta .$$

Sous la condition (39) on obtient, d'après (29), l'approximation suivante,

$$a_q\{t_n\} \simeq \frac{n+t}{k+\rho} \left[1 - \sum_{p=1}^{n} \frac{p}{n+t} \, \frac{(k+\rho)^p \, H_p\{t_n\}}{(n+t-1)\ldots(n+t-p)} \right],$$

et, en ne prenant que les termes de l'ordre de β

(40) $$a_q\{t_n\} \simeq \frac{n+t}{k+\rho} - b\,\frac{X}{n+t-1} .$$

Naturellement, on peut préciser plus avant l'estimateur, en supposant le signal constant (33). On l'a dit, n est alors un résumé exhaustif pour l'estimation. Nous donnons le développement au second ordre par rapport à β, des deux estimateurs envisagés :

(41) $$a_q(n) \simeq (k+\rho)^{-1} \left[(n+t) - \frac{n\ \beta}{n+t-1} + \frac{n(t-1)\ \beta^2}{(n+t-1)^2(n+t-2)}\right] ,$$

(42) $$a_v(n) \simeq (k+\rho)^{-1} \left[(n+t-1) - \frac{n\ \beta}{n+t-1} + \frac{n(t-1)\ \beta^2}{(n+t-1)^3}\right] , \quad t \geqslant 1.$$

L'interprétation de la condition $t \geqslant 1$ dans (42) est la suivante : pour $t < 1$, la densité de probabilité $p_J(a/\{t_n\})$ est toujours infinie lorsque $a = 0$, si le bruit b est non nul. Ainsi le critère (V) lui-même n'a plus d'intérêt, puisqu'il conduit toujours à une estimation nulle.

Donnons enfin les résultats sans approximation pour la distribution $q(a)$ exponentielle $(t = 1)$. On trouve

(43) $$a_q(n) = (k+\rho)^{-1} \left[(n+1) - \beta \left\{1 - \frac{\beta^n}{n!} \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{\beta^p}{p!} \right)^{-1}\right\} \right]$$

(44) $$a_v(n) = (k+\rho)^{-1} \left[n - \beta \right] .$$

Avec une erreur qui décroit très rapidement lorsque n croît, puisqu'elle est de l'ordre de $(k+\rho)^{-1} \dfrac{\beta^{n+1}}{n!} e^{-\beta}$ et que $\beta \ll 1$, on peut remplacer (43) par

(45) $$a_q(n) = (k+\rho)^{-1} \left[(n+1) - \beta \right] .$$

Remarquons que les estimateurs (45) et (44), se déduisent du cas sans bruit (35) et (36), en retranchant simplement le rapport bruit à signal β.

Il faut enfin souligner ce que les trois résultats (35)-(36), (41)-(42) et (43)-(44) mettent tous en évidence : à la différence près de $(k+p)^{-1}$, l'estimateur ne dépend pratiquement pas du critère choisi, critère de l'erreur quadratique moyenne ou critère de l'estimation la plus vraisemblable a postériori. Ce résultat est utile car le choix d'un critère est souvent subjectif.

III - ESTIMATION de L'INTENSITE d'une LUMIERE THERMIQUE.

Ce paragraphe traite de l'estimation de l'intensité $I(t)$ d'une lumière thermique, pour t décrivant l'intervalle d'observation J, en l'absence de tout bruit de détection. Ainsi, dans l'équation (4)

$$\lambda(t) = \rho(t) = s\, I(t) \tag{46}$$

Le critère statistique (Q), on l'a vu, est plus maniable, et c'est lui que nous utilisons. Soit $I_t\{t_n\}$ notre estimation à l'instant t, pour une observation $\{t_n\}$. Puisque

$$I_t\{t_n\} = E\left[I(t) / \{t_n\} \right], \tag{47}$$

la règle de Bayes fournit

$$I_t\{t_n\} = \frac{E\{I(t)\, p_J(t_1, \ldots, t_n / I(t))\}}{p_J(t_1, \ldots, t_n)} \tag{48}$$

Reportant dans (48) les équations (4), (5) et (46), il vient

$$(49)\quad I_t\{t_n\} = \frac{E\{I(t) \prod_{i=1}^{n} I(t_i) \exp - s \int_J I(\theta)\, d\theta\}}{E\{\prod_{i=1}^{n} I(t_i) \exp - s \int_J I(\theta)\, d\theta\}}$$

Ce résultat, valable pour toutes les sortes de lumière, doit pouvoir s'expliciter à l'aide de la seule covariance $C(t, u)$ de $X(t)$, dans le cas (11) de la lumière thermique, puisque $X(t)$ est alors gaussien. Pour cela, il suffit de calculer la distribution des évènements dans J

$$(50)\quad p_J(t_1, \ldots, t_n) = s^n E\left\{\prod_{i=1}^{n} I(t_i) \exp - s \int_J I(\theta)\, d\theta\right\}$$

Ce calcul [12] fait intervenir la fonction $f_s(t, u)$ solution de l'équation intégrale

$$(51)\quad f_s(t, u) + s \int_J C(t,\theta)\, f_s(\theta, u)\, d\theta = C(t, u) \text{ sur } J \times J,$$

qui s'appelle la résolvante du noyau $C(t, u)$ sur l'intervalle J. A l'aide de cette résolvante, et des valeurs propres λ_i $(i=1, 2, \ldots)$ associées à la covariance complexe $C(t, u)$, c'est à dire des solutions (positives, comme on sait) de

$$(52)\quad \lambda_i\, \phi_i(t) = \int_J C(t, u)\, \phi_i(u)\, du \quad , \; t \in J ,$$

le résultat est le suivant

$$(53)\quad p_J(t_1, \ldots, t_n) = s^n \prod_{i=1}^{\infty} (1+\lambda_i s)^{-1} \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{P}_n} \prod_{j=1}^{n} f_s(t_j, t_{k_j}),$$

où $\mathcal{K} = (k_1, \ldots, k_n)$ décrit l'ensemble $\mathcal{P}_n$ des permutations des entiers 1, 2 ..., n. On constate qu'à un facteur constant près, $p_J(t_1, \ldots, t_n)$ s'obtient par symétrisation du produit

$$f_s(t_1, t_1) \ldots f_s(t_n, t_n).$$

De (49), (50) et (53), il découle directement que

$$(54) \quad I_{t_{n+1}} \{t_n\} = \frac{\sum\limits_{\mathcal{L} \in \mathcal{P}_{n+1}} \prod\limits_{j=1}^{n+1} f_s(t_j, t_{l_j})}{\sum\limits_{\mathcal{K} \in \mathcal{P}_n} \prod\limits_{j=1}^{n} f_s(t_j, t_{k_j})}$$

où, par commodité d'écriture, on a remplacé par t_{n+1} l'instant t d'estimation. Faisons quelques commentaires sur ce résultat.

On observe sur (54) que $I_t \{t_n\}$ est homogène à la résolvante $f_s(t, u)$, et donc, d'après (51), à la covariance $C(t, u) = E\,(X(t)\ X^*(u))$. Cela est naturel puisque $I(t) = |X(t)|^2$.

Remarquons aussi que dans le cours de la démonstration de (53), on obtient le résultat intermédiaire que numérateur et dénominateur de (54) sont tous deux positifs, à cause du caractère positif des valeurs propres λ_i. De sorte que l'estimateur (54) possède bien le caractère positif qu'on pouvait attendre à propos d'une intensité lumineuse. En l'absence de tout photoélectron, l'estimation est

$$(55) \qquad I_0(t) = f_s(t, t)\ ;$$

en présence d'un seul photoélectron situé en t_1,

$$(56) \qquad I_t \{t_1\} = f_s(t, t) + \frac{|f_s(t, t_1)|^2}{f_s(t_1, t_1)}\ .$$

Remarquons enfin que l'estimation n'est pas linéaire par rapport à l'observation $\{t_n\}$, car si elle l'était, il existerait une fonction $h(t, u)$ telle que

$$(57) \qquad I_t\{t_n\} = I_0(t) + \sum_{i=1}^{n} h(t, t_i).$$

D'après (55) et (56), on aurait alors

$$(58) \qquad h(t, u) = \frac{|f_s(t, u)|^2}{f_s(u, u)} .$$

Mais avec (58), (57) est déjà mis en défaut pour $n=2$.

Il importe enfin de constater sur (54) que la résolvante $f_s(t, u)$ constitue par elle-même la solution de notre problème d'estimation. D'ailleurs cette fonction représente encore bien plus, car elle est la clé de quantités d'autres questions concernant le p.P.c. $\mathcal{P}$, et si on connait $f_s(t, u)$ on peut calculer toutes les grandeurs statistiques usuelles liées à $\mathcal{P}$. Ainsi le problème devient une question d'analyse numérique, celle de résoudre (51). Heureusement cela a été fait dans de nombreux cas ; en particulier l'équation (51) se présente souvent en théorie des communications, dans un contexte de détection ou d'estimation [10] . C'est ainsi que dans le cas stationnaire où

$$(59) \qquad C(t, u) = \Gamma(t-u)$$

(51) est exactement soluble pour certaines classes très larges de fonctions de corrélation $\Gamma(\tau)$ d'intérêt pratique. Par exemple lorsque $C(t, u)$ est la covariance d'un bruit blanc à bande limitée [13] pour lequel :

(60) $$\Gamma(\tau) = \gamma \frac{\sin 2\pi B\tau}{2\pi B\tau} \quad ;$$

ou encore lorsque $X(t)$ a un spectre rationnel, dont l'exemple le plus usuel correspond à

(61) $$\Gamma(\tau) = \gamma \exp (-2 |\tau| / \tau_c).$$

Ce dernier cas se rencontre très fréquemment en optique. On trouve alors des constantes a_1, a_2, b_1, b_2 telles que

(62) $$\begin{cases} f_s(t, u) = (a_1 e^{\beta t} + a_2 e^{-\beta t}) (b_1 e^{\beta u} + b_2 e^{-\beta u}) \\ \beta = \dfrac{2}{\tau_c} \sqrt{1 + s \gamma \tau_c} \end{cases}$$

Toujours dans le cas stationnaire, la procédure de Wiener-Hopf [14] permet de trouver $f_s(t, u)$ sans approximation lorsque l'intervalle d'observation est infini. Or on peut considérer qu'il en est ainsi lorsque

(63) $$(T/\tau_c) \gg 1,$$

τ_c étant le temps de cohérence du champ. En particuler dans le cas d'une lumière naturelle la condition (63) est toujours satisfaite. Ainsi le problème de l'estimation de l'intensité est-il complètement résolu par le résultat (54).

IV - CONCLUSION.

Dans cette étude nous avons utilisé la théorie des p.p. pour résoudre certains problèmes d'estimation qui se présentent dans le cadre des communications optiques. Dans ce cadre s'offrent de nombreux autres problèmes qui peuvent s'étudier et se résoudre d'un manière similaire. Citons seulement l'estimation de la largeur de raie d'un signal optique, ou la détection d'un tel signal dans un bruit de même nature.

REFERENCES

[1] R.J. GLAUBER "Quantum Optics and Electronics" Gordon and Breach, N.Y., 1964.

[2] M. ROUSSEAU "Propriétés statistiques des Photoélectrons" Jour. Phys. T.30 août-sept. 1969, p. 675.

[3] W. MARTIENSEN et T. SPILLER Phys. Rev. vol. 145, 1966,p.285.

[4] P.L. KELLEY et W.H. KLEINER "Theory of electromagnetic field measurement and photoelectron counting" Phys. Rev. 136, p. A316, oct. 1964.

[5] B. PICINBONO, C. BENDJABALLAH et J. POUGET "Photoélectron Shot noise" Jour. of Math. Phys., 11, N°7, p.2166,2176, juillet 1970.

[6] O. MACCHI "Stochastic point processes and multicoïncidences" I E E E Trans. I.T. janv. 1971.

[7] I. BAR DAVID " Communication under the Poisson regime" I E E E Trans. I.T., 15, N°1, janv. 1969.

[8] L. MANDEL et E. WOLF "Coherence properties of optical fields" Rev. Mod. Phys., 37, p. 231-287, avril 1965.

[9] M.J. BERAN et G.B. PARRENT " Theory of partial coherence", Prentice-Hall, New Jersey, 1964.

[10] H.L. VAN TREES "Detection, estimation and modulation theory" Wiley, N.Y., 1968.

[11] C. BENDJABALLAH et F. PERROT "Photoelectron statistics of laser light modulated by Gaussian noise" à paraître dans Optics Communications.

[12] O. MACCHI "Distribution statistique des instants d'émission des photoélectrons d'une lumière thermique". C.R.A.S. t. 272, série A, p. 437-440, fev. 1971.

[13] D. SLEPIAN "Estimation of Signal parameters in the presenceof noise" Trans. IRE, PGIT-3, 68, 1954.

[14] N. WIENER " The extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series" Wiley, N.Y., 1949.