TROISIEME COLLOQUE SUR LE

TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

Nice 1er au 5 juin 1971

FILTRES SPATIO-TEMPORELS ADAPTATIFS APRES ECHANTILLONNAGE

Jean-Louis VERNET et Georges BIENVENU

THOMSON - C.S.F. Division ASM - 06 Cagnes/Mer

RESUME

Après avoir rappelé les solutions théoriques de certains traitements spatio-temporels répondant à des critères d'estimation ou de détection, on examine les problèmes posés par l'adaptativité de tels systèmes lorsque les caractéristiques de l'environnement varient. L'application d'algorithmes d'adaptation à un filtre estimateur et un filtre pré-détecteur, est plus particulièrement étudiée.

SUMMARY

After a brief survey of the theoretical solutions which apply to some space-time processings relating to estimation and detection criteria, we study the problems involved in the adaptation of such systems when the environmental conditions vary. We study more specifically the use of adaptation algorithms in a estimating filter and a predetecting filter.

FILTRES SPATIO--TEMPORELS ADAPTATIFS APRES ECHANTILLONNAGE

Jean-Louis VERNET et Georges BIENVENU

THOMSON-CSF - Division ASM 06-Cagnes/Mer

-----

1. - INTRODUCTION.

Au cours des dernières années, les théories classiques de la détection et de l'estimation des signaux ont été appliquées aux antennes, c'est-à-dire plus généralement à des systèmes possédant plusieurs entrées [1 à 7]. Elles aboutissent à des filtres optimaux dont les paramètres dépendent des propriétés statistiques des bruits de l'environnement. Dans de nombreux cas, et en particulier en acoustique sous-marine, les caractéristiques de ces bruits ne sont pas stables. Donc, les systèmes pour rester optimaux, doivent pouvoir s'adapter en permanence à ces variations : ils doivent être adaptatifs.

La réalisation de ces filtres pose de nombreux problèmes et n'est pratiquement concevable qu'en digital, ce qui nécessite l'échantillonnage des signaux. Dans cet exposé, après avoir rappelé les équations qui déterminent les filtres optimaux par rapport à différents critères, on examine l'application d'algorithmes d'adaptation à deux systèmes qui répondent l'un à un critère d'estimation, l'autre à un critère de détection.

FILTRES SPATIO-TEMPORELS ADAPTATIFS APRES ECHANTILLONNAGE

2. - CRITERES EMPLOYES DANS LES TRAITEMENTS SPATIO-TEMPORELS [8].

On peut distinguer deux grandes classes de traitements :

- ceux qui sont destinés à détecter la présence du signal sans se soucier des déformations qu'il pourra subir ;
- ceux qui ont pour but d'extraire le signal du bruit en le déformant le moins possible.

2.1. Notations.

Dans tout ce qui suit, on désigne par $C_1, \ldots C_K$ les capteurs qui délivrent K signaux $X_1(t) \ldots X_K(t)$. Les signaux sont échantillonnés, et l'on dispose à un instant donné de K séries de L échantillons (Fig. 1).

$$\begin{cases} X_1(0),\ X_1(1)\ \ldots\ X_1(L-1) \\ X_2(0),\ X_2(1)\ \ldots\ X_2(L-1) \\ \vdots \\ X_K(0),\ X_K(1)\ \ldots\ X_K(L-1) \end{cases}$$

Les échantillons peuvent être réels ou complexes. Le filtrage est effectué par KL pondérations :

$$\begin{cases} W_1(0),\ W_1(1)\ \ldots\ W_1(L-1) \\ \vdots \\ W_K(0),\ W_K(1)\ \ldots\ W_K(L-1). \end{cases}$$

FILTRES SPATIO -TEMPORELS ADAPTATIFS APRES ECHANTILLONNAGE

On suppose que l'échantillonnage a été effectué de façon à respecter les conditions de SHANNON. De plus, les retards éventuels entre capteurs ont été compensés de façon à ce que les signaux issus de la direction (ou plus généralement du point) attendue, arrivent simultanément sur les entrées.

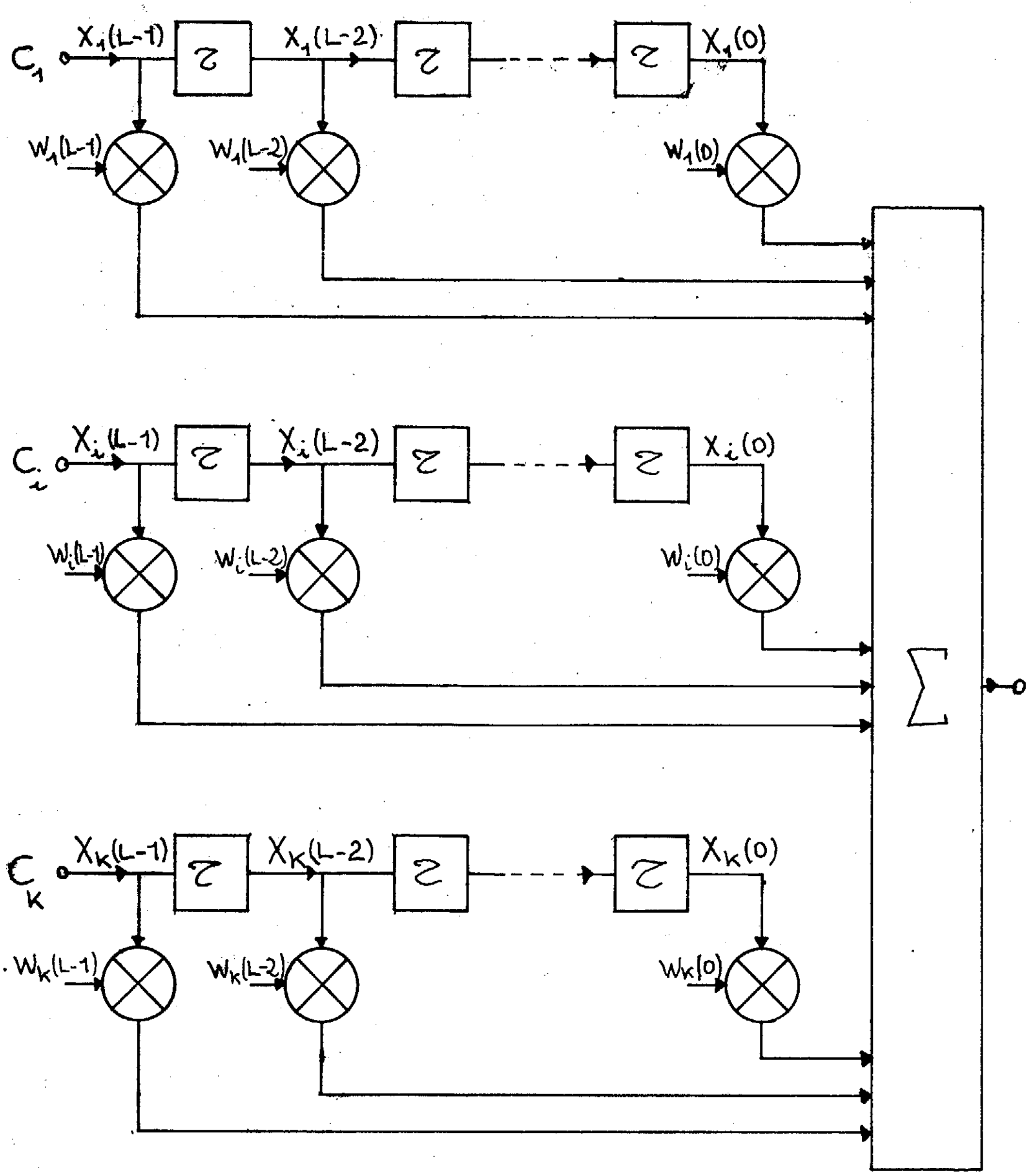

Fig. 1

FILTRES SPATIO — TEMPORELS ADAPTATIFS APRES ECHANTILLONNAGE

De façon à pouvoir effectuer globalement les calculs on va numéroter les échantillons reçus de 0 à KL-1. On peut ainsi définir un vecteur colonne X représentant le signal reçu :

$$X^t = \left(X_1(0), \ldots, X_1(L-1), X_2(0), \ldots, X_K(L-1)\right)$$

$$= (X_0, \ldots, X_{L-1}, X_L, \ldots, X_{N-1}).$$

Les pondérations W sont représentées soit par un vecteur colonne de même dimension N = KL, soit par une matrice (KL, L) dans le cas où l'on calcule simultanément plusieurs échantillons de sortie.

Lorsque le signal attendu est seul reçu, le vecteur X est composé de K séries identiques de L échantillons. On appellera T le vecteur colonne de dimension L représentant la forme temporelle du signal reçu. Le vecteur S correspondant se déduit de T par S = MT où M est une matrice rectangulaire (KL, L) ayant la forme suivante :

$$M = \begin{array}{c} \\ (L)\left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right. \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \left.\begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{1 \quad 0 \quad 0}}^{(L)} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 \\ & \vdots & & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 \end{bmatrix} \end{array}\right\}(N = KL) = \left.\begin{bmatrix} I_L \\ I_L \\ \vdots \\ I_L \end{bmatrix}\right\}(K)$$

Le bruit sera représenté de la même manière par un vecteur colonne B de dimension N :

$$B^t = (b_o, \ldots, b_i, \ldots , b_{N-1})$$

On désigne par R^+ la matrice adjointe de R (transposée et conjuguée).

2.2. Le filtre adapté.

Le filtre adapté est un filtre qui détecte la présence d'un signal connu (cas de la détection active). Il est défini par le critère suivant : c'est le filtre qui maximise le rapport signal à bruit ρ défini par :

$$\rho = \frac{\text{puissance instantanée du signal de sortie lorsque le signal est présent sur les entrées}}{\text{puissance moyenne du bruit.}}$$

Avec les notations introduites plus haut, le numérateur de ρ s'écrit :

$$P_S = (W^+ MT) (W^+ MT)^+$$

$$= W^+ MTT^+ M^+ W$$

La puissance moyenne du bruit s'écrit de la même façon :

$$P_B = E \left[W^+ BB^+ W\right] = W^+ E\left[B B^+\right] W$$

soit :

$$P_B = W^+ R W$$

où R est une matrice carrée de rang N de terme général :

$$r_{ij} = E\left[b_i(t)\ b_j^*(t)\right].$$

Donc :

$$\rho = \frac{W^+ MTT^+M^+W}{W^+ RW}.$$

On peut remarquer que le signal n'apparaît que sous sa forme spatio-temporelle S = MT. Il est donc inutile, dans le cas du filtre adapté, de séparer les variables de temps et d'espace. Tous les calculs suivants peuvent s'effectuer avec le seul vecteur S :

$$\rho = \frac{W^+ S\ S^+ W}{W^+ R W}.$$

On obtient la valeur maximum de ρ en annulant son gradient par rapport à W.

On trouve aisément le vecteur pondération optimum W_A par :

$$R\ W_A = \alpha\ S$$

où α est une constante arbitraire. Ce qui peut s'écrire lorsque R est inversible :

$$W_A = \alpha R^{-1} S.$$

2.3. Estimateur du maximum de vraisemblance

C'est un filtre qui estime le signal reçu. Celui-ci est inconnu et il est mélangé à un bruit de statistique connue. On utilise le fait qu'une antenne fournit plusieurs réalisations identiques du signal mélangées à des bruits différents. Le vecteur bruit B est supposé de loi multidimentionnelle Gaussienne :

$$p(B) = (2\pi)^{-\frac{KL}{2}} \left|R\right|^{-\frac{1}{2}} \exp -\frac{1}{2} (B^{+} R^{-1} B)$$

(on suppose que la matrice R est inversible).

L'estimation $\hat{T}$ du signal T est telle qu'elle rend maximum la probabilité a posteriori :

$$p(X \mid MT) = (2\pi)^{-\frac{KL}{2}} \left|R\right|^{-\frac{1}{2}} \exp -\frac{1}{2} \left\{ (X-MT)^{+} R^{-1} (X-MT) \right\}$$

On en déduit :

$$\hat{T} = (M^{+} R^{-1} M)^{-1} M^{+} R^{-1} X .$$

D'où les pondérations optimales :

$$W_E = R^{-1} M (M^{+} R^{-1} M)^{-1}.$$

$\hat{T}$ est l'estimation de T, donc il comporte L échantillons. Il en résulte que W_E est une matrice de L vecteurs colonnes comprenant chacun KL échantillons ; elle constitue donc L filtres analogues à celui représenté sur la figure 1. La sortie de ce filtre, lorsque le signal est seul présent, s'écrit :

$$W_E^+ MT = (M^+ R^{-1} M^{-1}) M^+ R^{-1} MT = T.$$

Le signal n'est donc pas distordu.

2.4. Filtre de WIENER

C'est un filtre qui traite un signal aléatoire stationnaire. On suppose connue la matrice de corrélation R_{XX} de terme général $E\left[X_i^{++} X_j\right]$ (où X est la somme du signal et du bruit).

On suppose en outre connue la matrice de corrélation du signal seul R_{TT}.

Le filtre de WIENER minimise l'erreur quadratique moyenne entre le signal de sortie et le signal attendu :

$$E\left[(W^+ X-d)\ (W^+ X-d)^+\right]$$

d étant la réponse désirée, par exemple le dernier échantillon de la tranche de signal mise en mémoire : T. Ce dernier s'écrit :

$$(T^+ V)^*, \text{ avec } V^+ = \left[\underbrace{0,\ 0, \ldots\ 0,\ 1}_{L}\right].$$

On en déduit les pondérations optimales :

$$W_W = R_{XX}^{-1}\ M\ R_{TT}\ V.$$

On peut remarquer que le signal est en général distordu par le filtre.

FILTRES SPATIO - TEMPORELS ADAPTATIFS APRES ECHANTILLONNAGE

3. - PROBLEMES POSES PAR LES FILTRES ADAPTATIFS.

On se propose d'étudier les problèmes posés lorsque l'on veut réaliser un filtrage optimum dans une situation où les caractéristiques du bruit sont variables. Il est alors nécessaire de mesurer ces dernières en permanence de façon à modifier en conséquence les pondérations pour qu'elles restent optimales ; le filtrage devient adaptatif.

Or, cette mesure ne peut se faire que sur les signaux d'entrée qui, en plus du bruit, contiennent ou pas le signal attendu. Suivant le critère employé, la présence éventuelle du signal perturbera ou non le filtrage.

D'autre part, les caractéristiques du bruit ne peuvent qu'être estimées sur un intervalle de temps fini. La durée de cet intervalle est un compromis entre la précision de l'estimation et l'adaptation à la non stationnarité du bruit.

Enfin, l'obtention des pondérations optimales par l'application directe des formules établies au paragraphe 2, demande l'inversion de matrices qui peuvent être de dimensions élevées. On est donc amené à substituer à ce calcul direct des algorithmes qui conduisent à la solution optimale par approximations successives.

Dans ce qui suit, on va examiner plus particulièrement ces problèmes dans le cas du filtrage de WIENER et du filtre adapté.

4. - FILTRAGE DE WIENER ADAPTATIF.

Un système de filtrage de WIENER adaptatif a été étudié par WIDROW et GRIFFITHS [9]. Il a été amélioré par GRIFFITHS [10], qui propose un algorithme de la forme :

$$W_{n+1} = W_n + \mu \left[MR_{TT} V - R_{XX} W_n \right]$$

où W_n est la valeur des pondérations à la n ième itération. Il suppose que la matrice des coefficients de corrélation du signal seul R_{TT}, est connue, et remplace R_{XX} par son estimation instantanée $X_n X_n^+$. L'algorithme utilisé est donc :

$$W_{n+1} = W_n + \mu \left[MR_{TT} V - X_n X_n^+ W_n \right].$$

Comme $X_n^+ W_n$ est le conjugué du signal de sortie : y_n, on peut écrire :

$$W_{n+1} = W_n + \mu \left[MR_{TT} V - y_n^* X_n \right].$$

On peut démontrer qu'il existe toujours une valeur de μ pour laquelle l'algorithme converge.

Ce système élimine en particulier les brouilleurs directifs. Il faut cependant noter que le filtre n'est optimal que si le signal est présent, et que la distorsion apportée par ce filtre dépend du rapport signal sur bruit. En particulier, à fort signal sur bruit, le signal n'est pas distordu, mais l'amplitude de sortie varie en raison inverse de celle du signal d'entrée.

Ceci provient du fait que dans la théorie de WIENER, on suppose que les coefficients de corrélation du signal sont entièrement connus. On n'a donc pas le droit en toute rigueur de faire varier l'amplitude du signal.

5. - FILTRAGE ADAPTE ADAPTATIF.

5.1. Détermination de la constante α

Le filtre adapté est défini par la relation :

$$W = \alpha R^{-1} S$$

où α est une constante arbitraire. Le choix de cette constante n'est cependant pas indifférent. En effet, la réponse du filtre à un signal donné va varier en fonction de R.

Il semble avantageux de choisir α de façon à ce que la sensibilité au signal soit constante, c'est-à-dire que la réponse W^+S du filtre au signal attendu soit constante et indépendante de la matrice R. On verra plus loin que ce choix est particulièrement avantageux dans le cas où le bruit est produit par un brouilleur spatialement cohérent.

Le filtre est alors déterminé par :

$$\begin{cases} W^+ S = \beta & \beta \text{ est fixe} \\ R\,W = \alpha\,S & \alpha \text{ est déterminé par la première relation.} \end{cases}$$

Si la matrice R est inversible, on peut écrire :

$$W = \beta \frac{R^{-1}\,S}{S^+\,R^{-1}\,S}$$

où β est indépendant de R.

On peut remarquer qu'un tel choix de α laisse les pondérations inchangées lorsque la puissance du bruit varie sans que la forme de R ne soit modifiée.

5.2. Influence de la présence du signal.

Lorsque le signal est à bande large, son passage dans le filtre ne perturbe pas les pondérations si la constante de temps de l'adaptation est suffisamment grande devant sa durée.

Lorsque le signal est à bande étroite, le filtrage devient purement spatial. En effet, T ne comporte plus qu'un seul échantillon complexe et M se réduit à un vecteur colonne de K éléments égaux à l'unité, Lorsque le signal est présent, on ne mesure plus la matrice R, mais la matrice $R_{XX} = R + SS^+$. On peut néanmoins déterminer W en remplaçant R par R_{XX} dans les formules. En effet, W est donné par :

$$\begin{cases} R\,W = \alpha\ S \\ W^{+}\ S = \beta \end{cases}$$

L'ensemble de ces relations reste valable. En effet;

$$R_{XX}\ W = (R + SS^{+})\ W = RW + SS^{+}\ W$$

$$= RW + S(S^{+}W) = (\alpha + S^{+}\ W)\ S$$

R_{XX} W reste colinéaire à S. Comme l'amplitude de W est déterminée par $W^{+}S = \beta$ qui ne faitpas intervenir R, W est inchangé.

5.3. Algorithme d'adaptation.

L'algorithme utilisé peut s'écrire sous une forme générale :

$$W_{n+1} = W_n + \varepsilon\ (\alpha S - R\ W_n)$$

sous la contrainte : $W_n^{+}\ S = \beta$.

S'il converge, la solution est donc telle que :

$$W = \alpha\ R^{-1}\ S \qquad \text{et } W^{+}\ S = \beta$$

ce qui est le résultat cherché.

Le vecteur RW_n peut s'obtenir de façon simple. En effet, si l'on calcule la corrélation entre les entrées et la sortie, il vient :

$$A = E\left[(W^+ B)\ B\right] = E\left[B^+ B\right] W = R\ W$$

On a donc :

$$A_n = R\ W_n.$$

Dans l'algorithme utilisé, A_n est remplacé par son estimation instantanée $B\ B^+\ W_n$. Il s'écrit :

$$W_{n+1} = W_n + \varepsilon \left\{ \left[g(\beta - S^+ W_n) + \frac{S^+ A_n}{S^+ S} \right] S - A_n \right\}$$

Lorsqu'il converge vers la solution optimale, le terme d'erreur s'annule ; donc ;

$$A = \left[g(\beta - S^+ W_n) + \frac{S^+ A_n}{S^+ S} \right] S$$

et A est de la forme : $A = \alpha\ S$.

En portant cette valeur dans le second membre de l'équation précédente, il vient : $W^+ S = \beta$. L'algorithme conduit donc à la solution optimale : $W = \alpha\ R^{-1}\ S$ et $W^+ S = \beta$.

On peut montrer que lorsque R est inversible, l'algorithme converge si les valeurs de ε et g ont été choisies correctement par rapport aux valeurs propres de R.

5.4. Etude d'un cas particulier - Le brouilleur.

Supposons que le signal soit à bande très étroite. Dans ce cas, le signal temporel se réduit à un échantillon complexe et le vecteur S se réduit à un vecteur colonne à K composantes égales à 1.

Supposons que la seule source de bruit soit constituée par un brouilleur en un point déterminé de l'espace. La matrice du bruit sera alors de la forme $R = XX^+$, les signaux issus des capteurs étant entièrement corrélés. La solution optimale est alors :

$$R\,W = XX^+\,W = \alpha\,S \quad \text{et } S^+\,W = \beta.$$

La première égalité s'écrit $(X^+W)\,X = \alpha\,S$, et ne peut être vérifiée que si $\alpha = 0$ et $S^+\,W = 0$, puisque X et S ne sont pas colinéaires.

Il existe une infinité de solutions à ce système (tous les W tels que $X^+W = 0$).

On peut remarquer que la normalisation choisie permet cette solution, alors que par exemple si α avait été choisi constant, il n'y aurait pas de solution.

On peut montrer aisément que l'algorithme converge bien vers une des solutions optimales, de vecteur W final dépendant de la pondération initiale W_o.

La puissance du bruit à la sortie en présence de brouilleur est nulle. En effet, elle est égale à:
$W^+RW = W^+\,XX^+\,W = 0$.

Le gain en rapport signal à bruit est donc infini. Cela provient de la cohérence totale entre les capteurs [2].

5.5. Limitation de l'adaptativité - Cône de protection.

Lorsque le signal est du type permanent, sa présence ne modifie en rien les pondérations W. Mais, il faut cependant remarquer que pratiquement on ne reçoit pas exactement le signal attendu. En effet, il existe toujours des déphasages parasites ou un dépointage angulaire qui ont pour résultat de fournir un vecteur expérimental S' différent du S attendu. Le système adaptatif classera donc S' comme un brouilleur et l'éliminera. (On peut montrer que l'élimination se fait d'autant plus vite que S' et S sont différents). Il est donc nécessaire d'introduire une limitation à l'adaptation de façon à ne pas éliminer les signaux tels que S'. Cela peut se réaliser en mesurant "l'angle" entre les vecteurs A et S par son cosinus, que l'on peut définir par : $u = \dfrac{A^+ \, SS^+ \, A}{S^+ \, S \, A^+ A}$. Cette expression est toujours positive et inférieure ou égale à l'unité ; lorsque S et A sont colinéaires, u = 1. On peut arrêter l'adaptation (en faisant $\varepsilon = 0$) lorsque u devient supérieur à un seuil que l'on peut calculer compte tenu des tolérances admises sur S. On remplace ainsi le vecteur signal par un "cône" signal qui permet de tolérer une certaine erreur sur les données.

6. - CONCLUSION.

Après avoir rappelé les relations qui définissent les filtres spatio-temporels optimaux vis-à-vis d'un critère de détection et de deux critères d'estimation de signaux, on a présenté deux algorithmes d'adaptation : ils permettent de réaliser l'un un filtre estimateur, l'autre un filtre pré-détecteur, qui restent optimaux lorsque les caractéristiques de l'environnement varient. Ils présentent des similitudes qui sont dues aux formes analogues des relations qui donnent les pondérations optimales. Il faut cependant noter qu'ils répondent à des buts, donc conduisent à des résultats, tout-à-fait différents, l'un se base sur le signal lui-même, l'autre sur ses caractéristiques du second ordre seulement.

Certains des problèmes posés par la réalisation de ces filtres sont nouveaux et spécifiques à l'adaptativité. Notamment, un système adaptatif se basant sur un modèle, a tendance à éliminer tout ce qui ne lui est pas conforme. Il est donc nécessaire de donner une certaine latitude au modèle, de façon à tenir compte de toutes les différences possibles entre le signal reçu et le signal attendu.

FILTRES SPATIO - TEMPORELS ADAPTATIFS APRES ECHANTILLONNAGE

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. BRYN

"Optimum signal processing of three-dimensional arrays operating on gaussian signals and noise"
J. Acoust. Soc. Amer. Vol. 34 n° 3 (March 1962).

[2] H. MERMOZ

"Extension de la méthode du filtrage adapté au cas de plusieurs entrées pour l'optimisation de la détection des signaux faibles - Filtrage adapté et directivité"
Thèse de Doctorat (1964).

[3] R.W. CLINE, W.D. GREGG

"Optimisation of the detectability of array receiving systems"
Electronic Research Center, Univ. of Texas (Austin)
Techn. Rept. n° 60 - (March 1969).

[4] E.J. KELLY, M.J. LEVIN

"Signal parameter estimation for seismometer arrays"
Mass. Inst. Tech. Lincoln Lab., Lexington; Tech. Rep. 339, - (January 1964).

[5] J.P. BURG

"Three-dimensional filtering with an array of seismometers"
Geophysics, vol. XXIX, n° 5 - (October 1964).

FILTRES SPATIO - -TEMPORELS ADAPTATIFS APRES ECHANTILLONNAGE

B I B L I O G R A P H I E

(Suite et fin)

[6] J. CAPON, R.J. GREENFIELD, R.J. KOLKER
"Multidimensional maximum likehood processing of a large aperture seismic array"
Proc. IEEE, vol. 55, n° 2 - (February 1967).

[7] G.O. YOUNG, J.E. HOWARD
"Applications of space-time decision and estimation theory to antenna processing system design"
Proc. IEEE, vol. 58, n° 5 - (May 1970).

[8] H. COX
"Interrelated problems in estimation and detection"
Proc. NATO Adv. Stu. Inst. on Signal Processing with emphasis on underwater acoustics - (August 1968).

[9] B. WIDROW, P.E. MANTEY, L.J. GRIFFITHS, B.B. GOODE
"Adaptive antenna systems"
Proc. IEEE, vol. 55, n° 12 - (December 1967).

[10] L.J. GRIFFITHS
"A simple adaptive algorithm for real-time processing in antenna array"
Proc. IEEE, vol. 57, n° 10 - (October 1969).
