



TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

Nice 1^{er} au 5 juin 1971

APPLICATIONS EN TRAITEMENT DU SIGNAL
DE LA THEORIE DES MESURES CYLINDRIQUES

Par Paul KREE
Université de Nice

RESUME

Après quelques rappels théoriques sur la théorie des probabilités cylindriques, on montre diverses applications en traitement du signal.

SUMMARY

After some preliminary about cylindrical probability, the author give some indications for applications in detection, identification of inputs, identification of parameters, stochastic systems, and functional statistic.



Applications en traitement du signal de
la théorie des mesures cylindriques

Paul KREE

P L A N

- 1 - Introduction.
- 2 - Rappels sur la théorie des mesures cylindriques.
- 3 - Interprétation probabiliste.
- 4 - Application à la détection et à la reconnaissance des formes.
- 5 - Application à l'identification.
- 6 - Application aux systèmes à constantes aléatoires soumis à des excitations aléatoires.
- 7 - Application aux problèmes de statistique fonctionnelle.
- 8 - Bibliographie.



INTRODUCTION.

Nous envisageons d'abord de faire un exposé sur les travaux théoriques et numériques que nous avons effectué l'an dernier, en liaison avec le laboratoire du Brusç, sur la diffraction par un obstacle rigide d'une onde sonore plane, se propageant dans un milieu élastique isotrope homogène : ces travaux, reprenant les résultats de Soules et Mitzner [1], permettent de calculer l'onde diffractée en régime stationnaire et en régime non stationnaire: voir P. Krée [1], [2], Tavernier [1] et Tavernier, Ginesy [1].

Cependant, l'analyse de problèmes d'identification nous a conduit a des résultats théoriques nouveaux dans la théorie des processus stochastiques ayant des applications nouvelles en traitement du signal. C'est pourquoi nous préférons présenter ces résultats ici.

Pour simplifier la lecture de ce travail à un lecteur non mathématicien, nous n'avons pas énoncé toutes les hypothèses permettant de justifier les raisonnements effectués : le lecteur intéressé à des explications et à des développements supplémentaires pourra consulter les travaux indiqués en bibliographie.

Pour les applications indiquées aux paragraphes 4 et 5, on a simplement "géométrisé" et généralisé les présentations usuelles qui sont intuitives et qui n'utilisent pas les probabilités cylindriques. Les résultats annoncés aux paragraphes 6 et 7 sont entièrement nouveaux.

En conclusion, nous constatons que la théorie des probabilités cylindriques permet d'obtenir de nouveaux résultats et permet de présenter géométriquement certains résultats difficiles de la théorie du signal (détection statistique par exemple). Nous souhaitons que ce point de vue sera partagé par les auditeurs de cette communication.



2 - RAPPELS SUR LA THEORIE DES PROBABILITES CYLINDRIQUES.

Cette théorie est due à E. Mourier (thèse), Gross, Gelfand (voir [1]), Minlos, Prohorov, Schwartz (voir [1] et [2]), et relève de l'analyse fonctionnelle.

(1) probabilité sur un espace $E = \mathbb{R}_x^n$ de dimension finie.

Nous ne considérons que des espaces vectoriels réels. Une probabilité μ sur E est donnée par la loi conjointe de l'ensemble des n v.a. x_1, \dots, x_n , c'est-à-dire par la loi de la v.a. vectorielle

$$\vec{x} = (x_1 \dots x_n).$$

On écrira aussi sous forme matricielle $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Nous supposons que μ a des moments d'ordre deux. On peut alors définir le barycentre $\bar{x} = (\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n)$ de μ et l'opérateur de corrélation de μ de matrice $[a] = (a_{ij})$ avec

$$a_{ij} = \mathcal{E}(x_i x_j) \text{ Soit } [a] = \mathcal{E}(x x')$$

x' désignant la transposée de la matrice colonne x . On définit l'opérateur de covariance Λ_μ par sa matrice $[b] = (b_{ij})$ avec :

$$b_{ij} = \mathcal{E}((x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j)) = \mathcal{E}(x_i x_j) - \bar{x}_i \bar{x}_j = a_{ij} - \bar{x}_i \bar{x}_j$$

On peut donner une définition de Λ_μ (plus géométrique) indépendante du choix d'une base de \mathbb{R}^n . A cet effet, on note E l'espace \mathbb{R}^n muni d'une structure euclidienne et l'on voit que Λ_μ est associé à la forme bilinéaire (E' désigne le dual de E) :

$$E' \times E' \xrightarrow{b} \mathbb{R}$$

$$(2) \quad e'_1, e'_2 \rightarrow \int_{x \in E} e'_1(x - \bar{x}) e'_2(x - \bar{x}) d\mu(x)$$

Plus précisément, Λ_μ est tel que

$$(3) \quad \forall e'_1, e'_2 \text{ dans } E', \quad (\Lambda_\mu e'_1, e'_2) = b(e'_1, e'_2)$$

(4) Remarques

a) La transformée de Fourier de μ est la fonction $\hat{\mu}$ définie sur E' telle que

$$(5) \quad \hat{\mu}(u) = \int_{x \in E} e^{-i(u, x)} d\mu(x)$$

b) Quel que soit le vecteur m de E et quel que soit l'opérateur symétrique positif C de E' dans E (ceci signifie que la forme bilinéaire associée à C est symétrique positive), la fonction

$$u \mapsto \exp \left[-i(u, m) + \frac{1}{2} (Cu, u) \right]$$

est la transformée de Fourier d'une loi de probabilité sur E , de moyenne m et d'opérateur de covariance C . Une telle loi est dite gaussienne : voir Métivier [1] et Fourgeaud Fuchs [1].

c) Soit F un nouvel espace euclidien et soit l une application linéaire de E dans F . L'image ν de μ par l , est définie par (voir Métivier [1]) :

$$(6) \quad \nu \text{ bornée continue sur } F, \int_{y \in F} f(y) d\nu(y) = \int_{x \in E} f(l(x)) d\mu(x)$$

Alors ν a pour moyenne $l(\bar{x})$ et pour opérateur de covariance

$$(7) \quad \Lambda_\nu = l \Lambda_\mu l'$$

où l' est la transposée de l . Cette relation résulte du fait que quelles que soient les formes linéaires f'_1 et f'_2 sur F , on a par définition de Λ_ν :

$$(\Lambda_\nu f'_1, f'_2) = \int f'_1(y) f'_2(y) d\nu(y)$$

Et par conséquent, vu (6)

$$(\Lambda_\nu f'_1, f'_2) = \int (f'_1 \circ l(x)) (f'_2 \circ l(x)) d\mu(x)$$

Utilisant la définition de Λ_μ :



Applications en traitement du signal de
la théorie des mesures cylindriques

Paul KREE

$$\begin{aligned}
 &= (\wedge_{\mu} (f_1' \circ 1), f_2' \circ 1) = (\wedge_{\mu} (1'(f_1')), 1'(f_2')) \\
 &= ((1 \wedge_{\mu} 1') f_1', f_2') . \text{ Donc on a (7) }
 \end{aligned}$$

(8) Probabilité sur un espace vectoriel topologique E.

Le cas le plus important est celui où E est un espace de Hilbert réel H . On peut raisonner comme précédemment, en rapportant H à une base orthonormée (e_i) , mais il est préférable de ne pas utiliser de base : la moyenne \bar{x} de la probabilité μ sur H est le vecteur de H tel que :

$$(9) \quad \bar{x} = \int_{x \in H} x \, d\mu(x)$$

L'opérateur de covariance Λ est l'opérateur de H' (ensemble des formes linéaires continues sur H) dans H qui est associé à la forme bilinéaire (2) . La transformée de Fourier de μ est la fonction $\hat{\mu}$ définie sur H' , donnée par la formule (5). Mais il y a une différence fondamentale, en ce qui concerne (4-b). Si la probabilité μ a un opérateur de covariance C, c'est-à-dire si

$$(10) \quad I = \int x \otimes x \, d\mu(x) < \infty$$

on s'aperçoit que l'opérateur symétrique positif C n'est pas quelconque, mais il est tel que pour toute base orthonormée (e_i) :

$$\begin{aligned}
 I &= \int \left(\sum_i x_i e_i, \sum_j x_j e_j \right) d\mu(x) \\
 &= \int \sum_i (e_i(x) e_i, e_i(x) e_i) d\mu(x) = \sum_i \int (e_i, e_i) d\mu(x)
 \end{aligned}$$

Par conséquent, (voir Gelfand [1]) , C est un opérateur à trace, c'est-à-dire que la somme de ses valeurs propres est finie. Or pour les processus du type bruit blanc, l'opérateur identique de H doit pouvoir être considéré comme un opérateur de covariance. Il faut donc généraliser la notion de probabilité sur un e.v.t.

(11) Probabilité cylindrique sur un e.v.t.E.

Le cas le plus important est celui où E est un espace de Hilbert



réel H . Une probabilité cylindrique μ sur H est la donnée pour tout n , et pour toute application linéaire continue a de H dans \mathbb{R}^n , d'une probabilité $a(\mu)$ sur \mathbb{R}^n . Les triplets $(\mathbb{R}^n, a, a(\mu))$ doivent vérifier la

(12) condition de compatibilité.

Pour tout p , pour toute application linéaire continue c de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p l'image de $a(\mu)$ par c doit coïncider avec $b(\mu)$ avec $b = c \circ a$.

Cette définition prolonge celle de probabilité, car si μ est une probabilité sur H , il suffit de prendre pour $a(\mu)$, l'image de μ par a . La notion de mesure image permet de prolonger aux probabilités cylindriques les opérateurs définis ci-dessus pour les probabilités :

- le barycentre $\bar{\mu}$ est tel que

$$(13) \quad \forall e' \in E' \quad e'(\bar{\mu}) = \int x e'(x) dx$$

- l'opérateur de corrélation $A : E' \rightarrow E'$ est associé à la forme bilinéaire continue

$$(14) \quad E' \times E' \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(e'_1, e'_2) \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} x_1 x_2 d((e'_1, e'_2)(\mu))(x_1, x_2)$$

La transformée de Fourier $\hat{\mu}$ de μ est la fonction sur E' telle que

$$(15) \quad \forall u \in E' \quad \hat{\mu}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i u x} d(u(\mu))(x)$$

On peut alors montrer qu'une fonction $\hat{\mu}$ définie sur E' est la transformée de Fourier d'une probabilité cylindrique sur E si et seulement si sa restriction à tout sous-espace de dimension finie de E' est une transformée de Fourier de loi de probabilité. Par conséquent, pour tout opérateur symétrique positif C sur H , la fonction

$$(16) \quad \hat{\mu}(h) = \exp\left(-\frac{1}{2}(Ch, h)\right)$$



Applications en traitement du signal de
la théorie des mesures cylindriques

Paul KREE

est la transformée de Fourier d'une probabilité cylindrique μ_c sur H . On peut voir que la moyenne de μ_c est nulle et que l'opérateur de covariance de μ_c est C .

3 - INTERPRÉTATION PROBABILISTE.

Soit O un ouvert de \mathbb{R}_t^n : en général $n=1$ et O est un intervalle ouvert de la droite.

(17) un processus sur O est une famille $(x_t)_{t \in O}$ de v.a.

Plus précisément, on suppose connue pour tout p , pour tout ensemble $\{t^1, \dots, t^p\}$ de p points de O , la loi $\mu(t^1, \dots, t^p)$ de la v.a. vectorielle $(x_{t^1}, \dots, x_{t^p})$.

A partir de cette donnée, Kolmogoroff a indiqué comment on peut construire une probabilité P sur l'ensemble $\Omega = \mathbb{R}^O$ de toutes les applications de O dans \mathbb{R} . Chaque point de Ω est une trajectoire du processus, et la donnée du processus équivaut au tirage au hasard dans Ω , selon la probabilité P , d'une trajectoire. Cette définition usuelle des processus doit être complétée par la notion de mesurabilité (voir traités classiques de calcul des probabilités).

(18) Un point de vue tout à fait différent, et qui se prête mieux aux applications consiste à se donner une loi de probabilité μ sur un espace vectoriel H de fonctions, ou de fonctions généralisées sur O , la donnée du processus équivalent donc au tirage au hasard dans H , (en suivant la probabilité μ), d'une trajectoire, c'est-à-dire, d'un élément de H . Le cas le plus usuel est celui où $H = L^2(O) =$ l'espace des fonctions de carré intégrable, définies sur O . Si par exemple, on suppose que

$$I = \int_0^{\infty} \|X_t\|^2 dt = \iint_{O \times \Omega} |X_t(\omega)|^2 dt d\omega < \infty$$

l'application suivante



$$\begin{aligned} \Omega &\rightarrow H = L^2(0) \\ \omega &\mapsto X(\omega) \end{aligned}$$

applique la probabilité P définie sur Ω en une probabilité μ sur H telle que

$$\int_H \|f\|^2 d\mu(f) = I < \infty$$

(19) Le processus a une moyenne qui est le barycentre μ de la probabilité μ . L'opérateur de corrélation R du processus est tel que quels que soient f et g dans H :

$$\begin{aligned} (Rf, g) &= \int_H f(h) g(h) d\mu(h) \\ &= \iint (\xi(X_t, X_{t'})) f(t) g(t') dt dt' \end{aligned}$$

Par conséquent R est l'opérateur intégral suivant de H :

$$f \mapsto \int_0^{\cdot} R(t, t') f(t') dt \quad \text{avec} \quad R(t, t') = \xi(X_t, X_{t'})$$

autrement dit, R est naturellement associé à la fonction de corrélation $R(t, t')$ du processus. Notons (voir paragraphe 1) que l'opérateur R est à trace. On voit donc que la notion de probabilités sur un espace de Hilbert permet de rendre compte de la théorie des processus aléatoires du second ordre.

Cependant un bruit blanc sur I , n'a pas des trajectoires de carré sommable. Sa moyenne est nulle (par exemple), mais l'opérateur de covariance n'est pas forcément un opérateur à trace. Le bruit blanc n'est pas un processus usuel, c'est-à-dire définissable par (17). Cependant si l'on régularise le bruit blanc par une fonction ϕ de $L^2(0)$, alors X_ϕ est une variable aléatoire. Gelfand est ainsi arrivé à la notion de processus généralisé du type E' , E étant un e.v.t. de fonctions d'épreuves sur l'ouvert O :



Applications en traitement du signal de
la théorie des mesures cylindriques.

Paul KREE

(20) Pour tout n , quels que soient $\phi_1 \dots \phi_n$ dans E , on connaît la loi conjointe des v.a. X_{ϕ_i} . Ces lois que l'on note $(\phi_1 \dots \phi_n)(\mu)$, doivent vérifier la

(21) Condition de compatibilité.

Si des fonctions $\phi_1 \dots \phi_p$ de E se déduisent par une substitution linéaire de matrice C_{ij} des fonctions $\phi_1 \dots \phi_n$, alors $(\phi_1 \dots \phi_p)(\mu)$ doit se déduire de $(\phi_1 \dots \phi_n)(\mu)$, à l'aide de la même substitution.

Par conséquent (voir paragraphe 2) un processus généralisé du type E' est une probabilité cylindrique sur E . Les opérations définies au paragraphe 2, s'appliquent au processus.

(22) Exemple des transformations linéaires de processus

Supposons qu'une boîte noire réalise une certaine transformation linéaire continue entre un espace de Hilbert H de données d'entrée et un espace de Hilbert K de données de sortie

$$h \xrightarrow{\boxed{1}} k = 1(f)$$

Alors la boîte noire transforme le processus associé à la probabilité cylindrique μ sur H , en le processus associé à la probabilité cylindrique $\nu = 1(\mu)$ sur K .

(23) Par exemple un circuit intégrateur réalise

$$L^2(0,1) \xrightarrow{1} H'(0,1)$$

$$h \mapsto \int_0^t h(\theta) d\theta = k(t)$$

$H'(0,1)$ désignant la partie de l'espace de Sobolev $H'(0,1)$, constituée par les fonctions nulles pour $t = 0$

(24) Exemple du bruit blanc gaussien sur $L^2(0,1)$

C'est le processus associé à la probabilité cylindrique μ_I de transformée de Fourier (16) avec $C = I$. Si l'on a deux intervalles disjoints I_1 et I_2 de fonctions caractéristiques f_1 et f_2 . Notons 1 l'application



$$L^2(0,1) \xrightarrow{1} \mathbb{R}^2$$

$$f \mapsto (f_1(f), f_2(f))$$

Alors μ est la probabilité gaussienne sur \mathbb{R}^n de moyenne 0 et d'opérateur de covariance $D = 1 C 1'$, vu (7). Un petit calcul montre que D est l'opérateur de \mathbb{R}^2 , de matrice

$$\begin{bmatrix} \int_0^1 f_1^2 dt & \int_0^1 f_1 f_2 dt \\ \int_0^1 f_1 f_2 dt & \int_0^1 f_2^2 dt \end{bmatrix}$$

Donc si I_1 et I_2 sont disjoints, $f_1(\cdot)$ et $f_2(\cdot)$ sont des v.a. indépendantes, et le carré de la variance de $f_1(\cdot)$ est proportionnel à la longueur de I_1 . Le transformé de ce processus par la transformation associée au circuit intégrateur, est par définition le processus du mouvement brownien.

4 - APPLICATION A LA DETECTION ET A LA RECONNAISSANCE DES FORMES.

Commençons par étudier

(25) des problèmes pratiques de détection.

Soit $0 =]0,1[$. Soit g un signal d'énergie finie sur 0 . Soit n_w un bruit aléatoire sur 0 représenté par une probabilité cylindrique μ sur $H = L^2(0)$. μ est de moyenne nulle et d'opérateur de covariance $R(t,t')$. A toute fonction f_j de carré sommable sur 0 , on associe la v.a. $f_j(\omega) = \int_0^1 f_j(t) n_w(t) dt$.

On dit que f_j est un appareil de mesure de bruit.

a) Etant donné n , comment faut-il choisir les f_j de façon à ce que les v.a. $f_1(\omega) \dots f_n(\omega)$ représentent le mieux possible le bruit n_w .

b) Comment choisir n pour que l'écart entre n_w et sa représentation $\vec{f}(\omega) = (f_1(\omega) \dots f_n(\omega))$ soit inférieur à un nombre donné.

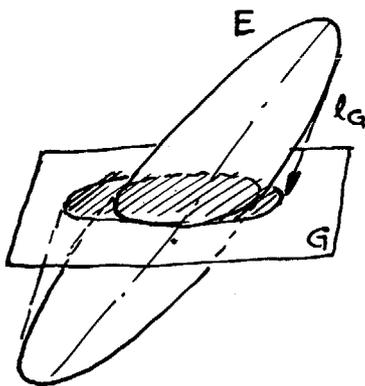
c) on veut à l'aide de la représentation \vec{f} ci-dessus,



décider si le signal est n_ω ou $n_\omega + g$ (problème de la détection d'un signal de forme connu). Comment faut-il procéder pour se tromper le moins possible ? Quelle est la probabilité d'erreur pour une procédure donnée.

(26) Réponse à (25-a) et (25-b)

Ces questions se traduisent géométriquement en le problème de la meilleure approximation de μ par une probabilité portée par un sous-espace G de dimension finie n de H . Notant l_G la projection orthogonale sur G , il s'agit de déterminer G de façon à ce que $l_G(\mu)$ approche le mieux possible μ .



Intuitivement (voir figure ci-contre) si (E) est l'ellipsoïde d'inertie de μ , d'équation

$(Ru, u) = 1$, on voit que l'on a intérêt

à choisir pour G le sous-espace engendré par les n vecteurs propres associés aux plus grandes valeurs de R .

Ceci peut être confirmé par un calcul (voir P. Kree [1]). Dans le cas où le bruit est blanc, (E) est une sphère, et l'on peut prendre pour $(f_1 \dots f_n)$ un système

orthonormé quelconque. Mais dans le cas où R est un opérateur compact, la suite des valeurs propres de R tend vers 0, et par exemple si les $(n+1)$ plus grandes valeurs propres γ_j sont distinctes, le sous-espace optimal G_0 est unique. Il faut prendre pour f_j un vecteur propre normé associé à γ_j . Le processus approché est représenté par la loi conjointe des $f_j(n_\omega) = X_j(x)$, c'est-à-dire, par la v.a.

$$\sum_{j=1}^n \vec{f}_j X_j(\omega)$$

On peut voir que les X_j sont non corrélées et normées : on retrouve ainsi le développement de Karhunen-Loève du processus n_ω , mais nous avons montré que ce développement est optimal. On peut voir que



$$\xi \left(\|x - l_{G_0}(x)\|^2 \right) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \gamma_i$$

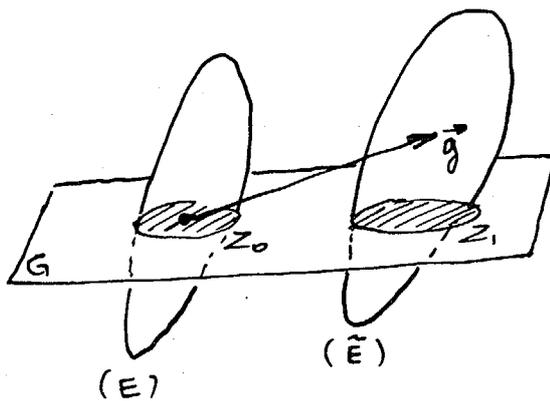
On peut donc trouver n pour que ce nombre soit plus petit qu'un nombre donné à l'avance, ce qui répond à (-b)

Réponse à (25-c)

Si μ est la probabilité cylindrique sur H associée au bruit n_{ω} alors, la probabilité cylindrique associée au processus $g + n_{\omega}$ est l'image de μ par la translation de vecteur g . Notant $\mu(g)$ cette image, on a

$$\overline{\mu(g)} = \bar{\mu} + g = 0 + g = g$$

$$\hat{\mu}(g) = \hat{\mu}$$



géométriquement (voir figure ci-contre), on peut dire que l'ellipsoïde central d'inertie (E') du processus $g+n_{\omega}$ se déduit par la translation de vecteur g , de l'ellipsoïde central d'inertie du processus n_{ω} . Considérant n

comme fixé (nombre d'appareils de mesure; ou dimension du sous espace vectoriel G de H sur lequel on projette orthogonalement les probabilités $\mu(g)$ et $\mu(0) = \mu$), le problème est de déterminer G , de façon à ce que les probabilités $l_G(\mu)$ et $l_G(\mu(g))$ "chargent des zones Z_0 et Z_1 les plus distinctes que possibles", de façon à ce que l'on puisse décider sans trop d'erreur :

- que g est absent si le résultat des n mesures donne un point de Z_0 .
- que g est présent si le résultat des n mesures donne un point de Z_1 .
- qu'il y a ambiguité si le point n'appartient ni à Z_0 , ni à Z_1 .



Applications en traitement du signal de
la théorie des mesures cylindriques.

Paul KREE

(27) A ce niveau, deux méthodes peuvent être appliquées

a) Supposer que n_ω est un processus gaussien et appliquer le critère de Neyman-Pearson, pour déterminer des zones critiques (théorie de tests non paramétriques : voir Fourgeaud et Fuchs [1]).

b) introduire une distance sur l'ensemble des signaux aléatoires : par exemple la distance des ellipsoïdes associés à ces signaux contenant chacun 95 % des masses des probabilités associés à ces signaux, s'ils suivaient des lois gaussiennes. Le problème est de terminer G de façon que les ellipsoïdes associés aux signaux projetés sur G , soient les plus éloignés que possible.

(28) Problème de la reconnaissance des formes.

Considérons le problème de la lecture automatique de textes imprimés ou écrits. Supposons que l'appareil de lecture doit reconnaître un caractère parmi 50 caractères possibles, chaque caractère étant écrit dans un carré donné C , avec une déformation aléatoire (voir sur figure différentes représentations du caractère b). On a cinquante champs aléatoires sur C , que l'on peut noter $a_\omega, b_\omega, c_\omega, \dots, 2_\omega, 3_\omega, \dots$. Chacun de ces cinquante champs aléatoires a une moyenne et un opérateur de covariance. La moyenne \bar{a} du champ a_ω représente la forme moyenne de la lettre a . L'opérateur de covariance Λ_a du champ a_ω représente le mode de déformation du a_x autour de cette forme moyenne. Le système des fonctions de Walsh sur C semble être une bonne base orthonormée sur $L^2(C)$ (voir Koenig-Zolésio dans Krée [1], en ce sens que les composantes d'une fonction caractéristique d'ensemble par rapport à cette base peuvent être facilement calculées et ont une interprétation simple. Le problème de la reconnaissance de forme se présente théoriquement comme les problèmes de détection (25) :

On dispose de n mesures $f_1(\mu_\alpha) \dots f_n(\mu_\alpha)$ avec $\alpha = 1 \dots 50$.
On a 50 ellipsoïdes (E_j) dans l'espace $L^2(C)$, centres aux



points \bar{a} , \bar{b} Comment faut-il choisir le sous espace G de $L^2(C)$ engendré par les f_j et le projecteur P sur G de façon à ce que les ellipsoïdes des $P(\mu_\alpha)$ soient suffisamment distincts.

Pour des raisons pratiques, on prend pour G l'ensemble des combinaisons linéaires des n premières fonctions de Walsh de $L^2(C)$. Les algorithmes d'optimisation usuels devraient permettre de déterminer P , connaissant les moyennes \bar{a} et les opérateurs de covariance Λ_α .

5 - APPLICATION A L'IDENTIFICATION.

Ces problèmes sont simplement évoqués : voir M. Krée [1] P. Krée [7], [8], et une introduction dans A.V. Balakrishnan [1]. Ces problèmes sont très complexes, et sont relatifs à la :

(29) théorie des systèmes

La plupart des systèmes physiques réalisent des isomorphismes \mathcal{A} entre un espace de Hilbert \mathcal{F} de signaux d'entrée f , et un espace de Hilbert \mathcal{Y} d'états y

$$\mathcal{Y} \xrightarrow{\mathcal{A}} \mathcal{F} \quad y \rightarrow \boxed{\mathcal{A}} \rightarrow f$$

$$y \mapsto \mathcal{A}y = f$$

(30) Exemples

- a) l'intégrateur
- b) équation différentielle

$$(Ly)(t) = \dot{y}(t) + e(t)y(t) = f(t) \text{ avec } e(t) = \varepsilon > 0$$

$$y(0) = y_0$$

on a l'isomorphisme

$$H^1(0,1) \rightarrow L^2(0,1) \otimes \mathbb{R}$$

$$y \mapsto (Ly, y(0))$$



Applications en traitement des signaux de
la théorie des mesures cylindriques

Paul KREE

c) voir des systèmes régis par des équations aux dérivées partielles dans P. Krée [1].

(31) identification de grandeurs d'entrée.

Soit \mathcal{Z} un espace d'observations et \mathcal{L} un opérateur (observation) de $\mathcal{L}(Y, \mathcal{Z})$. Le problème est d'estimer l'entrée f connaissant une observation z_0 , et sachant que l'on observe en fait $z_0 = \mathcal{L}y + n_\omega$, où n_ω est un bruit de mesure de moyenne nulle et d'opérateur de covariance Λ_z . La théorie de Gauss Markov (voir Rao [1] peut être généralisée (voir Krée [7] et [8]) et conduit à prendre pour estimation de $\hat{z} = \mathcal{L}\hat{y}$ le point de $\text{Im } \mathcal{L}$ où la forme quadratique:

$$z \rightarrow (\Lambda_z^{-1} (z_0 - z), z_0 - z)$$

atteint son minimum \hat{y} (donc \hat{f}) est unique si et seulement si \mathcal{L} est injectif. Dans le cas où f est une v.a. indépendante de n_ω de moyenne \bar{f} et d'opérateur de covariance Λ_f , on prend (voir M. Krée [1]) le point de \mathcal{F} où la forme quadratique suivante atteint son minimum :

$$z \rightarrow (\Lambda_z^{-1} (z_0 - \mathcal{L}y_f), z_0 - \mathcal{L}y_f) + (\Lambda_f^{-1} f, f)$$

Ceci est équivalent à un problème de contrôle optimal où certains algorithmes de calcul sont connus dans le cas différentiel.

(32) Identification de paramètres du système.

Supposons que la boîte noire dépende d'un paramètre e . Par exemple, dans (30 b), c'est la fonction positive $e(t)$. On connaît l'entrée f et l'observation $z = \mathcal{L}(y(e)) + n_\omega$, où n_ω est un bruit de mesure :

$$\mathcal{L}(y(e)) + n_\omega \begin{array}{c} \oplus \\ \uparrow \\ n_\omega \end{array} \leftarrow \mathcal{L} y(e) \xrightarrow{a} f$$

Le problème est d'estimer e . La méthode des moindres carrés conduit à prendre e ce qui minimise

$$J(e) = (\Lambda_z^{-1} (\mathcal{L}y(e) - z), \mathcal{L}y(e) - z)$$



Des algorithmes de descente peuvent être appliqués pour approcher le point e_0 où $J(e)$ est minimale : voir Chavent [1]

6 - APPLICATION AUX SYSTEMES A CONSTANTES ALEATOIRES SOUMIS A DES EXCITATIONS ALEATOIRES.

La propagation en milieu aléatoire est un problème de ce type. Le calcul de l'intensité dans un circuit (R, C) soumis à une différence de potentiel aléatoire, et comprenant une résistance variant de façon aléatoire est encore un problème de ce type. On connaissait de nombreuses approches qualitatives à l'étude de tels problèmes. Voici une méthode permettant de calculer l'état aléatoire y_ω connaissant la loi conjointe μ de l'entrée f_ω et du paramètre aléatoire e_ω (appartenant à un borélien E_0 d'un Banach séparable E). On cherche la loi conjointe ν de e_ω et y_ω . Soient μ_1 et μ_2 (resp ν_1 et ν_2) les projections canoniques de μ (resp ν). On a une désintégration de μ par rapport à E .

$$\mu(e, f) = \int_{e \in E_0} \mu_e(f) d\mu_1(e)$$

Il suffit de prendre :

$$\nu(e, y) = \int (\alpha(e)^{-1}(\mu_e))(y) d\mu_1(e)$$

Ces formules conduisent à des procédés numériques du type Monte-Carlo, et sont encore valables si f_ω est un processus généralisé sur F : voir Krée [5] et [6]. Cette application montre l'importance de l'introduction des espèces fonctionnels Y, F, E , dans l'étude des problèmes stochastiques.

7 - APPLICATION AUX PROBLEMES DE STATISTIQUE FONCTIONNELLE.

Nous allons simplement donner un exemple

(33) Soit n_ω un bruit blanc gaussien sur $L^2(I)$ de moyenne nulle et d'opérateur de covariance $c^2 I$, c^2 étant un nombre positif donné. Soit m dans $L^2(I)$. On fait n épreuves successives



Applications en traitement du signal de
la théorie des mesures cylindriques.

Paul KREE

et indépendantes sur $m + n_\omega$ et l'on obtient n fonctions x_1, \dots, x_n
de $L^2(I)$. Comment estimer m ? Comment utiliser cette estimation?

Si l'on remplace $L^2(I)$ par \mathbb{R} , on a le problème bien connu de
l'estimation de la moyenne d'une loi normale, connaissant la varian-
ce σ^2 et un échantillon de taille n . Tous les résultats bien
connus pour cet exemple simple peuvent se généraliser à (33) : l'
estimation optimale est $\hat{m} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$, et la loi du vecteur
 $(y_i - \hat{m})_i$ de $(L^2(I))^n$ est une loi gaussienne.

Plus généralement, la plupart des applications de la méthode des
moindres carrés (voir Rao [1] ou Linnik [1]) en statistique classi-
que se prolongent en des applications en statistique fonctionnelle,
et permettent de répondre à des questions du type suivant :

- des échantillons proviennent-ils de la même fonction aléa-
toire ?
- recherche de l'influence de facteurs fonctionnels
- recherche de regression linéaire
-



Applications en traitement du signal de
la théorie des mesures cylindriques.

Paul KREE

BIBLIOGRAPHIE - PROPAGATION

G.W. SOULES et K.M. MITZNER

- 1 Pulses in linear acoustics.
Technical report n° ... (1964).

P. KREE

- [1] Problèmes aux limites pour l'équation de Helmholtz - Section
d'Informatique - Université de Nice R.T.A. 5 (1970).

P. KREE

- [2] Introduction à l'étude des problèmes aux limites pour l'équation
des ondes - Section d'Informatique - Université de Nice R.T.A.6
(1970).

J.F. TAVERNIER

- [1] Etude numérique de problèmes de propagation par la méthode des
équations de Fredholm - Section Informatique - Université de
Nice n° 1 (1970).

J. GINESY et J.F. TAVERNIER

- [1] Calcul de l'onde diffractée par la méthode de Volterra - Section
d'Informatique - Université de Nice R.T.A. 1 (1970).



Applications en traitement du signal de
la théorie des mesures cylindriques.

Paul KREE

BIBLIOGRAPHIE - PROBABILITES CYLINDRIQUES.

M. GELFAND et N.Y. VILENKIN

[1] Les distributions (traduit du russe) tome 4 - Dunod (1967).

A. BLANC LAPIERRE et R. FORTET

[1] Théorie des fonctions aléatoires - Paris - Masson (1953).

P. KREE et ...

[3] Séminaire sur le traitement du signal (à paraître chez Dunod - Université).

L. SCHWARTZ

[1] Les applications radonifiantes - Séminaire à l'école polytechnique (1969-1970).

P. KREE

[4] Introduction aux méthodes variationnelles et à la théorie des systèmes (à paraître).

G. FOURGEAUD et A. FUCHS

[1] Statistique - Dunod (1967).

B.P. LATHI

[1] An introduction to random signals and communication theory - International Textbook company - Seranton (Pennsylvania)(1968).

C.R. RAO

[1] Linear statistical inference and its applications - John Wiley (1965).

M. METIVIER

[1] Notions fondamentales de la théorie des probabilités - Dunod - Université (1968)

ARTICLES

L. SCHWARTZ

- [2] Les mesures cylindriques - séminaire Bourbaki - Paris -
novembre 1970.

P. KREE

- [5] Produit et accouplement de processus stochastiques généralisés.
Application aux équations aux dérivées partielles à coefficients
aléatoires - Note C.R. Acad. Sc. Paris (24 janvier 1971).

P. KREE

- [6] Analyse fonctionnelle et équations aux dérivées partielles à
coefficients aléatoires - à paraître - actes du colloque de
l'Institut des Hautes Etudes Mathématiques de Rome (janvier 71)

P. KREE

- [7] Synthesis and extension of some linear variational theory.
Application to the theory of distributed parameter system.
to appear - Journal of differential equations.

P. KREE

- [8] Quelques résultats sur la théorie des systèmes gouvernés par
des équations aux dérivées partielles - Note C.R. Acad. Sc.
Paris (avril 1971).

M. KREE

- [9] Remarque sur la méthode des moindres carrés - Note C.R. Acad
Sc. Paris (avril 1971).

CHAVENT

- [1] Thèse - Paris 1971 - à paraître.

A.V. BALAKRISHNAN

- [1] Introduction to the theory of identification of systems -
Roma 1968.

Y.V. LINNIK

- [1] La méthode des moindres carrés - Dunod (1968).