



DEUXIÈME COLLOQUE
SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL
ET SES APPLICATIONS
NICE - 5 AU 10 MAI 1969

47/1

CHOIX D'UNE MODULATION EN PRESENCE D'UNE DIVERSITE DE CANAUX.

J.A. VILLE

S O M M A I R E

INTRODUCTION.

1. PRINCIPES DE TRANSMISSION.

- 1.1. Canal de transmission.
- 1.2. Distorsions dans un canal donné, sans bruit.
- 1.3. Distorsions dues aux variations du canal.
- 1.4. Bruit et réverbération.
- 1.5. Variations aléatoires du canal.

2. PRINCIPES DE DETECTION.

- 2.1. Lutte contre le bruit lorsque le bruit est connu.
- 2.2. Lutte contre le bruit lorsque le bruit est mal connu.

3. ADAPTATION D'UNE DETECTION A UNE MODULATION.

- 3.1. Principes généraux de modulation.
- 3.2. Codage et redondance.
- 3.3. Le couple modulation détection.

4. ETUDE D'UN CANAL LINEAIRE VARIABLE.

- 4.1. Uniformisation d'une inversion de matrices.
- 4.2. Inversion d'une matrice dans un champ de matrices.
- 4.3. Codage d'un vecteur.

5. ETUDE D'UN CANAL ACOUSTIQUE.

- 5.1. Variations de trajet.
- 5.2. Limitation de débit d'un canal unilatéral.
- 5.3. Modulation d'un signal télégraphique.

CONCLUSION.



J.A. VILLE

I N T R O D U C T I O N

Si un sondage acoustique a pour but de déterminer les anomalies d'impédance d'un milieu, une transmission acoustique suppose le milieu connu, et ne concerne que les signaux. Mais si le milieu est inconnu, le système de transmission comporte, d'une manière apparente ou cachée, un certain sondage du milieu.

Le problème s'est posé de transmettre dans un milieu où plusieurs canaux pouvant exister, il existe une duplication du signal reçu, duplication théoriquement facile à combattre, mais fort gênante en pratique. La modulation du signal émis doit donc permettre de mesurer les différentes durées de trajet. Mais cela n'implique pas nécessairement qu'on les mesure, mais simplement que l'on se sert de la modulation du signal pour éliminer la duplication. Nous avons essayé une théorie générale de cette conception, en cherchant à montrer que le problème revient, logiquement, à chercher une inverse commune à plusieurs transformations, parmi lesquelles on sait que se place la transformation effective. Ceci conduit à une solution qui n'est certainement pas la seule possible, mais qui montre comment on peut restreindre le champ de recherches.

47/4 DEUXIÈME COLLOQUE
SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL
ET SES APPLICATIONS
NICE - 5 AU 10 MAI 1969

CHOIX D'UNE MODULATION EN PRESENCE D'UNE DIVERSITE DE CANAUX.

J. A. VILLE

1. PRINCIPES DE TRANSMISSION.

1.1. Canal de transmission.

Un milieu dans lequel peut se produire une propagation, et dans lequel sont plongés un émetteur et un récepteur, établit une relation entre X , état du milieu au voisinage de l'émetteur, et Y , état du milieu au voisinage du récepteur. Cette relation peut s'écrire :

$$(1) \quad P(X, Y)$$

La relation P ignore que nous avons affaire à un émetteur ou à un récepteur puisqu'elle concerne le milieu.

L'émission est caractérisée par une relation $\alpha(X)$, imposée à l'état du milieu, pour qu'il y ait propagation vers l'intérieur. La relation $\alpha(X)$ exprime la relation entre le signal et l'impédance du milieu, vue de l'émetteur. La relation entre X émis et Y reçu se présente donc sous la forme :

$$(2) \quad P(X, Y) \& \alpha(X) \quad (\text{Le signe } \& \text{ signifie et}).$$

La relation (2) permet de préciser la forme du signal reçu. Ce signal est astreint à la condition :

$$(3) \quad \beta(Y) = (EX) [P(X, Y) \& \alpha(X)]$$

CHOIX D'UNE MODULATION EN PRESENCE D'UNE DIVERSITE DE CANAUX.

J.A. VILLE

($\exists X$) signifiant "il existe un X tel que".

Lorsque le milieu est sans bruit, et par conséquent déterministe, la relation (2) associe à tout signal X (satisfaisant $\alpha(X)$) un signal Y unique.

Considérons par exemple un milieu linéaire. Nous obtiendrons une relation entre X et Y de la forme :

$$(4) \quad AX = BY$$

La condition d'impédance au départ sera par exemple :

$$(5) \quad HX = 0$$

Admettons que A et B admettent des inverses. La condition d'impédance à l'arrivée sera ainsi de la forme :

$$(6) \quad KY = 0$$

avec

$$(7) \quad K = HA^{-1} B$$

Comme Y se déduit de X par :

$$(8) \quad Y = B^{-1} AX$$

on constate que la condition d'impédance se transforme d'une manière contrevariante vis-à-vis de la transformation du signal.

Nous aurions évidemment une condition d'impédance au départ pour le récepteur, qui serait :

$$(8) \quad kY = 0$$

ce qui donnerait la condition d'impédance à l'arrivée pour l'émetteur,

CHEGIX D'UNE MODULATION EN PRESENCE D'UNE DIVERSITE DE CANAUX.

J.A. VILLE

$$(9) \quad hX = 0$$

avec

$$(10) \quad h = k B^{-1} A$$

La relation entre h et k est la même que celle entre H et K . Dans le cas linéaire, on ajoute l'hypothèse que tout vecteur X est la somme d'un vecteur satisfaisant (5) et d'un vecteur satisfaisant (9), et qu'aucun vecteur ne satisfait les deux relations à la fois (sauf le vecteur nul).

On peut admettre que H et h admettent des inverses droites, c'est-à-dire qu'il existe $I(H)$ et $I(h)$ avec

$$HI(H) = E$$

$$hI(h) = E$$

On peut choisir ces inverses de manière que les matrices

$$I(H)H \quad \text{et} \quad I(h)h$$

soient symétriques. La condition que tout vecteur s'exprime en fonction d'un signal satisfaisant (5) et un vecteur satisfaisant (9) aucun signal ne satisfaisant les deux conditions à la fois, conduit à :

$$(11) \quad I(H)H + I(h)h = E$$

qui est la relation liant impédances directe et inverse vues de l'émetteur. Cela correspond à la règle du changement de signe de l'impédance d'une ligne d'après le sens de transmission.

CHOIX D'UNE MODULATION EN PRESENCE D'UNE DIVERSITE DE CANAUX.

J.A. VILLE

1.2. Distorsion dans un canal donné, sans bruit.

Les distorsions apparaissent, sans espoir de contre distorsion, lorsque certains signaux émis ne sont pas reçus. Ceci se traduit par le fait que, dans l'exemple linéaire, la matrice A admet des vecteurs singuliers, compatibles avec la condition d'impédance. Donc la matrice

$$(1) \quad \begin{bmatrix} A \\ H \end{bmatrix}$$

admet des vecteurs singuliers. Pour que la transmission soit effective, il faut limiter l'émission aux vecteurs non singuliers, c'est-à-dire imposer une condition supplémentaire à X, soit :

$$(2) \quad \overline{H}X = 0$$

Cette condition supplémentaire $\overline{H}$ doit être telle que la matrice :

$$(3) \quad \begin{bmatrix} A \\ \overline{H} \\ H \end{bmatrix}$$

ne soit plus singulière.

On peut y arriver en faisant $\overline{H}$ égal à la matrice unité. Mais cela revient à renoncer à transmettre. Se pose donc le problème d'ajouter une condition la moins restrictive possible, par exemple de manière que le rang de la matrice

$$\begin{bmatrix} H \\ \overline{H} \end{bmatrix}$$

soit minimum (puisque ce rang est le nombre de conditions imposées). Ce procédé est un procédé de préfiltrage, ou de limitation de bande, ou de changement de fréquence.

CHOIX D'UNE MODULATION EN PRESENCE D'UNE DIVERSITE DE CANAUX.

J.A. VILLE

1.3. Distorsions dues aux variations du canal.

Un canal variable est caractérisé par la présence d'un paramètre inconnu dans la relation P. Cette relation P est ainsi de la forme :

$$P(X, Y, \lambda)$$

Il en résulte que X ne peut pas être déduit de Y.

On peut en général se ramener au cas où nous pouvons exprimer Y en fonction de X,

$$(1) \quad Y = A(X, \lambda)$$

La reconstitution de X à partir de Y se fait par une inversion de la forme :

$$(2) \quad X = B(Y)$$

Si on connaissait λ , on pourrait reconstituer X ; dans l'ignorance de λ , on peut chercher à rendre minimum l'écart entre X et

$$B[A(X, \lambda)]$$

La distorsion sera caractérisée par l'écart entre X et $B[A(X, \lambda)]$.

Cet écart peut être minimisé par un choix convenable de B et par le choix d'une condition supplémentaire à laquelle est astreint X. Plus cette condition sera restrictive, meilleure sera la reconstitution, mais moindre sera l'information disponible. Il faut noter également que si X n'est pas quelconque, Y fournit une indication sur λ , laquelle peut servir à la formation de B.



J.A. VILLE

1.4. Bruit et réverbération.

Bien que les questions de bruit et de réverbération ne constituent pas l'objet principal de l'étude, nous devons mentionner comment elles interviennent dans le modèle de transmission considéré.

Considérons le bruit, pour un canal variable.

Le bruit se caractérise par le fait que dans la relation :

$$(1) \quad Y = A (X, \lambda)$$

λ est un élément aléatoire. La réverbération, ou le trainage, est caractérisé par la même équation (1). La différence entre bruit et réverbération n'apparaît clairement que lorsque l'on entre plus avant dans la structure de la fonction A .

Le bruit peut se caractériser par le fait que Y , signal reçu, est de la forme :

$$Y = A (Z)$$

A étant non aléatoire, Z étant un signal aléatoire superposition de X , signal émis, et d'un signal aléatoire β . De sorte que :

$$(2) \quad Y = A [X + \beta]$$

β étant aléatoire, indépendant de X .

Lorsqu'il y a réverbération, ou trainage, le signal parasite est fonction de X , et est d'autant plus important que X l'est. De sorte que la relation entre émission et réception est de la forme :

$$AX + \Theta X$$

CHOIX D'UNE MODULATION EN PRESENCE D'UNE DIVERSITE DE CANAUX

J. A. VILLE.

θ étant aléatoire. La distinction n'est bien ^{nette} ~~réelle~~ que dans le cas linéaire, où Y est de la forme :

$$Y = AX + Z + \alpha X$$

Z et α étant aléatoires, indépendants de X.

1.5. Variations aléatoires du canal.

Nous avons en fin de compte, pour un canal du type canal acoustique, à considérer **3** sortes de variations. Une variation lente macroscopique, correspondant par exemple à la variation de la bathythermie, une variation des conditions microscopiques de propagation et réflexion, et une variation des sources locales de bruit. Les deux dernières variations sont rapides, et nombreuses, ce qui les rend justiciables de la statistique. Les variations du premier type sont lentes ; elles peuvent être détectées, mais la détection continue pose un problème technique difficile, il est encore plus difficile d'associer à la détection une adaptation de la détection.

2. PRINCIPES DE DETECTION.2.1. Lutte contre le bruit, lorsque le bruit est connu.

Lorsque le bruit est connu statistiquement, c'est-à-dire en répartition spectrale et en puissance, cela revient à dire que l'on a, dans le cas linéaire :

$$Y = AX + Z$$

Z étant une variable aléatoire connue. Nous sommes donc en mesure, connaissant la distribution de Y en fonction du paramètre X, de construire une estimation optimum (d'après différents

CHOIX D'UNE MODULATION EN PRESENCE D'UNE DIVERSITE DE CANAUX

J. A. VILLE

critères), pour X , connaissant le champ de variation de X . Pour une contrainte donnée, portant sur l'énergie émise, sur les conditions d'impédance d'entrée du canal, et sur les structures possibles pour l'émetteur, il est envisageable de choisir, pour un débit d'information donné, un choix rationnel de la forme de X et de la forme de l'estimateur :

$$X = BY$$

2.2. Lutte contre le bruit, lorsque le bruit est mal connu.

Lorsque le bruit est mal connue, le problème envisagé au paragraphe précédent change d'aspect. En effet, nous avons maintenant :

$$Y = AX + Z(\lambda)$$

Z étant une variable aléatoire dont la distribution dépend de .

Lorsque le bruit est connu à part son niveau, le problème est considérablement simplifié, puisque la relation est de la forme :

$$Y = AX + \beta Z$$

Z étant connu, β étant un scalaire inconnu. On constate alors que tout se passe comme plus haut, et que l'estimateur B est presque indépendant de β . La seule inconnue est la performance du système. Mais β peut s'estimer assez rapidement, et l'on peut donc procéder à des détections d'erreurs (au sens où l'on peut savoir si un signal est ou non significatif).

Réfléchissons au cas où nous aurions :

$$\text{soit } Y = AX + Z_1$$

$$\text{soit } Y = AX + Z_2$$

J.A. VILLE

Z_1 et Z_2 étant connues (au sens du calcul des probabilités), mais où nous serions dans l'ignorance de l'intervention de Z_1 ou de Z_2 .

On peut procéder par estimation, en procédant comme suit.

Pour une transmission de la forme :

$$Y = AX + Z$$

Z étant connue, ainsi que A , et la distribution de X étant connue, il existe une matrice B telle que la variance de l'écart

$$X - BY$$

soit minimum.

Y étant reçu, nous reconstituons X par BY , et Y par ABY qui est différent de Y_2 de sorte que la différence

$$Y - ABY$$

est une estimation de Z . Nous pouvons calculer l'énergie moyenne de ce signal, et le comparer à l'énergie moyenne de Z . Si l'écart est important, cela signifie que l'hypothèse sur Z était fautive. Donc, dans le cas de deux bruits Z_1 et Z_2 nous pouvons former B_1 et B_2 , et les deux critères attachés aux variances de

$$Y - A_1 B_1 Y, \quad Y - A_2 B_2 Y.$$

Si l'un des critères est mauvais, nous adoptons l'autre valeur de B . Ce n'est que si les deux estimations de Z_1 et Z_2 sont correctes que nous sommes dans l'indécision. Il faut donc essayer de séparer ces deux critères, ce que nous ne pouvons faire qu'en agissant sur le choix de X .

CHOIX D'UNE MODULATION EN PRESENCE D'UNE DIVERSITE DE CANAUX.

J. A. VILLE

3. ADAPTATION D'UNE MODULATION A UNE DETECTION.3.1. Principes généraux de modulation.

La modulation consiste, à partir d'un signal $s(t)$, à former un autre signal $S(t)$, mieux adapté à des impératifs de transmission. La modulation d'amplitude consiste dans la transformation

$$(1) \quad S(t) = \cos \omega t \cdot s(t) ,$$

celle de phase dans la transformation :

$$(2) \quad S(t) = \cos [\omega t + \alpha s(t)]$$

Il faut remarquer que la modulation ne s'inverse jamais par l'inversion de la formule mathématique correspondante. Par exemple, on ne reconstitue pas $s(t)$ par les formules

$$(3) \quad s(t) = \frac{S(t)}{\cos \omega t} \quad s(t) = \frac{1}{\alpha} [\text{Arc Cos } S(t) - \omega t]$$

Ces formules mathématiques sont beaucoup trop sensibles aux variations inévitables dans la transmission, comme phase de la porteuse dans le premier cas et niveau du signal dans le second. On constate ainsi que pratiquement la modulation consiste à appauvrir le champ des signaux disponibles, de manière à gagner sur la qualité de transmission au prix d'une limitation des signaux. Il est évident que le signal $S(t)$ n'est pas un signal quelconque compris entre -1 et $+1$, contrairement à ce que pourrait faire croire la deuxième formule d'inversion (3), qui est inutilisable. Donc, en réalité, pour tous les signaux de la forme :

$$S(t) = \beta(t) [\cos(\omega t + \alpha s(t))]$$

J. A. VILLE

où $\beta(t)$ n'est pas trop irrégulier, nous retrouverons à la démodulation, le même signal $s(t)$.

C'est pourquoi nous considérerons toujours l'effet d'une modulation comme une restriction du champ des signaux à l'entrée.

3.2. Codage et redondance.

Le codage, sous sa forme arithmétique, consiste à associer à un certain nombre de messages :

$$1, 2, \dots, n$$

d'autres messages pris dans la collection

$$1, 2, \dots, N$$

par une règle quelconque. Cela définit une fonction d'entiers, à valeurs entières,

$$(1) \quad f(x, y) = 0 \quad \begin{array}{l} x = 1, 2, \dots, n \\ y = 1, 2, \dots, N. \end{array}$$

Ceci se traduit toujours par une perte d'information. En effet, si nous essayons de reconstituer x à partir de y , nous pourrions au plus trouver sans ambiguïté les valeurs primitives.

Si nous ne pouvons transmettre x que par l'intermédiaire de y , nous devons restreindre le champ de variation de x , parce que deux x correspondant à un même y seront irrémédiablement confondus. Si y se change en z , autre entier, mais avec une certaine incertitude, nous aurons :

$$(2) \quad g(y, z) = 0$$



CHOIX D'UNE MODULATION EN PRESENCE D'UNE DIVERSITE DE CANAUX.

J. A. VILLE

Donc, nous devons restreindre le champ des y pour pouvoir reconnaître y , puis x , à partir de z .

Un canal est défini par $g(y, z) = 0$. Le codage consiste dans le choix d'un sous-ensemble pour x , et d'une relation entre x et y , rendant possible la restitution de x à partir de z . Ceci amène à choisir des y qui sont éparpillés parmi les valeurs possibles, ce qui occupe un champ qui est en pratique, plus étendu qu'un champ contenant le nombre minimum d'éléments nécessaires à la transmission. Par exemple, le spectre d'un signal modulé en fréquence, bien que constitué par des raies dont la somme des largeurs est réduite, occupe une grande largeur de spectre. C'est ainsi que s'introduit une redondance dans une modulation.

3.3. Le couple modulation détection.

Lorsqu'une transmission dépend d'un paramètre inconnu λ , on peut envisager plusieurs détecteurs, mais la modulation reste unique, tant que l'on n'est pas informé sur λ . Le problème qui se pose est ainsi d'associer à une modulation M un ensemble de détecteurs $M(\lambda)$, dont chacun a pour rôle de reconstituer le signal (sous l'hypothèse λ) et de fournir un test permettant de juger si l'hypothèse λ est valable. On peut n'utiliser que les signaux pour lesquels l'hypothèse λ est valable. On suppose a priori qu'une hypothèse au moins sera reconnue valable. Mais se pose alors la question : si deux hypothèses différentes sont reconnues valables et que les signaux détectés soient voisins, peut-on admettre que l'on a une bonne détection ? Le problème étant difficile, nous l'abordons par le moyen de l'analyse linéaire.

J. A. VILLE

4. ETUDE D'UN CANAL LINEAIRE VARIABLE.4.1. Uniformisation d'une inversion de matrices.

Etant donnée une relation de la forme :

$$(1) \quad Y = AX$$

où X et Y sont des vecteurs colonne, A une matrice, on peut chercher à re constituer X à partir de Y . Ceci n'est possible que si A admet une inverse gauche, c'est-à-dire s'il existe $I(A)$ avec :

$$(2) \quad I(A)A = E$$

auquel cas on obtient X par

$$(3) \quad X = I(A)Y$$

Un test est possible. La reconstitution est correcte si

$$(4) \quad Y = AI(A)Y$$

Si le signal "reçu" Y ne satisfait pas cette formule, la reconstitution (3) est douteuse, parce que le passage de X à Y ne s'est pas fait par l'intermédiaire de A , mais d'une autre matrice.

Supposons maintenant que A n'admette pas d'inverse gauche. Il y a ambiguïté sur X . Pour discuter ce problème, nous recourrons à la notion de pseudo-inverse. Nous appelons pseudo-inverse $I(A)$ de A la solution en X , qui existe toujours et est unique, du système :

CHOIX D'UNE MODULATION EN PRESENCE D'UNE DIVERSITE DE CANAUX.

J.A. VILLE

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & X A X = X \\
 & A X A = A \\
 & X A A^* = A^* \\
 & A^* A X = A^*
 \end{aligned}$$

La relation de pseudo-inverse est involutive, c'est-à-dire que A est la pseudo-inverse de $I(A)$.

L'équation (1) en X a pour solution générale

$$(6) \quad X = I(A)Y + [E - I(A)A]Z$$

Z étant arbitraire. Y doit satisfaire le critère :

$$(7) \quad [E - A I(A)]Y = 0$$

Si ce critère n'est pas vérifié, nous savons que la formule (6) est fausse. Mais s'il est vérifié, c'est-à-dire s'il existe un signal de départ $\bar{X}$, et que $Y = A\bar{X}$ nous obtenons par (6)

$$X = I(A)A\bar{X} + [E - I(A)A]Z$$

qui n'a aucune raison de coïncider avec $\bar{X}$ (sauf si l'on choisit l'arbitraire Z égale à $\bar{X}$, ce qui est impossible puisque est inconnue).

On peut alors imposer une condition à X , ce qui permettra d'obtenir X d'une manière unique, et de renforcer le critère imposé à Y . Le système primitif devient :

$$\begin{aligned}
 (8) \quad & AX = Y \\
 & HX = 0
 \end{aligned}$$

J. A. VILLE

Il s'inverse en :

$$(9) \quad \begin{aligned} X &= BY \\ KY &= 0 \end{aligned}$$

On peut montrer que H est soumis à la seule restriction que

$$(10) \quad A^*A + H^*H = \mathcal{R}$$

soit une matrice régulière.

On obtient alors les relations :

$$(11) \quad \begin{aligned} \bar{A} &= A [E - I(H)H] \\ \bar{B} &= B [E - I(K)K] = I(\bar{A}) \\ \bar{A} I(\bar{A}) + I(K)K &= E \\ \bar{B} I(\bar{B}) + I(H)H &= E \end{aligned}$$

Ces équations, pour A et H donnés, admettent de nombreuses solutions en $\bar{B}$ et K .

La solution générale s'obtient en posant :

$$\begin{aligned} E - \bar{A} I(\bar{A}) &= \alpha \alpha^* \quad (\alpha^* \alpha = e) \\ K &= \rho \alpha^* \\ B &= I(\bar{A}) + \beta K \end{aligned}$$

ρ étant une matrice arbitraire admettant une inverse gauche,
et β une matrice arbitraire.

4.2. Inversion d'une matrice dans un champ de matrices.

Supposons maintenant que nous ayons à hésiter entre :

CHOIX D'UNE MODULATION EN PRESENCE D'UNE DIVERSITE DE CANAUX.

J.A. VILLE

$$Y = A_1 X \quad Y = A_2 X$$

Cherchons à uniformiser X avec une condition H . Nous aurons alors à choisir H de manière que :

$$\bar{A}_1 = A_1 [E - I(H)H]$$

$$\bar{A}_2 = A_2 [E - I(H)H]$$

$$I(\bar{A}_1)\bar{A}_1 + I(H)H = E$$

$$I(\bar{A}_2)\bar{A}_2 + I(H)H = E$$

$$(1) \quad \bar{A}_1 I(\bar{A}_1) + I(K_1)K_1 = E$$

$$\bar{A}_2 I(\bar{A}_2) + I(K_2)K_2 = E$$

Nous aurons deux critères :

$$K_1 Y = 0$$

$$K_2 Y = 0$$

et deux formules d'inversion

$$X = B_1 Y$$

$$X = B_2 Y$$

avec

$$B_1 = I(\bar{A}_1) + \lambda_1 K_1$$

$$B_2 = I(\bar{A}_2) + \lambda_2 K_2$$

Supposons qu'un vecteur X soit transmis par A_1 . Il fait apparaître un vecteur Y , pour lequel $K_1 Y = 0$. Si $K_2 Y \neq 0$ nous reconstituons X sans erreur. Il peut y avoir erreur si

$$K_2 Y = 0$$

$$B_2 Y \neq X$$

Donc, les vecteurs X_1 qui, transmis sur A_1 , peuvent conduire à confusion sont ceux pour lesquels

$$H X_1 = 0$$

$$(1) \quad K_2 A_1 X_1 = 0$$

$$B_2 A_1 X_1 \neq X_1$$

J. A. VILLE

On définirait de même les vecteurs X_2 qui peuvent conduire à confusion s'ils sont transmis sur A_2 . Ils satisfont :

$$(2) \quad \begin{aligned} H X_2 &= 0 \\ K_1 A_2 X_2 &= 0 \\ B_1 A_2 X_2 &\neq X_2 \end{aligned}$$

Pour que la confusion soit impossible, il faut que les ensembles (1) et (2) soient vides. Ainsi, pour le premier, la condition

$$\begin{aligned} H X_1 &= 0 \\ K_2 A_1 X_1 &= 0 \end{aligned}$$

doit impliquer

$$(E - B_2 A_1) X_1 = 0$$

ce qui exige que

$$(3) \quad E - B_2 A_1 = \alpha_1 H + \beta_1 K_2 A_1$$

De même nous devrions avoir :

$$(3') \quad E - B_1 A_2 = \alpha_2 H + \beta_2 K_1 A_2$$

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ étant quatre matrices dont l'existence doit être assurée.

L'élimination de α_1 dans (3) conduit à :

$$(E - B_2 A_2)(E - I(H)H) = \beta_2 K_2 A_1 [E - I(H)H]$$

ou encore

$$E - I(H)H - B_2 \bar{A}_1 = \beta_2 K_2 \bar{A}_1$$

et, en tenant compte de la valeur de B_2 :

$$E - I(H)H - I(\bar{A}_2) \bar{A}_1 - \lambda_2 K_2 \bar{A}_1 = \beta_2 K_2 \bar{A}_1$$

CHOIX D'UNE MODULATION EN PRESENCE D'UNE DIVERSITE DE CANAUX.

J. A. VILLE.

En groupant λ_2 et β_1 , nous obtenons la condition

$$I(\bar{A}_1) \bar{A}_1 - I(\bar{A}_2) \bar{A}_1 = \beta_1 \kappa_2 \bar{A}_2$$

ou, en substituant $\beta_1 \kappa_2$ à β_1 , la forme

$$(4) \quad I(\bar{A}_1) \bar{A}_1 - I(\bar{A}_2) \bar{A}_1 = \beta_1 (E - \bar{A}_2 I(\bar{A}_2)) \bar{A}_1$$

De même nous aurions :

$$(5) \quad I(\bar{A}_2) \bar{A}_2 - I(\bar{A}_1) \bar{A}_2 = \beta_2 [E - \bar{A}_1 I(\bar{A}_1)] \bar{A}_2$$

La condition

$$I(\bar{A}_1) \bar{A}_2 = I(\bar{A}_2) \bar{A}_2$$

permet d'écrire $\bar{A}_1$ et $\bar{A}_2$ sous la forme :

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 &= \alpha_1 \rho \\ \bar{A}_2 &= \alpha_2 \rho \end{aligned} \quad \begin{array}{l} (\alpha_1 \text{ et } \alpha_2 \text{ ne sont pas} \\ \text{liés aux matrices } \alpha_1 \text{ et } \alpha_2 \\ \text{de } (A) \text{ et } (B)) \end{array}$$

Les matrices $\alpha_1^* \alpha_1$, $\alpha_2^* \alpha_2$, $\rho \rho^*$ étant régulières; nous avons alors :

$$I(\bar{A}_1) = \rho^* (\rho \rho^*)^{-1} (\alpha_1^* \alpha_1)^{-1} \alpha_1^*$$

$$I(\bar{A}_2) = \rho^* (\rho \rho^*)^{-1} (\alpha_2^* \alpha_2)^{-1} \alpha_2^*$$

L'équation (4) devient

$$\rho^* (\rho \rho^*)^{-1} \rho - \rho^* (\rho \rho^*)^{-1} (\alpha_2^* \alpha_2)^{-1} \alpha_2^* \alpha_1 \rho = \beta_1 [E - \alpha_2 (\alpha_2^* \alpha_2)^{-1} \alpha_2^*] \alpha_1 \rho$$

Multiplions par ρ , à gauche :

$$\rho - (\alpha_2^* \alpha_2)^{-1} \alpha_2^* \alpha_1 \rho = \rho \beta_1 [E - \alpha_2 (\alpha_2^* \alpha_2)^{-1} \alpha_2^*] \alpha_1 \rho$$

et, en multipliant à droite par $\rho^* (\rho \rho^*)^{-1}$

$$E - (\alpha_2^* \alpha_2)^{-1} \alpha_2^* \alpha_1 = \rho \beta_1 [E - \alpha_2 (\alpha_2^* \alpha_2)^{-1} \alpha_2^*] \alpha_1$$

J. A. VILLE

ou encore :

$$e = [(\alpha_1^* \alpha_2)^{-1} \alpha_1^* + \rho \beta_1 [E - \alpha_2 (\alpha_2^* \alpha_1)^{-1} \alpha_1^*]] \alpha_1$$

c'est-à-dire

$$e = \lambda \alpha_1$$

λ étant une inverse gauche de α_1 et manifestement aussi de α_2

La condition (4) implique qu'il existe une inverse gauche de α_2 qui est une inverse gauche de α_1 . Inversement, si λ est une inverse gauche commune à α_1 et α_2 , la condition (4) est satisfaite. Il suffit de prendre pour β_1 l'expression

$$\beta_1 = \rho^* (\rho \rho^*)^{-1} [\lambda - (\alpha_2^* \alpha_2)^{-1} \alpha_2^*]$$

On peut admettre, sans restreindre la généralité, que $\rho \rho^* = e$. Le problème consiste ainsi à mettre $\bar{A}_1$ et $\bar{A}_2$ sous la forme :

$$\bar{A}_1 = \alpha_1 \rho$$

$$\bar{A}_2 = \alpha_2 \rho$$

$$\rho \rho^* = e$$

et à reconnaître qu'il existe λ telle que :

$$\lambda \alpha_1 = e$$

$$\lambda \alpha_2 = e$$

Les relations (4) deviennent alors :

$$I(H)H = E - \rho \rho^*$$

$$\alpha_1 (\alpha_1^* \alpha_1)^{-1} \alpha_1^* + I(K_1) K_1 = E$$

$$\alpha_2 (\alpha_2^* \alpha_2)^{-1} \alpha_2^* + I(K_2) K_2 = E$$

CHOIX D'UNE MODULATION EN PRESENCE D'UNE DIVERSITE DE CANAUX.

J. A. VILLE

Les formules d'inversion sont associées à θ_1 et θ_2 :

$$B_1 = \rho^* (\alpha_1^* \alpha_1)^{-1} \alpha_1^* + \lambda_1 K_1$$

$$B_2 = \rho^* (\alpha_2^* \alpha_2)^{-1} \alpha_2^* + \lambda_2 K_2$$

Tout signal X admissible est de la forme

$$X = \rho^* Z$$

Z étant arbitraire. Comme

$$Z = \rho X$$

Il revient au même de reconstituer X ou Z . Un tel signal donne lieu à l'apparition, sur les deux canaux, des signaux

$$Y_1 = \alpha_1 Z$$

$$Y_2 = \alpha_2 Z$$

Si nous détectons par λ , nous reconstituons le signal de toute manière. Si donc il n'y a pas d'ambiguïté possible, il peut exister un détecteur commun. Le contrôle devient inutile pour distinguer les canaux. Il ne peut servir que si l'on veut tester la possibilité d'un troisième canal qui ne serait ni A_1 ni A_2 .

On peut se demander ce qui se passe lorsqu'il est impossible d'obtenir un signal qui satisfasse à la fois les critères K_1 et K_2 . Cela se passe lorsque les deux canaux sont séparés par un choix convenable de H . On peut alors se dispenser de l'analyse précédente, mais le résultat d'après lequel le détecteur unique existe est maintenu.

Vérifions cette dernière affirmation :

S'il n'existe aucun vecteur Y tel que l'on ait à la fois

$$K_1 Y = 0 \quad K_2 Y = 0$$

la matrice

$$I(K_1) K_1 + I(K_2) K_2$$

est une matrice régulière.

La matrice définie par

$$\mathcal{B} = \mathcal{I}(\bar{A}_1) + [E - \mathcal{I}(\bar{A}_1) \bar{A}_2] \mathcal{I}(\bar{A}_2) [\mathcal{I}(K_1)K_1 + \mathcal{I}(K_2)K_2]^{-1} \mathcal{I}(K_1)K_1$$

est donc bien définie. Elle est de la forme $\mathcal{B}_1$. On vérifie par un calcul simple qu'elle est de la forme $\mathcal{B}_2$. Il suffit pour cela de remplacer le dernier facteur $\mathcal{I}(K_1)K_1$ par

$$\mathcal{I}(K_1)K_1 + \mathcal{I}(K_2)K_2 - \mathcal{I}(K_2)K_2$$

et de développer.

L'existence d'un "détecteur" unique est bien vérifiée.

4.3. Codage d'un vecteur.

D'après ce qui a été vu, coder un vecteur X revient à lui imposer une condition

$$HX = 0$$

Pour rendre une transmission possible en présence de deux canaux A_1 et A_2 , il faut trouver H telle que les matrices

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ H \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} A_2 \\ H \end{bmatrix}$$

admettent des inverses gauches de la forme :

$$[\alpha, h_1] \quad [\alpha, h_2]$$

présentant une partie commune α . Donc, il faut résoudre le système

$$\alpha A_1 + h_1 H = E$$

$$(1) \quad \alpha A_2 + h_2 H = E$$

aux inconnues matricielles α, h_1, h_2, H .

CHOIX D'UNE MODULATION EN PRESENCE D'UNE DIVERSITE DE CANAUX.

J.A. VILLE

Dans le cas d'une multiplicité de canaux plus importante, soient

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

il faudrait résoudre les n équations à $n+2$ inconnues matricielles:

$$\alpha A_k + h_k H = E$$

Le système (1) est équivalent au système

$$(2) \quad \begin{aligned} \alpha A_1 \beta &= \beta \\ \alpha A_2 \beta &= \beta \end{aligned}$$

Supposons que (1) admette une solution. Le système (2) sera satisfait avec

$$\beta = E - I(H)H$$

Supposons que (2) ait une solution. Nous pouvons satisfaire (1) avec

$$\begin{aligned} H &= E - \beta I(\beta) \\ h_1 &= (E - \alpha A_1) (E - \beta I(\beta)) \\ h_2 &= (E - \alpha A_2) (E - \beta I(\beta)) \end{aligned}$$

Nous voyons que β , dans (2), représente l'ensemble des vecteurs singuliers communs à

$$E - \alpha A_1 \quad E - \alpha A_2$$

On peut encore ramener le problème à la recherche de λ et μ telles que

$$\lambda A_1 \mu = e \quad \lambda A_2 \mu = e$$

c'est-à-dire trouver un même multiplicateur à droite pour A_1 et A_2 , tel que les produits $A_1 \mu$ et $A_2 \mu$ admettent une inverse gauche commune. Il est évident alors que le codage

$$X = \mu X$$

J.A. VILLE

conduit à la détection unique

$$X = \lambda Y$$

5. ETUDE D'UN CANAL ACOUSTIQUE.5.1. Variations de trajet.

Un signal acoustique, représenté par une amplitude au départ et une amplitude à l'arrivée, se transmet par une relation de la forme :

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + \dots$$

$y_1(t)$ étant ce que devient $x(t)$ (amplitude au départ) sur le premier trajet, $y_2(t)$ ce que devient $x(t)$ sur le second trajet, et ainsi de suite. Nous admettons qu'il n'y a pas une infinité continue de trajets. Considérons tout d'abord deux trajets et supposons que la transmission soit linéaire. Nous aurons ainsi :

$$y(t) = \int_0^{\infty} A_1(t-\theta) x(\theta) d\theta + \int_0^{\infty} A_2(t-\theta) x(\theta) d\theta$$

A_1 et A_2 étant les deux fonctions de transfert.

On connaît la forme générale de A_1 et A_2 , mais on ne sait pas comment elles sont placées l'une par rapport à l'autre dans l'échelle des temps. Par exemple, on peut admettre, comme hypothèse de travail que y est de la forme

$$y(t) = \alpha_1 \int_0^{\infty} A(t-\theta-\tau_1) x(\theta) d\theta + \alpha_2 \int_0^{\infty} A(t-\theta-\tau_2) x(\theta) d\theta$$

A étant une fonction connue, mais les constantes α_1 , α_2 , τ_1 , τ_2 , restant inconnues. Elles ne pourraient être déterminées que par des sondages et une étude de propagation dans le milieu. Nous supposons que cette étude de propagation, si elle avait été faite, n'aurait conclu qu'à l'existence de deux trajets.

CHOIX D'UNE MODULATION EN PRESENCE D'UNE DIVERSITE DE CANAUX.

J.A. VILLE

Si on dispose d'un détecteur concernant A , nous obtiendrons, à partir de $y(t)$, un signal de la forme

$$z(t) = \alpha_1 \xi(t - \tau_1) + \alpha_2 \xi(t - \tau_2)$$

$\xi(t)$ étant le signal $x(t)$ reconstitué au mieux au cas d'un canal unique.

Supposons que $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha < 1$, $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = \tau > 0$ ce qui est affaire d'échelle. Nous avons aussi

$$(1) \quad z(t) = \xi(t) + \alpha \xi(t - \tau)$$

ce qui s'inverse par

$$\xi(t) = z(t) - \alpha z(t - \tau) + \alpha^2 z(t - 2\tau) - \dots$$

Cette formule demande, pour être appliquée, une bonne connaissance de τ , particulièrement parce que τ intervient par l'intermédiaire de $\tau, 2\tau, 3\tau, \dots$. Si α n'est pas petit, nous avons besoin d'un grand nombre de termes. Mais cette formule n'est nécessaire que si $z(t)$ est quelconque. Si

$x(t)$ est particularisée, nous avons vu dans la théorie générale de l'inversion d'une matrice dans un champ de matrices qu'il y a un certain arbitraire dans le choix de la formule d'inversion.

Nous constatons par exemple que si $\xi(t)$ est un signal sinusoïdal, $z(t)$ est un signal sinusoïdal de même fréquence mais dont la phase dépend de α et τ . Si donc nous diminuons l'information attachée à la phase d'un signal, nous pouvons espérer faciliter la reconstitution de l'information.

5.2. Limitation de débit d'un canal unilatéral.

La modulation choisie, pour limiter le débit d'un canal, consiste à supprimer des éléments d'information.

CHOIX D'UNE MODULATION EN PRESENCE D'UNE DIVERSITE DE CANAUX.J. A. V. ~~.....~~

Par exemple, les codes binaires à correction d'erreur consistent à ne choisir, parmi les 2^n formes possibles d'un message, certaines formes, en nombre 2^m par exemple, ce qui revient à multiplier par n le nombre de bauds du canal.

Cette mutilation du signal s'inspire de la caractéristique supposée du canal qu'il altère certains signaux élémentaires indépendamment les uns des autres.

Dans le cas d'un double trajet, la distorsion du canal se manifeste par le fait que le message transmis par le canal secondaire joue le rôle d'un bruit par rapport au message transmis par le canal principal.

Considérons maintenant un signal modulé en amplitude et en fréquence. Il porte deux sources d'information, et il serait concevable, entre certaines bornes, qu'il transmette deux voies. C'est en fait ce qui se passe pour le signal total qui circule sur un coaxial affecté à un système de téléphonie sur courants porteurs.

Nous pouvons renoncer à une des voies. Cela constituera un codage. Renoncer à la voie modulation de fréquence consiste à faire une modulation connue, et fixe, qui ne porte pas d'information. Si un pareil signal se présente devant un canal à deux durées de trajet, nous obtiendrons à l'arrivée deux signaux décalés dans le cas d'une modulation linéaire, d'une fréquence fixe (fonction de la différence de trajet). Naturellement, ce décalage subira une discontinuité à chaque fin de balayage. On peut donc espérer se débarrasser du bruit par filtrage.

CHOIX D'UNE MODULATION EN PRESENCE D'UNE DIVERSITE DE CANAUX.

J.A. VILLE

5.3. Modulation d'un signal télégraphique.

La première tâche de transmission en acoustique sous-marine est de créer une voie télégraphique. On peut songer alors à envoyer des séries d'impulsions modulées en amplitude, et également modulées en fréquence. Nous aurons ainsi une récurrence de N fréquences

$$f_1, f_2, \dots, f_N, f_1, \dots, f_N, f_1, \dots$$

et une suite d'impulsions, présentes ou absentes, émise à ces fréquences.

Si ces fréquences peuvent être séparées, nous pourrions transmettre avec N impulsions, $(1 + N)^N$ messages, puisque l'impulsion présente pourrait prendre N formes différentes. Renonçant à utiliser la fréquence comme porteuse d'informations, nous n'avons plus que 2^N messages possibles.

A l'arrivée, recevons sur N filtres passe-bande. Nous recevons, sur chaque filtre, des couples d'impulsions décalés de la différence de durée de trajet. Ces impulsions ne pourront interférer que si la durée de trajet est un multiple de la période de récurrence des fréquences. Si une des voies a un affaiblissement plus grand que l'autre, nous pourrions l'éliminer par un écrêtage. Il suffit de mélanger les sorties des filtres écrêteurs pour reconstituer le message émis.

CHOIX D'UNE MODULATION EN PRESENCE D'UNE DIVERSITE DE CANAUX.

J.A. VILLE

CONCLUSION.

Après avoir montré que la lutte contre une pluralité de canaux pouvait être engagée en adoptant une modulation telle que la détection soit indépendante du canal effectif, ce qui évidemment résout la question, nous avons expliqué les raisons et les calculs qui conduisent à la conclusion que cette voie semble bien être la seule possible.

Nous avons proposé une modulation double, en amplitude et en fréquence, qui théoriquement permet de se débarrasser du signal parasite. Il ne s'agit que d'un exemple puisque l'essentiel est qu'il y ait une double modulation. Le principe général, qui consiste à agir de manière que le résultat final soit indépendant du canal choisi nous semble devoir être toujours respecté.
