DEUXIÈME COLLOQUE
SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL
ET SES APPLICATIONS
NICE - 5 AU 10 MAI 1969

SYNTHESE DES SYSTEMES NON LINEAIRES - CONDITIONS d'OPTIMALISATION

***

P. SZULKIN

SYNTHESE DES SYSTEMES NON LINEAIRES - CONDITIONS d'OPTIMALISATION.

P. SZULKIN

1. PROBLEMES GENERAUX DE LA SYNTHESE.

Supposons que la description statistique des signaux X à l'entrée, ainsi que celle des signaux Y à la sortie sont données. On cherche à déterminer la transformation $F \in \{F\}$ (classe des transformations non linéaires imposée) qui donne la meilleure approximation $F(X)$ pour Y (suivant un certain critère choisi). Si l'on adopte le critère de l'erreur quadratique moyenne, il s'agit de trouver F telle que

$$(1) \quad \sigma_\varepsilon^2 = E\{|F(X)-Y|^2\} = \overline{[F(X)-Y]^2} = min$$

parmi toutes les $F \in \{F\}$.

Nous allons supposer X et Y stationnaires. Soit l'opérateur $F(X)$ qui est optimal dans la classe imposée, c'est-à-dire qui satisfait l'équation (1). Alors une variation $\varepsilon Q(X)$ de l'opérateur $F(X)$ produit une variation $\delta\sigma_\varepsilon^2$ déterminée par

$$\delta\sigma_\varepsilon^2 = 2\varepsilon\,\overline{Q(X)[F(X)-Y]} + \varepsilon^2\,\overline{[Q(X)]^2}$$

où $Q \in \{F\}$ opérateur quelconque et ε un nombre petit.

L'optimisation de F exige que

$$\frac{\partial[\delta\sigma_\varepsilon^2]}{\partial\varepsilon} \cong 2\,\overline{Q(X)[F(X)-Y]} = 0$$

où l'on a négligé les termes infiniment petits d'ordre supérieur. Ainsi, la condition nécessaire et suffisante d'optimalisation devient

$$(2) \qquad \overline{Q(X)\left[F(X) - Y\right]} = 0$$

Il en résulte certaines propriétés générales de transformation optimale. Etant donné que $Q(X)$ est arbitraire, la condition 2) sera aussi satisfaite si l'on pose $Q(X) = F(X)$, ce qui donne

$$(3) \qquad \overline{\left[F(X)\right]^2} = \overline{YF(X)}$$

Si la transformation $F(X) = K$ (K = const. arbitraire) appartient à la classe donnée, alors, en posant $Q(X) = 1$ on trouve

$$(4) \qquad \overline{F(X)} = \overline{Y} = m_y$$

c'est-à-dire que l'on peut effectuer la transformation optimale avec la reproduction exacte des valeurs moyennes.

Posons pour simplifier $F(X) = Z$; alors

$$\sigma_\varepsilon^2 = \overline{(Z-Y)^2} = \overline{Z^2} - 2\overline{ZY} + \overline{Y^2}$$

et si l'on tient compte de 3), c'ést-à-dire $\overline{Z^2} = \overline{YZ}$

$$\sigma_\varepsilon^2 = \overline{Y^2} - \overline{Z^2}$$

D'autre part, d'après 4), $m_y = m_z$, ce qui donne la suivante entre σ_ε^2 et les variances des signaux dans le cas de transformation optimale.

(5) $$\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_y^2 - \sigma_z^2$$

Etudions maintenant la forme que prend la condition d'optimalisation pour certaines classes de transformation .

2. <u>TRANSFORMATION LINEAIRE</u> (à paramètres constants)

Pour retenir la possibilité de la reproduction exacte des valeurs moyennes,utilisons la transformation non homogène

$$F(X) = \bar{g} + \int_0^\infty g(\tau)\, X(t-\tau)\, d\tau$$

Etant donné que $Q(X)$ doit appartenir à la même classe, sa forme la plus générale sera

$$Q(X) = \bar{q} + \int_0^\infty q(\tau)\, X(t-\tau)\, d\tau$$

où $\bar{q}$ et $q(\tau)$ sont quelconques (on exige uniquement $g(\tau) = q(\tau) = 0$ pour $\tau < 0$, ce qui correspond à la condition de réalisation physique). La substitution des expressions de $F(X)$ et $Q(X)$ dans (2) donne

$$0 = \bar{q}\left[\bar{g} + \bar{X}\int_0^\infty g(\tau)\, d\tau - \bar{Y}\right] + \int_0^\infty d\tau_1\, q(\tau_1)\left[\int_0^\infty d\tau_2\, g(\tau_2)\, M_X[\tau_1-\tau_2] + \bar{g}\bar{X} - M_{YX}(\tau_1)\right]$$

où

$$M_x(\tau_1-\tau_2) = E\{X(t-\tau_1)\,X[t-\tau_2]\}$$

$$M_{yx}[\tau_1] = E\{y(t)\,X(t-\tau_1)\}$$

Mais q et $q(\tau)$ sont quelconques, ce qui conduit aux conditions suivantes

(6a) $$\bar{g} + \bar{X}\int_0^\infty g(\tau)\,d\tau = \bar{y}$$

(6b) $$\int_0^\infty d\tau_2\, g(\tau_2)\, M_x[\tau_1-\tau_2] + \bar{g}\,\bar{X} = M_{yx}(\tau_1) \qquad (\tau_1 \geq 0)$$

Remarquons que (6a) implique

$$\bar{g}\,\bar{X} + (\bar{X})^2\int_0^\infty g(\tau)\,d\tau = \bar{y}\,\bar{X} = m_y m_x$$

et comme $m_y m_x = M_{yx}(\tau_1) - R_{yx}(\tau_1)$

$$M_{yx} - \bar{g}\,\bar{X} = R_{yx}(\tau_1) + (\bar{X})^2\int_0^\infty g(\tau)\,d\tau$$

où R_{yx} est la fonction de corrélation. Cela permet d'écrire (6b) sous la forme

(7) $$\int_0^\infty d\tau_2\, g(\tau_2)\, R_x(\tau_1-\tau_2) = R_{yx}(\tau_1) \qquad \tau_1 \geq 0$$

étant donné que

$$R_x(\tau) = M_x(\tau) - (\bar{X})^2$$

Finalement l'expression de la transformation optimale $F(X)$ devient

$$F(X) = \bar{g} + \bar{X} \cdot \int_0^{\infty} g(\tau)\, d\tau + \int_0^{\infty} g(\tau) \left[X(t-\tau) - \bar{X} \right] d\tau = \bar{Y} + \int_0^{\infty} g(\tau)\, X^{\circ}(t-\tau)\, d\tau$$

Ainsi la transformation linéaire optimale correspond à la reproduction exacte des composantes moyennes, tandis que la fonction impulsionnelle de la transformation de la composante centrée est donnée par l'équation intégrale (7) de WIENER HOPF, dont les méthodes de résolution sont bien connues.

Considérons encore le cas le plus simple, à savoir : approximation optimale par transformation linéaire sans mémoire

$$F(X) = \bar{g} + g_1 X = g_1 \bar{X} + g_1 X^{\circ} + \bar{g}$$

Dans ce cas, la condition fondamentale d'optimalisation donne

(8) $$\bar{g} + g_1 \bar{X} = \bar{Y} \qquad g_1 = \frac{\overline{YX^{\circ}}}{\sigma_X^2}$$

où g_1 est le coefficient de transfert de la composante aléatoire (centrée).

La transformation des composantes moyennes est définie par le coefficient :

(9) $$g_0 = \frac{\bar{g} + g_1 \bar{X}}{\bar{X}} = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} = \frac{m_Y}{m_X}$$

Ainsi, l'approximation optimale par transformation linéaire sans mémoire est donnée par la formule

(10) $$Z = g_o m_x + g_1 X^o$$

Il est évident qu'on introduit g_o uniquement si pour $m_x = 0$ $m_y = 0$. Dans le cas contraire il est plus commode d'écrire directement

(11) $$Z = m_y + h_1 X^o$$

Parfois il est préférable d'utiliser la transformation homogène plus simple

(12) $$F(X) = g_c X$$

Mais alors on n'obtient pas la reproduction exacte des composantes moyennes. Le coefficient de transfert g_c se déduit facilement à partir de la condition générale d'optimalisation

(13) $$g_c = \frac{\overline{YX}}{\overline{X^2}}$$

On voit que g_c est lié aux coefficient g_o et g_1 de la transformation optimale non homogène par la relation

(14) $$g_c = \frac{g_1 \sigma_x^2 + g_o m_x^2}{\sigma_x^2 + m_x^2}$$

c'est-à-dire g_c est la moyenne pondérée de g_o et g_1.

Remarquons enfin que pour déterminer les valeurs optimales des paramètres de l'approximation linéaire sans mémoire il n'est pas nécessaire de résoudre le problème des variations générales. Il suffit en effet d'exiger σ_ε^2 = min., où σ_ε^2 n'est pas considérée comme fonctionnelle, mais tout simplement comme fonction des paramètres inconnus g_i. Cette minimisation est assurée par les conditions

$$\frac{\partial \sigma_\varepsilon^2}{\partial g_i} = 0 \tag{15}$$

L'équivalence des conditions (15) peut être vérifiée par exemple pour la construction de l'approximation (12); en effet

$$\sigma_\varepsilon^2 = \overline{(g_c X - Y)^2} = g_c^2 \overline{X^2} - 2 g_c \overline{XY} + \overline{Y^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_\varepsilon^2}{\partial g_c} = 2 g_c \overline{X^2} - 2\,\overline{XY}$$

d'où résulte immédiatement l'expression (13).

3. TRANSFORMATION NON LINEAIRE SANS MEMOIRE.

Dans le cas général on a :

(16) $F(X) = f(X)$ où f est une fonction non linéaire.

Nous allons considérer le problème de détermination d'une transformation optimale qui satisfait la condition (1) et qui appartient à une classe plus étroite des transformations non linéaires, décrite par

(17) $$f(x) = \sum k_{fn} \, \theta_n(x)$$

où k_{fn} sont des constantes.

$\theta_n(x)$ sont des polynômes orthonormaux en x de degré n, avec pondération $p_1(x)$.

Par conséquent on a pour $\theta_n(x)$

(18) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \theta_n(x)\,\theta_m(x)\,p_1(x)\,dx = \overline{\theta_n\,\theta_m} = 0 \qquad m \neq n$$
$$= 1 \qquad m = n$$

Remarquons qu'on trouve $\theta_0(x)$ et $\theta_1(x)$ pour une densité de probabilité p_1, quelconque, en vertu des relations élémentaires bien connues

(19) $$\int_{-\infty}^{+\infty} p_1(x)\,dx = 1 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x\,p_1(x)\,dx = m_x \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m_x)^2 p_1(x)\,dx = \sigma_x^2$$

Donc $$\int_{-\infty}^{+\infty} 1.1\;p_1(x) = 1 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} (x-m_x)\,p_1(x)\,dx = 0; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)^2 p_1\,dx = 1$$

D'où il résulte immédiatement

(20) $\theta_o(x) = 1 \qquad \theta_1(x) = \frac{x - m_x}{\sigma_x}$

La transformation Q(X) appartient à la même classe, c'est-à-dire

(21) $Q(x) = \sum k_{q_n} \theta_n(x)$

Alors la condition (2) prend la forme

$$\sum k_{q_n} \left\{ \sum_0^R k_{f_n} \overline{\theta_m(x)\,\theta_n(x)} - \overline{\theta_m(x) Y} \right\} = 0$$

qui doit être satisfaite pour k_{qm} quelconques, ce qui permet de déterminer les constantes k_{fn} par les relations suivantes

(22) $k_{fn} = \overline{\theta_n(X)Y}$

et, en vertu de (20)

(23) $k_{f_o} = \overline{\theta_o(X)Y} = \overline{Y} = m_y$

Ainsi la transformation optimale sans mémoire est

(24) $$Z = F(x) = \sum_{1}^{\ell} \sigma_y D_n \theta_n(x) + m_y$$

où

(25) $$\mathcal{D}_n = \frac{\overline{\theta_n(x)\, Y}}{\sigma_y}$$

Passons maintenant au calcul de σ_ε^2 . En tenant compte de (4) et de l'orthogonalité de θ_n on trouve

(26) $$\sigma_z^2 = \overline{(Z - m_z)^2} = \overline{(Z - m_y)^2} = \sum_{1}^{\ell} \sigma_y^2 D_n^2$$

et la substitution dans (5) donne finalement

(27) $$\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_y^2 \left(1 - \sum_{1}^{\ell} \mathcal{D}_n^2\right)$$

On détermine les quantités D_n :

- soit par interprétation adéquate de l'expérience sur un modèle qui reproduit les caractéristiques des polynômes $\theta_n(x)$ ainsi que de Y(t) et de X(t) ,

- soit analytiquement, si les caractéristiques statistiques de Y(t) et de X(t) (ainsi que les liaisons entre elles) sont connues.

Si tous les $D_n \equiv 0$ pour $n \neq 1$, la transformation optimale devient linéaire. Ceci a lieu en particulier dans le cas où Y et X ont les répartitions normales avec

$$p_2(y,x) = \frac{1}{2\pi \sigma_y \sigma_x \sqrt{1-\rho^2_{yx}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} + \frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{(y-m_y)(x-m_x)}{\sigma_x \sigma_y} \rho_{xy} \right] \right\}$$

où

$$\rho_{yx} = \frac{1}{\sigma_y \sigma_x} E\left\{ (y-m_y)(x-m_x) \right\}$$

Entre parenthèses rappelons les propriétés des polynômes d'HERMITE qui sont définies par

$$H_n[\xi] = (-1)^n e^{\xi^2/2} \frac{d^n}{d\xi^n} \left(e^{-\xi^2/2} \right)$$

Il est évident que

$$H_0[\xi] = 1 \qquad H_1 = \xi$$

et on sait que

$$H_{n+1} = \xi H_n - n H_{n-1}$$

Les polynômes $H_n(\xi)$ sont orthogonaux avec la pondération $e^{-\xi^2/2}$ sur $-\infty < \xi < \infty$ c'est-à-dire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n H_m e^{-\xi^2/2} d\xi = \sqrt{2\pi}\, n! \qquad m = n$$

$$= 0 \qquad m \neq n$$

où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right) H_m\left(\frac{x-m_y}{\sigma_y}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx = n! \qquad m = n$$
$$= 0 \qquad m \neq n$$

Autrement dit, $H_n\left(\frac{x-m_x}{x}\right)$ sont orthogonaux avec la pondération $p_1(x)$ sur $-\infty < x < \infty$

Introduisons maintenant la représentation de $p_2(y,x)$ sous forme d'une série de polynômes d'HERMITE

$$(28) \quad p_2[yx] = \frac{1}{2\pi\sigma_y\sigma_x} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} + \frac{(x-m_x)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\} \sum_0^\infty \frac{\rho_{yx}^m}{m!} H_m\left(\frac{y-m_y}{\sigma_y}\right) H_m\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)$$

Remarquons que les polynômes H_n (avec une norme appropriée) satisfont les conditions (18) pour la densité unidimensionnelle de probabilité

$$\theta_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} H_n\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)$$

Nous pouvons déjà calculer les coefficients

$$D_n = \frac{1}{\sigma_y} \overline{\theta_n(x)\, y} = \frac{1}{\sigma_y} \overline{\theta_n(x)(y-m_y)}$$

qu'on peut encore écrire en tenant compte de (28)

$$D_n = \frac{1}{\sigma_y} \sum_0^\infty a_{mn}\, b_m\, \rho_{yx}^m$$

où

$$a_{mn} = \frac{1}{\sqrt{2\pi m!}} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_n (\sigma_x \xi + m_x)\, e^{-\xi^2/2}\, H_m(\xi)\, d\xi$$

$$b_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi m!}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi\, e^{-\xi^2/2}\, H_m(\xi)\, d\xi$$

Mais $\xi = H_1[\xi]$ et par conséquent

$$b_m = 1 \qquad m = 1$$
$$= 0 \qquad m \neq 1$$

c'est-à-dire

$$D_n = \frac{a_{1n}}{\sigma_y} \rho_{yx}$$

D'autre part, pour la répartition normale $\theta_n[\sigma_x \xi + m_x] \sim H_n[\xi]$; donc $a_{1n} = 0$ si $n \neq 1$, ce qui démontre que la transformation linéaire est optimale (dans la classe des transformations sans mémoire) si les signaux X et Y sont normaux.

4. TRANSFORMATION NON LINEAIRE AVEC MEMOIRE.

Cherchons la transformation optimale dans une classe encore plus étroite

$$(29) \qquad F(X) = \sum_{m=0}^{k} \int_0^{\infty} g_{fm}(\tau)\, \theta_m [X(t-\tau)]\, d\tau$$

ce qui conduit à prendre $Q(X)$ sous la forme

$$(30) \qquad Q(X) = \sum_{0}^{R} \int_{0}^{\infty} g_{qm}(\tau)\, \theta_m [X(t-\tau)]\, d\tau$$

où $g_{qm}(\tau)$ sont des fonctions quelconques pour $\tau \geqslant 0$.
La substitution de (29) et (30) dans la condition d'optimalisation donne dnans ce cas

$$\sum_{n=0}^{R} \int_{0}^{\infty} g_{qn}(\tau_1) \left[\sum_{0}^{R} \int_{0}^{\infty} g_{fm}(\tau_2)\, C_X^{(nm)}(\tau_1-\tau_2)\, d\tau_2 - C_{yX}^{(n)}(\tau_1) \right] d\tau_1 = 0$$

où

$$C_X^{(nm)} = \overline{\theta_n [X(t)]\, \theta_m [X(t+\tau)]} \qquad C_{yX}^{(n)} = \overline{\theta_n [X(t-\tau)]\, y(t)}$$

Or, les g_{qn} sont quelconques, d'où il résulte que

$$(31) \qquad \sum_{m=0}^{R} \int_{0}^{\infty} g_{fm}(\tau_2)\, C_X^{(nm)}(\tau_1-\tau_2)\, d\tau_2 = C_{yX}^{(n)}(\tau_1) \qquad (n = 0, 1, 2 \dots R)$$

ce qui constitue une généralisation des conditions (6) et (12).

Remarquons que

$$C_X^{(0m)}(\tau) = 0 \qquad m \neq 0$$
$$= 1 \qquad m = 0$$

$$C_X^{(n,0)}(\tau) = 0 \qquad n \neq 0$$
$$= 1 \qquad n = 0$$

c'est-à-dire

(32) $$\int_0^\infty g_{f_0}(\tau)\, d\tau = \overline{y(\tau)}$$

(33) $$\sum_{m=1}^{R} \int_0^\infty g_{f_m}(\tau_2)\, C_X^{(nm)}(\tau_1 - \tau_2)\, d\tau_2 = \sigma_y\, \mathcal{D}_{yx}^{(n)}(\tau_1) \qquad (n = 1, 2 \ldots R)$$

où

$$\mathcal{D}_{yx} = \frac{1}{\sigma_y} \cdot \overline{\theta_n [X(t-\tau)]\, y(t)}$$

Il en résulte

$$\sigma_z^2 = \sum_1^R \sum_{m=1}^R \iint_0^\infty g_{f_n}(\tau_1)\, g_{f_n}(\tau_2)\, C_X^{(nm)}(\tau_1 - \tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2 = \sigma_y \sum_1^R \int_0^\infty \mathcal{D}_{yx}(\tau)\, g_{f_n}(\tau)\, d\tau$$

et finalement, l'expression de l'erreur quadratique moyenne

(34) $$\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_y^2 - \sigma_z^2 = \sigma_y^2 \left(1 - \frac{1}{\sigma_y} \sum_1^R \int \mathcal{D}_{yx}^{(n)}(\tau)\, g_{f_n}(\tau)\, d\tau\right)$$

qui est une généralisation de (27).

Ainsi, pour résoudre le problème de synthèse des transformation non linéaires avec mémoire il faut calculer (ou déterminer par l'expérience) les fonctions $C_X^{(n,m)}(\tau)$ et $D_{yx}^{(n)}(\tau)$ et ensuite résoudre le système des équations intégrales (33) du type WIENER-HOPF.

Remarquons que si $C_x^{(n,m)} \equiv 0$ pour $n \neq 1$ et $m \neq 1$ et $D_{yx}^{(n)} \equiv 0$ pour $n \neq 1$, le système optimal sera linéaire et les équations (33) se réduisent à (7). En particulier ceci a lieu quand les processus Y et X sont normaux.

La méthode décrite ci-dessus de la synthèse des transformations non linéaires en utilisant les polynômes orthogonaux, conduit aux résultats sans doute très élégants, surtout quand il s'agit des transformations non linéaires sans mémoire. En effet, dans ce cas, les équations qui déterminent les coefficients inconnus de transformation optimale sont séparées.

Malheureusement, dans le cas général, l'utilisation de cette méthode exige la construction de systèmes de polynômes orthogonaux θ_n qu'on peut par exemple trouver à l'aude de la relation récurrente suivante (LUBBOCK IEE Proc. 11, 1959) :

(35) $$\theta_n = \frac{X^n - \sum_{0}^{r=n-1} \overline{X^n \theta_r(X)}\, \theta_r(X)}{\left\{ \overline{X^{2n}} - \sum \left[\overline{X^n \theta_r(X)} \right]^2 \right\}^{1/2}}$$

ce qui est assez compliqué.

Or, étant donné que dans la recherche de la transformation non linéaire optimale avec mémoire l'effet d'utilisation des polynômes orthogonaux n'est pas très important - sauf pour le calcul de l'erreur optimale - on peut recommander la procédure suivante :
On cherche la transformation optimale directement sous la forme

$$(36) \qquad F(X) = \sum_{m=0}^{R} \int_0^\infty g_{fm}(\tau)\, X^m(t-\tau)\, d\tau$$

Alors, à partir de la condition générale d'optimalisation on arrive au système suivant des équations du type WIENER-HOPF pour la détermination des g_{fm} inconnues

$$(37) \qquad \sum_0^\infty \int_0^\infty g_{fm}(\tau_2)\, M_X^{(nm)}(\tau_1-\tau_2)\, d\tau_2 = M_{yX}^{(n)}(\tau_1)$$

où $$M_X^{(nm)}(\tau_1-\tau_2) = \overline{X^n(t-\tau_1)\, X^m(t-\tau_2)}$$

$$(38) \qquad M_{yx}^{(n)}(\tau_1) = \overline{X^n(t-\tau_1)\, y(t)}$$

De toute manière, la solution de (37) n'est pas plus difficile que celle de (31). Il faut souligner que l'approximation à la base du critère σ_ε^2 = min n'est pas la seule possible.

On peut poser le problème d'approximation en utilisant comme critère la minimisation des différentes fonctionnelles probabilistes de l'erreur. Ainsi, on peut poser le problème d'approximation linéaire basée sur l'égalité de deux moments

(39a) $$\overline{Z(t)} = \overline{Y(t)}$$

(39b) $$\overline{Z(t)Z(t+\tau)} = \overline{Y(t)Y(t+\tau)}$$

où $Z = F(X)$ est l'approximation pour Y .

(39)peut s'écrire également

(40) $$R_z(\tau) = R_y(\tau)$$

La condition (39a) est satisfaite aussi dans la synthèse sur la base de σ_ε^2 = min. Par contre, la seconde condition conduit à une autre méthode de détermination de la fonction impulsionnelle inconnue $g(\tau)$ de la transformation optimale F .

Si l'on la remplace par la condition d'égalité des densités spectrales

(41) $$\Phi_z(\omega) = \Phi_y(\omega)$$

on obtient

(42) $$|F(j\omega)|^2 \, \Phi_x(\omega) = \Phi_y(\omega)$$

d'où

$$(43) \qquad |F(j\omega)|^2 = \frac{\Phi_y(\omega)}{\Phi_x(\omega)}.$$

La factorisation de $\frac{\phi_y}{\phi_x}$ sous la forme

$$\frac{\Phi_y(x)}{\Phi_x(\omega)} = \frac{(1+T_{z1}^2\omega^2)(1+T_{z2}\omega^2)\cdots}{(1+T_{p1}^2\omega^2)(1+T_{p2}^2\omega^2)\cdots}$$

permet finalement de déterminer la fonction fréquentielle de la transformation optimale linéaire

$$(44) \qquad F(j\omega) = k'\frac{(1+jT_{z1}\omega)(1+jT_{z2}\omega)\cdots}{(1+jT_{p1}\omega)(1+jT_{p2}\omega)\cdots}$$

Il est facile de démontrer aussi que si l'on impose

$$\overline{Z} = \overline{Y} \qquad \text{et} \qquad \overline{Z^2} = \overline{Y^2}$$

les paramètres de la transformation optimale sans mémoire

$$F = F(X) = g_o m_X + g_1 X^o$$

sont déterminés par les formules suivantes

$$(45) \qquad g_o = \frac{m_y}{m_x} \qquad\qquad g_1 = \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

Nous avons essayé la même procédure (c'est-à-dire conditions d'égalité des moments d'ordre 1, 2, ..., R) pour la synthèse des transformations non linéaires. Mais les résultats obtenus ne sont pas concluants en ce qui concerne l'utilité pratique.

5. APPLICATIONS DE LA METHODE DE SYNTHESE ; FILTRES NON LINEAIRES.

La méthode générale de synthèse étudiée ci-dessus peut servir pour résoudre un certain nombre de problèmes importants, parmi lesquels une attention spéciale doit être prêtée aux points suivante :

a) filtrage, ou plus généralement transformation optimale d'un signal en présence de bruit ;

b) compensation parallèle d'un système donné ;

c) détermination statistique des caractéristiques de la transformation effectuée par le système ;

d) linéarisation statistique des transformations non linéaires.

Commençons par l'étude du filtrage optimal, qui consiste à séparer le signal utile $S(t)$ et le bruit $N(t)$ dont l'influence à la sortie $Y(t)$ du filtre doit être rendue minimale.

Souvent le problème de filtrage "pur" est généralisé dans ce sens qu'on cherche à obtenir un signal transformé de $S(t)$.

On peut donc considérer que dans le cas général le signal $X(t)$ à transformer est une fonction donnée de $S(t)$ et $N(t)$.

(46) $$X(t) = L\left[S(t),\ N(t)\right]$$

tandis que $Y(t)$, dont l'approximation optimale obtenue par transformation due au filtre est

(47) $$Z = F(X)$$

et doit être lié à la composante utile $S(t)$ par la relation

(48) $$Y(t) = H\left[S(t)\right]$$

Considérons les deux cas suivants :

a) $X(t)$ est la somme de $S(t)$ et $N(t)$

(49) $$X(t) = S(t) + N(t)$$

b) $X(t)$ est le produit de $S(t)$ et $N(t)$

(50) $$X(t) = S(t)N(t)$$

Cherchons à déterminer le filtre non linéaire optimal pour le cas a), en supposant que le signal utile et le bruit sont statistiquement indépendants. On se place dans le cas de filtrage pur, c'est-à-dire $Y(t) = S(t)$.

Calculons les moments généralisés $M_x^{(nm)}$ et $M_{yx}^{(n)}$.
Soit :

$$X(t-\tau) = X_1 \qquad X(t) = X_2$$

$$S(t-\tau) = S_1 \qquad S(t) = S_2 \qquad Y(t)=Y_2$$

$$N(t-\tau) = N_1 \qquad N(t) = N_2$$

Alors

$$(51) \qquad M_x^{(nm)} = \overline{X_1^n X_2^m} = \overline{(S_1+N)^n (S_2+N_2)^m}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} \binom{i}{n}\binom{k}{m} \overline{S_1^i \, S_2^k} \; \overline{N_1^{n-i} N_2^{m-k}}$$

$$(52) \qquad M_{yx}^{(n)} = \overline{X_1^n Y_2} = \overline{(S_1 + N_1)^n S_2} = \sum \binom{i}{n} \overline{S_1^i \, S_2} \; \overline{N_1^{n-i}}$$

La suite de la solution s'effectue à l'aide des équations (37), où les coefficients sont directement les moments $M_x^{(nm)}$ et $M_y^{(n)}$. On peut aussi retrouver les équations (31) en construisant au préalable les polynômes $\theta_n(X)$, ce qui nécessite d'ailleurs aussi le calcul des moments $M_x^{(nm)}$.

6. EXEMPLE DE CALCUL D'UN FILTRE NON LINEAIRE.

Considérons le problème de filtrage d'un signal harmonique dont la phase est aléatoire en présence d'un bruit normal et stationnaire. On connaît l'amplitude A du signal et la dispersion σ_n^2 du bruit $(m_n = 0)$ Par contre ni la fréquence de signal utile, ni le spectre de bruit ne sont connus. Dans ces conditions, le filtrage linéaire avec mémoire basé sur l'utilisation des propriétés spectrales n'est pas applicable et nous allons choisir le filtre non linéaire optimal, en nous limitant, pour simplifier les calculs, à la classe des polynômes de troisième degré.

$$Z = f(X) = a_1 X + a_3 X^3 \tag{53}$$

(les degrés pairs sont éliminés, car la répartition de signal d'entrée est symétrique). Les coefficients a_1 et a_3 du filtre optimal (sur la base du critère σ_ε^2 = min.) sont donnés par les équations

$$\begin{aligned} a_1\overline{X^2} + a_3\overline{X^4} &= \overline{XY} \\ a_1\overline{X^4} + a_3\overline{X^6} &= \overline{X^3 Y} \end{aligned} \tag{54}$$

où $X = S+N$ et $Y = S$. Calculons les moments $\overline{X^m}$ et $\overline{X^n Y}$ qui figurent dans ces équations. En supposant que S et N sont indépendants on trouve :

$$(55)\quad \begin{aligned} \overline{X^2} &= \overline{S^2} + \overline{N^2} \\ \overline{X^4} &= \overline{S^4} + 6\overline{S^2 N^2} + \overline{N^4} \\ \overline{X^6} &= \overline{S^6} + 15\, \overline{S^4}\, \overline{N^2} + 15\, \overline{S^2}\, \overline{N^4} + \overline{N^6} \\ \overline{XY} &= \overline{S^2} \\ \overline{X^3 Y} &= \overline{S^4} + 3\, \overline{S^2 N^2} \end{aligned}$$

Si l'on tient compte que

$$(56)\quad \overline{N^{2m}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} \int_{-\infty}^{+\infty} N^{2m} e^{-\frac{N^2}{2\sigma_n^2}}\, dN = (2m-1)!!\, \sigma_n^{2m}$$

$$(57)\quad \overline{S^{2m}} = \frac{A^{2m}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{2m}(\omega t + \varphi)\, d\varphi = A^{2m} \frac{(2m-1)!!}{2^m\, m!}$$

on a finalement

$$(58)\quad \begin{aligned} \overline{X^2} &= \frac{A^2}{2} + \sigma_n^2 \\ \overline{X^4} &= \frac{3}{8} A^4 + 3 A^2 \sigma_N^2 + 3\sigma_n^4 \\ \overline{X^6} &= \frac{5}{16} A^6 + \frac{45}{8} A^4 \sigma_n^2 + \frac{45}{8} A^2 \sigma_n^4 + 15\sigma_n^6 \\ \overline{XY} &= \frac{A^2}{2} \\ \overline{X^3 Y} &= \frac{3}{8} A^4 + \frac{3}{2} A^2 \sigma_n^2 \end{aligned}$$

On voit que a_1 et $a_3 A^2$ sont fonction **uniquement de** $\left(\frac{\sigma n}{A}\right)^2$. L'erreur relative de filtrage $\left(\frac{\sigma_\varepsilon}{A}\right)^2$ peut être calculée à partir de la formule

$$(59)\quad \sigma_\varepsilon^2 = \overline{S^2} - \overline{Z^2} = \overline{S^2} - a_1^2\,\overline{X^2} - 2\,a_1 a_3\,\overline{X^4} - a_3^2\,\overline{X^6}$$

Considérons maintenant le même problème de filtrage à l'aide de transformations optimales linéaires (sans mémoire)

$$(60)\qquad Z' = a'_1 X$$

Dans ce cas on obtient

$$(61)\qquad a'_1 = \frac{1}{1+2\frac{\sigma_n^2}{A^2}} \qquad \frac{\sigma_{\varepsilon l}^2}{A^2} = \frac{\frac{\sigma^2}{A^2}}{1+2\frac{\sigma_n^2}{A^2}}$$

La comparaison des résultats obtenus est donnée dans le tableau suivant

$\left(\frac{\sigma_n}{A}\right)^2$	∞	4	1	0,1	0
a_1	0	0,12	0,33	1,08	1
a_3A^2	0	$-6,3.10^{-4}$	$-1,2.10^{-3}$	-0,15	0
$\left(\frac{\sigma_\varepsilon}{A}\right)^2$	0,5	0,445	0,284	0,061	0
$\frac{(\sigma_{\varepsilon l})^2}{A^2}$	0,5	0,445	0,333	0,083	0

On voit que l'introduction de la transformée non linéaire ne produit une baisse sensible de l'erreur que lorsque $\frac{\sigma_n}{A} \leqslant 1$.

L'exemple ci-dessus fait ressortir la différence essentielle qui existe entre les approches possibles au problème de filtrage, à savoir : celle de meilleure approximation et celle tendant à obtenir le rapport signal/bruit maximal. Il est évident qu'à la lumière de cette seconde approche, la transformation linéaire sans mémoire n'a aucun sens, tandis que l'amélioration de l'approximation (à la base du critère $\sigma_{\varepsilon}^{2} = \min$) est dans ce cas assez sensible. Il en résulte que dans les problèmes où l'extraction de la forme du signal utile est èssentielle, le critère $\sigma_{\varepsilon}^{2} = \min.$ peut soulever des doutes en ce qui concerne sa légitimité.