



DEUXIÈME COLLOQUE  
SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL  
ET SES APPLICATIONS  
NICE - 5 AU 10 MAI 1969

---

42/1

" MARGE D'ERREUR D'UN SIGNAL EN FONCTION DU

BRUIT ET DE LA QUANTIFICATION D'AMPLITUDE "

M. VINOKUR

---

RESUME -

A partir d'une nouvelle étude générale sur la quantification d'amplitude on évalue la marge d'erreur, pour une probabilité donnée, du résultat d'une observation unique. L'entrée du quantificateur étant un signal inconnu entaché de bruit, l'erreur est définie comme différence entre le point de quantification obtenu et le signal. Les caractéristiques d'un bruit quelconque étant connues, la marge d'erreur est évaluée en fonction de  $Q/\sigma$ , rapport de la largeur du pas de quantification à l'e.q.m. du bruit.

ABSTRACT -

From a new and general approach on amplitude quantization, one can estimate the quality of the quantized output of a single observation as a function of  $Q/\sigma$  (  $Q$  is the width of the quantization step and  $\sigma$  the r.m.s. of the input noise ). The input of the equi-interval quantizer is an unknown signal plus noise. One application here is to estimate confidence intervals for this unknown signal with respect to the quantized output. The characteristics of the noise, whatever they are, have only to be known.



DEUXIÈME COLLOQUE  
SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL  
ET SES APPLICATIONS  
NICE - 5 AU 10 MAI 1969

---

42/3

" MARGE D'ERREUR D'UN SIGNAL EN FONCTION DU

BRUIT ET DE LA QUANTIFICATION D'AMPLITUDE "

M. VINOKUR

---

INTRODUCTION -

Lorsqu'on observe un phénomène physique il en résulte généralement, avant digitalisation, une fonction amplitude-temps qui est entachée de bruit, celui du récepteur par exemple. Après digitalisation, l'enregistrement est fait d'une série de points échantillonnés dans le temps, et quantifiés en amplitude. Nous définissons alors comme " observation unique " l'un quelconque de ces échantillons.

Le but de cet article est d'évaluer le degré de précision en amplitude que présente le point de quantification enregistré par rapport au signal physique inconnu. Soit  $S$  l'amplitude de ce signal exact, et  $L$  l'amplitude du point obtenu. La différence :

$$e = L - S \quad (1)$$

représente donc l'erreur qu'apportent dans cette observation unique le bruit et la quantification d'amplitude ( fig 1 ). Cette erreur  $e$  est liée aux deux variables aléatoires que sont l'amplitude  $y$  du bruit et la position  $x$  du signal exact par rapport au point de quantification le plus proche. Elle est donc aléatoire, et il s'agit d'évaluer ses caractéristiques du premier ordre qui sont fonction de  $Q/\sigma$ , rapport



---

de la largeur du pas de quantification à l'écart quadratique moyen du bruit.

La densité de probabilité de l'erreur,  $p(e)$ , a été ainsi obtenue de façon exacte [1], avec pour seule condition que la densité de probabilité du bruit soit connue.

On considère ici la marge d'erreur, d'origine le point de quantification obtenu  $L$ . C'est une marge d'amplitude telle que le signal exact  $S$  s'y trouve pour une probabilité donnée. Elle peut être évaluée de deux façons différentes.

La première, qui donne un résultat exact, est obtenue lorsque la densité de probabilité  $p(y)$  du bruit, quelle qu'elle soit, est connue. On en déduit alors  $p(e)$ , puis sa fonction de répartition. Il en résulte ainsi ce qu'est, pour une probabilité donnée, la marge d'erreur correspondante.

La seconde approche, envisagée ici, peut être utile lorsqu'on ne connaît pas la densité de probabilité du bruit de façon exacte, ou lorsqu'on préfère obtenir plus directement les résultats. Certes les marges d'erreur ainsi évaluées le seront sous forme approchée, leur amplitude étant plus grande que celle qui correspond, pour la même probabilité, au calcul exact. On peut donc au moins être sûr que la probabilité que le signal exact se trouve dans une telle marge d'erreur est en fait plus grande que celle indiquée. Par ailleurs on peut apprécier, à partir de ces résultats approchés, ce qu'est en fonction de  $Q/\sigma$  le degré de détérioration apporté par la quantification d'amplitude. Il est à noter que le rapport  $Q/\sigma$  peut avoir n'importe quelle valeur. Les caractéristiques du bruit que l'on a à connaître expérimentalement sont  $\sigma$  et, pour des amplitudes positives  $y^+$  et négatives  $y^-$ , les probabilités correspondantes  $\Pi(y > y^+)$  et  $\Pi(y < y^-)$ .



---

Il semble, d'après tous les articles que nous connaissons concernant la quantification d'amplitude, que l'erreur  $e$ , qui résulte de ce processus, n'ait pas été envisagée. En fait il y a eu essentiellement deux façons différentes d'aborder et d'étudier les effets de cet opérateur non linéaire.

La première, qui fut exposée pour la première fois par W.R.Bennett [2], a été de considérer directement la différence entre l'amplitude de la fonction aléatoire d'entrée, généralement gaussienne, et celle de la sortie quantifiée. C'est ainsi qu'ont été obtenus de nombreux résultats sur les caractéristiques du deuxième ordre de la fonction de sortie ( écart quadratique moyen, fonctions d'autocorrélation et d'intercorrélacion, spectre d'énergie, entre autres ). Par contre il n'a pas été possible de connaître les caractéristiques du premier ordre.

L'autre approche, conçue et en partie résolue par B.Widrow [3], fut de considérer le processus de quantification comme un opérateur agissant directement sur les densités de probabilité, plutôt que sur les amplitudes. C'est ainsi que, à la double condition que l'étendue du spectre d'énergie ( fonction caractéristique ) de la fonction aléatoire d'entrée soit bornée, et que la largeur du pas de quantification soit inférieure ou égale à une certaine valeur correspondante, l'ensemble des effets de la quantification d'amplitude peut être exactement connu. En particulier il est alors montré, dans ces conditions seulement, que la quantification apporte un bruit stationnaire indépendant dont on connaît les caractéristiques du premier ordre.

C'est en s'intéressant plutôt, dans notre nouvelle approche, à l'erreur  $e$ , que sont alors évaluées les caractéristiques du



premier ordre de la fonction aléatoire de sortie, sans qu'apparaissent les restrictions ci-dessus mentionnées.

### I / - AMPLITUDE DE L'ERREUR e -

La figure (1) représente l'échelle de quantification, à pas équidistants de largeur Q, et les paramètres entrée-sortie d'une observation unique. A gauche de cette figure les amplitudes absolues, par rapport à l'origine de l'échelle de quantification, sont notées en majuscules. Les amplitudes relatives, d'origine le signal exact S, sont notées en minuscules.

Soit, avec comme unité de mesure la largeur Q du pas de quantification :

- S : l'amplitude du signal exact inconnu
- K : le point de quantification le plus proche de S
- y : l'amplitude du bruit
- A : l'amplitude " signal + bruit " avant quantification
- L : le point de quantification le plus proche de A et qui sera donc enregistré.

Afin de pouvoir évaluer l'erreur totale  $e = L - S$ , on considère l'origine flottante F dont l'amplitude est S. C'est ainsi que l'erreur e peut être directement liée aux deux variables aléatoires que sont :

- la position relative  $x = K - S$  du signal inconnu :  

$$- 0,5 < x < + 0,5 \quad ( 2 )$$
- l'amplitude y du bruit.

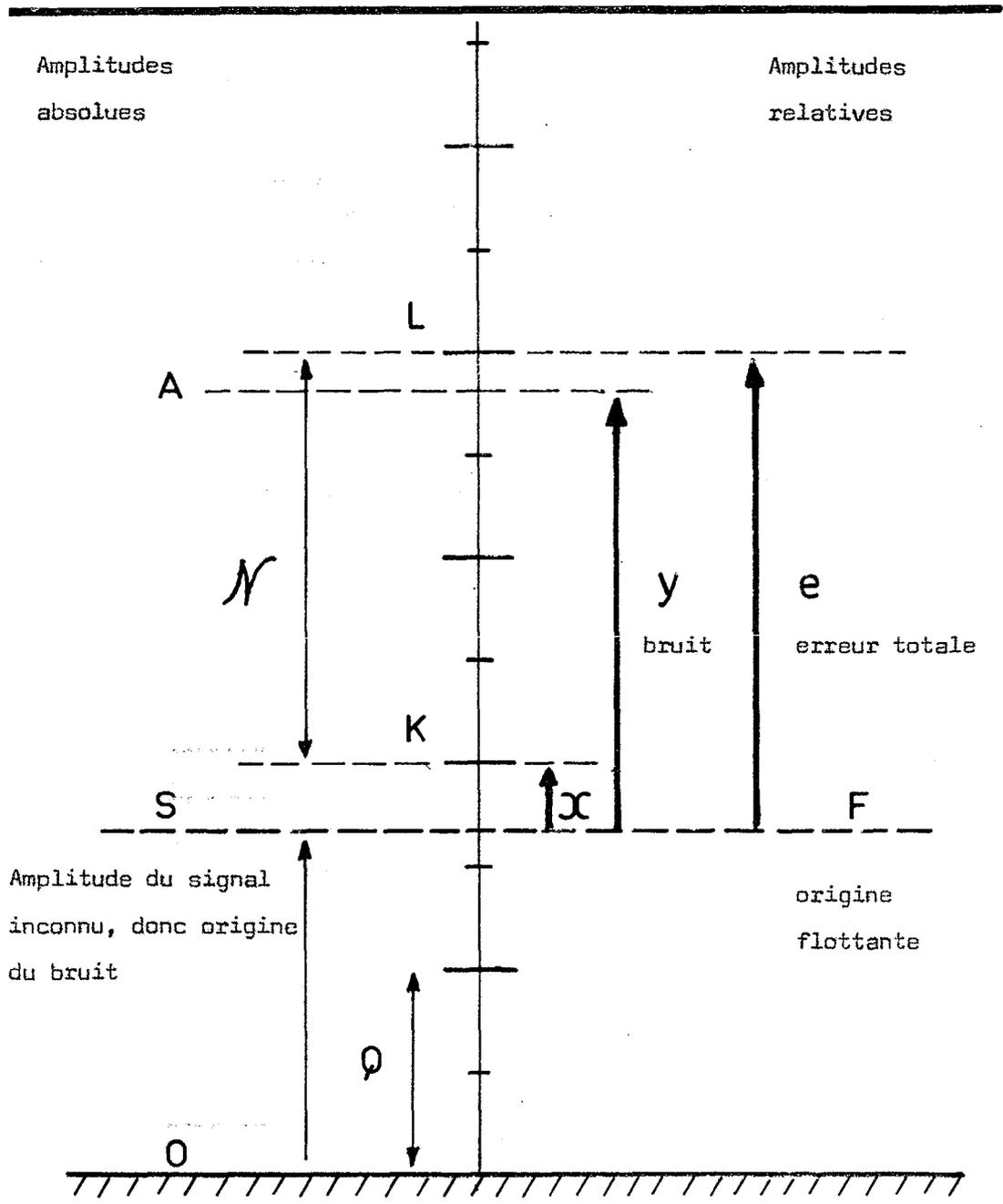


Fig 1 - L'amplitude d'entrée du quantificateur étant A, l'erreur totale e due au bruit et à la quantification est directement liée à x et y .



Suivant que l'amplitude du bruit est positive,  $y^+$ , ou négative,  $y^-$ , les erreurs correspondantes  $e^+$  et  $e^-$  sont :

$$y \geq 0 \longrightarrow e^+ = x + \left\{ -x + y^+ + 0,5 \right\} \quad (3)$$

$$y \leq 0 \longrightarrow e^- = x + \left\{ -x + y^- - 0,5 \right\} \quad (4)$$

$\left\{ \right\}$  est la partie entière de son contenu.

## II / - DENSITE DE PROBABILITE ET MARGES D'ERREUR EXACTES -

Indépendamment des relations (3) et (4), et compte tenu de toutes les combinaisons possibles de  $x$  et de  $y$  qui aboutissent à une erreur donnée  $e$ , la densité de probabilité de l'erreur est [ 1 ] :

$$p(e) = \int_{e-0,5}^{e+0,5} p(y) dy \quad (5)$$

Pour être mesurées en unité  $\sigma$ , les variables  $x$ ,  $y$ ,  $e$ , ont à être multipliées par  $Q/\sigma$ .

On a donc ainsi :

$$p(e_\sigma) = \frac{1}{Q/\sigma} \int_{Q/\sigma(e-0,5)}^{Q/\sigma(e+0,5)} p(y_\sigma) dy_\sigma \quad (6)$$

La figure 2 en est un exemple d'application qui correspond au cas où le bruit est gaussien.

Ces courbes sont fonction de  $Q/\sigma$ . Celle qui correspond à  $Q/\sigma = 0$  est bien sûr  $p(y_\sigma)$  lui-même.

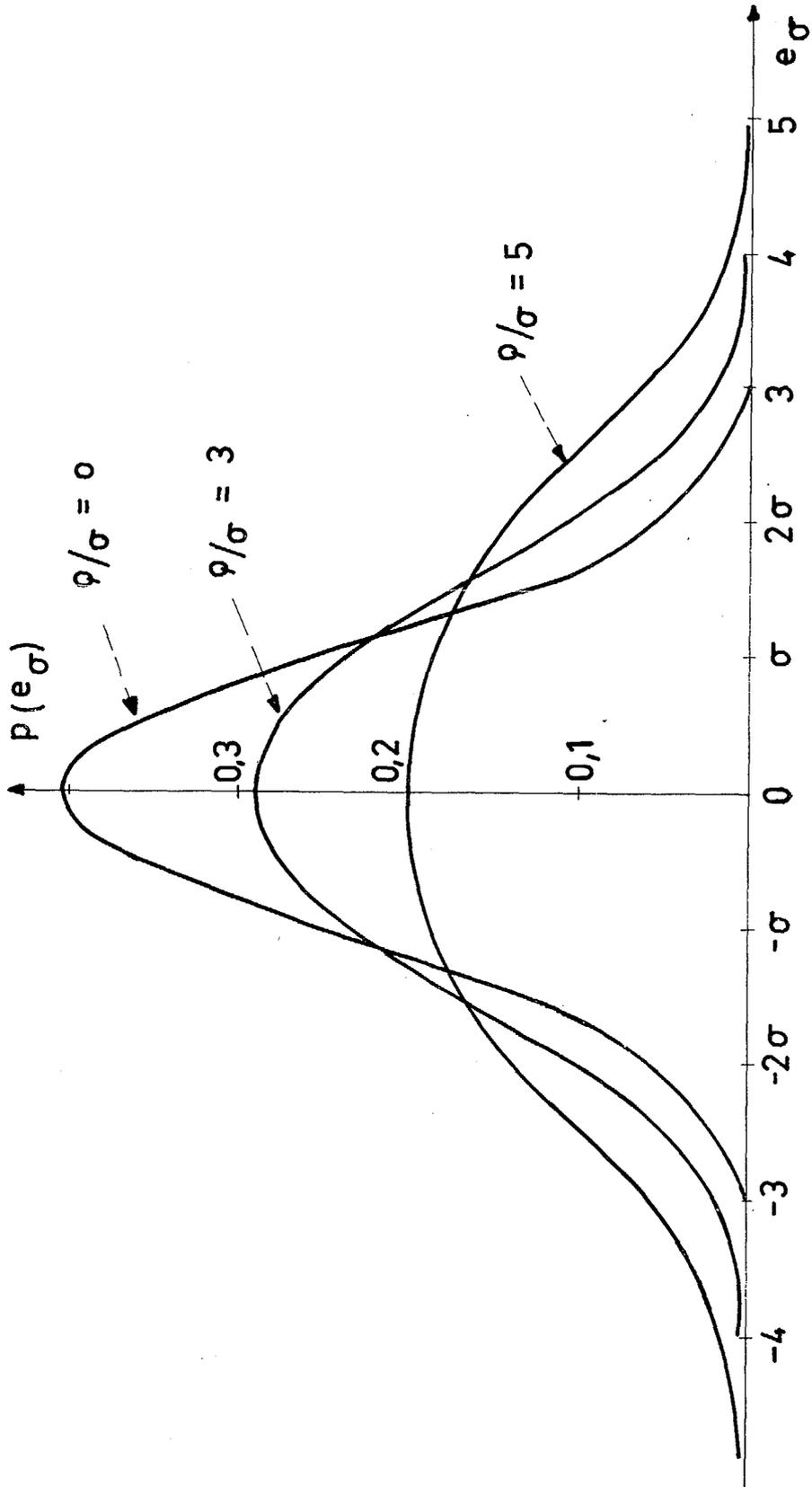


Fig 2.- Densités de probabilités de l'erreur totale, le bruit étant gaussien.



La densité de probabilité  $p(e_{\sigma})$  étant évaluée exactement à partir de celle du bruit, on peut en déduire par calcul machine la fonction de répartition de  $e_{\sigma}$ , donc toute marge d'erreur correspondant à une probabilité donnée.

### III / - EVALUATION APPROCHEE DES MARGES D'ERREUR -

Les caractéristiques du bruit que l'on a à connaître pour une telle évaluation, ainsi que l'intérêt éventuel de cette approche, ont déjà été mentionnés. Du fait que nombreuses sont les relations et les explications qui permettent d'aboutir aux résultats indiqués ci-après, il ne nous a malheureusement pas été possible, par manque de temps, de les préciser ici.

C'est à partir de (3) et (4), et en tenant compte de relations de probabilité entre  $x$ ,  $y$ , et  $e$ , que sont obtenues les limites  $e_M^+$  et  $e_M^-$  d'une marge d'erreur correspondant à une probabilité donnée.

Soit donc  $e_M^+$  l'erreur maximale liée à un  $y^+$  donné, et telle que l'on a la probabilité :

$$\Pi \left( e > e_M^+ \right) < \Pi \left( y > y^+ \right) \quad (7)$$

De même soit  $e_M^-$  tel que :

$$\Pi \left( e < e_M^- \right) < \Pi \left( y < y^- \right) \quad (8)$$

Ces limites d'une marge d'erreur correspondant aux probabilités  $\Pi \left( e > e_M^+ \right)$  et  $\Pi \left( e < e_M^- \right)$  de (7) et (8) ont pour valeurs :



$$e_M^+ = y^+ + 0,5 - \Pi ( y > y^+ ) \quad (9)$$

$$e_M^- = y^- - 0,5 + \Pi ( y < y^- ) \quad (10)$$

le contenu de ces relations étant en fait homogène.

En utilisant  $\sigma$  comme unité de mesure, ces relations deviennent :

$$\left( e_M^+ \right)_\sigma = y_\sigma^+ + \frac{Q}{\sigma} \left[ 0,5 - \Pi \left( y_\sigma > y_\sigma^+ \right) \right] \quad (11)$$

avec :  $\Pi \left[ e_\sigma > \left( e_M^+ \right)_\sigma \right] < \Pi \left[ y_\sigma > y_\sigma^+ \right] \quad (12)$

et :  $\left( e_M^- \right)_\sigma = y_\sigma^- + \frac{Q}{\sigma} \left[ -0,5 + \Pi \left( y_\sigma < y_\sigma^- \right) \right] \quad (13)$

avec :  $\Pi \left[ e_\sigma < \left( e_M^- \right)_\sigma \right] < \Pi \left[ y_\sigma < y_\sigma^- \right] \quad (14)$

Les marges d'erreur ayant comme origine le point de quantification enregistré  $L$ , leur limite supérieure est  $\left( e_M^- \right)_\sigma$  et leur limite inférieure  $\left( e_M^+ \right)_\sigma$  ( fig 3 ).

Lorsque la densité de probabilité du bruit,  $p (y_\sigma)$ , est symétrique, on a alors la relation plus simple :

$$\left( e_M^+ \right)_\sigma = - \left( e_M^- \right)_\sigma = y_\sigma^+ + \frac{Q}{\sigma} P \left( 0 < y_\sigma < y_\sigma^+ \right) \quad (15)$$

avec :  $P \left[ \left( e_M^- \right)_\sigma < e_\sigma < \left( e_M^+ \right)_\sigma \right] > 2 P \left( 0 < y_\sigma < y_\sigma^+ \right) \quad (16)$

Comme application, on considère le cas où le bruit est gaussien.

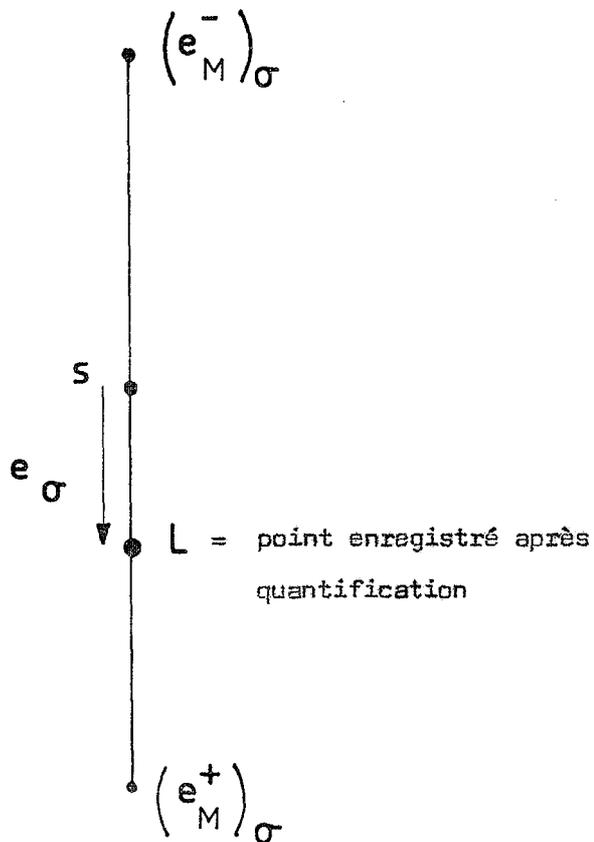


Fig 3 - La probabilité que le signal exact  $S$  se trouve dans cette marge [relations (11) et (13)] est :

$$1 - \pi \left[ e_{\sigma} > \left( e_{M}^{+} \right)_{\sigma} \right] - \pi \left[ e_{\sigma} < \left( e_{M}^{-} \right)_{\sigma} \right]$$

avec :

$$\pi \left[ e_{\sigma} > \left( e_{M}^{+} \right)_{\sigma} \right] < \pi \left[ y_{\sigma} > y_{\sigma}^{+} \right]$$

$$\pi \left[ e_{\sigma} < \left( e_{M}^{-} \right)_{\sigma} \right] < \pi \left[ y_{\sigma} < y_{\sigma}^{-} \right]$$



---

La figure 4 représente quelques exemples, les courbes ayant pour paramètre  $Q/\sigma$ . Celle qui correspond à  $Q/\sigma = 0$  est la fonction d'erreur elle-même.

A partir de ces courbes on peut ainsi apprécier le degré de détérioration apporté par la largeur relative du pas de quantification. Par exemple, pour une probabilité  $P = 0,80$ , la marge d'erreur correspondant à  $Q/\sigma = 5$  est plus petite que  $\pm 3,3\sigma$  et donc moins de 2,55 fois plus grande que ce qu'elle serait en l'absence de quantification.

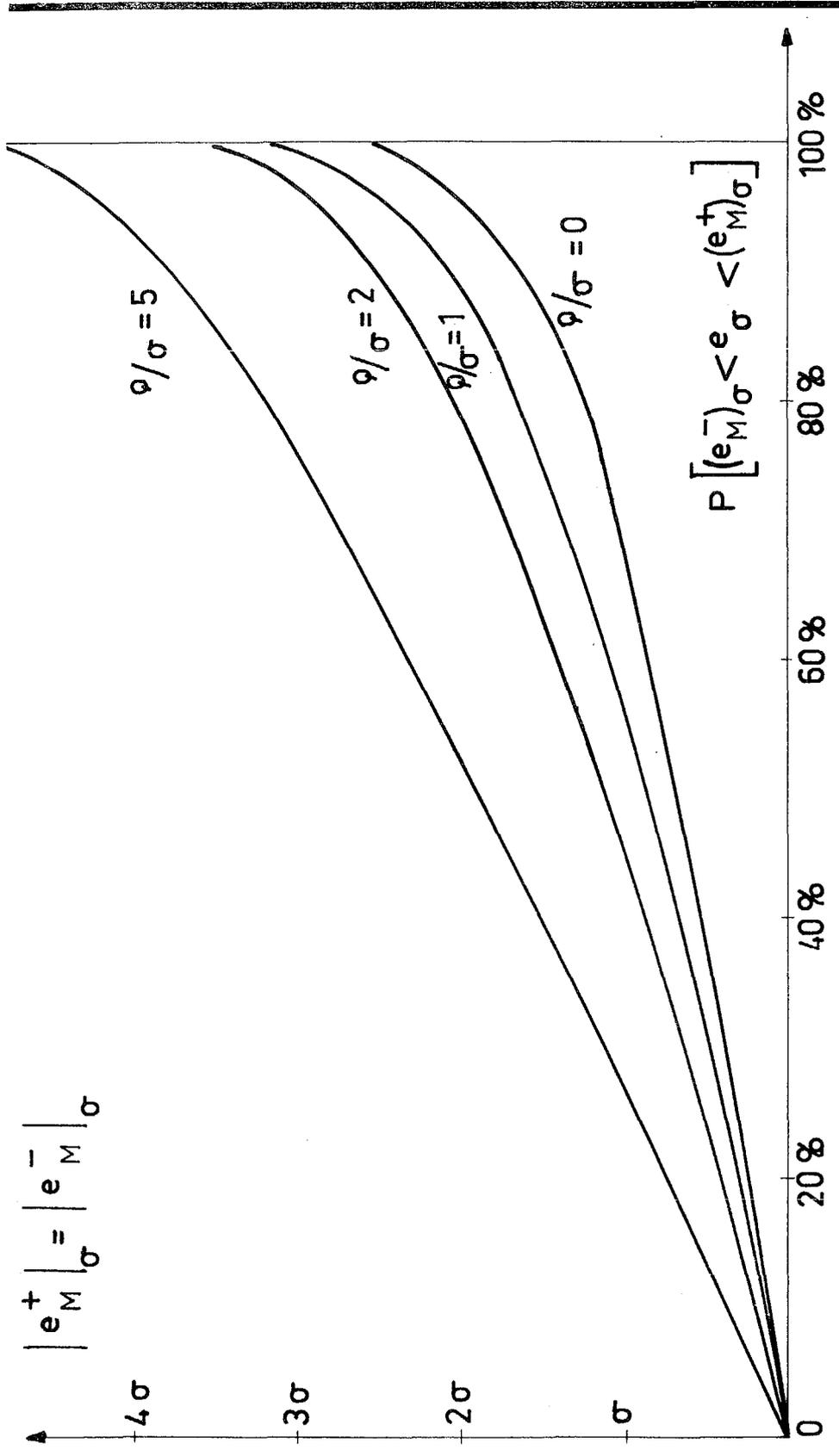


Fig 4 - Marges d'erreur approchées mais plus grandes qu'elles ne le sont réellement; le bruit  $y_{\sigma}$  est gaussien.



---

BIBLIOGRAPHIE -

- [ 1 ]\* - Vinokur M., " Amplitude quantization : a new, more general approach " - P.I.E.E.E. - Février 1969.
- [ 2 ] - Bennett W.R., " Spectra of quantized signals ", Bell Sys. Techn. J., Vol. 27, 446, Juillet 1948.
- [ 3 ] - Widrow B., " A study of rough amplitude quantization by means of Nyquist sampling theory ", I.R.E. Trans. on Circuit Theory, Vol. CT.3, 226, Décembre 1956.
- [ 4 ] - Bonnet G., " Sur la statistique du second ordre des signaux aléatoires quantifiés ", Compte Rendus, 885, 30 Juillet 1962.

---

\* Par rapport à cet article certaines modifications ont été apportées ici. Ainsi, dans [ 1 ], l'origine flottante correspondait à la somme du signal exact et de la valeur moyenne du bruit. Ce qui avait entre autres pour but d'évaluer directement, certains résultats ayant par ailleurs été déjà obtenus par G. Bonnet [ 4 ], la différence entre les valeurs moyennes d'entrée et de sortie. Les résultats de [ 1 ] restent applicables ici en définissant seulement  $y$  et  $e$  comme amplitudes dont l'origine est, non pas "  $S +$  valeur moyenne du bruit ", mais  $S$  lui-même. Par ailleurs  $x$  est de valeur opposée, et  $t$  est remplacé par  $y_0$ .