



DEUXIÈME COLLOQUE
SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL
ET SES APPLICATIONS
NICE - 5 AU 10 MAI 1969

39/1

SIGNAUX EMIS PAR DES SYSTEMES INCOMPLETEMENT
DETERMINES

Théodore Vogel (Centre de Recherches Physiques du C.N.R.S.)

Sommaire : La classe des systèmes évolutifs caractérisée par un champ de vitesses dont la différence avec celui d'un certain système dynamique est bornée en norme a été définie et étudiée dans un travail antérieur /1/. On traite ici, à propos de ces systèmes, du problème de la reconnaissance de l'état initial commun à une suite d'évolutions répétées, observables dans un domaine de l'espace de phase.

Summary : The author has discussed in a previous paper /1/ a class of evolving systems, such that the local velocity may differ in norm by a bounded quantity from that of a given dynamical system. For such a system, one considers here the problem of identifying the common initial state of a set of repeated evolutions, by means of observations conducted in a certain domain of the state space.



Signaux émis par des systèmes incomplètement déterminés
Théodore Vogel (Centre de Recherches Physiques du C.N.R.S.)

1. Dans un exposé que nous avons fait il y a deux ans au Colloque dont celui-ci est, d'un certain point de vue, la suite (1), nous avons examiné le comportement de systèmes évolutifs dont la loi n'était déterminée qu'avec imprécision, mais qui ressemblaient voisins d'un système dynamique donné. Pour abrégé, nous nommerons ce dernier le "système juste", et celui dont nous nous occuperons principalement le "système lâche".

Dans ce qui suit, nous envisagerons les systèmes lâches d'un point de vue un peu différent de celui qui avait été adopté pour la première étude citée, et nous attacherons en particulier à reconstituer leur passé plutôt qu'à prévoir leur avenir. Il sera cependant utile, pour commencer, de rappeler brièvement les résultats exposés il y a deux ans.

2. Soit E un espace de phase localement compact, qui sera pratiquement un espace numérique R^n , P un point de $D \subset E$, F une fonction de point définie sur D , continue et lipschitzienne dans ce domaine : en nous bornant aux systèmes justes autonomes, c'est-à-dire tels que le temps ne figure pas explicitement dans leur loi d'évolution, le système juste sera régi à chaque instant par l'équation différentielle vectorielle du premier ordre

$$(1) \quad \dot{P} = F(P); \quad \dot{P} = dP/dt.$$

Une trajectoire passant par le point P_0 est l'ensemble des évolués $P = f(P_0, t)$ pour $t \in R$; on a la relation fondamentale, qui exprime la transitivité des systèmes dynamiques,

$$f(f(P_0, t), t') = f(P_0, t + t').$$

On sait que, pour le système (1), l'espace de phase se décompose en cellules invariantes D , qui sont des domaines contenant tous les évolués de chacun de leurs points :

$$\forall t \in R : P_0 \in D \Rightarrow f(P_0, t) \in D.$$

Ces cellules sont limitées par des multiplicités séparatrices sillonnées de trajectoires, à moins qu'elles ne soient illimitées ; lorsqu'on étudie les mouvements issus de points (états initiaux) appartenant à une certaine cellule D , on peut se borner à l'examen des singularités qui appartiennent à la fermeture $\bar{D}$ de D (c'est le "principe du figement", /2/). A l'intérieur de D , le système juste est caractérisé par le champ de vecteurs $\dot{P}$, invariable dans le temps.

Le système lâche considéré a une vitesse qui, en tout point s'écarte de celle du système juste d'une quantité bornée en norme : autrement dit, un tel système est régi par l'inégalité

$$(2) \quad |\dot{P} - F(P)| \leq m,$$



où le réel positif m est le "jeu" ; on ne le suppose pas nécessairement petit. Par tout point de D , il passe donc une infinité de trajectoires lâches, dont les tangentes appartiennent au cône (2) ; si l'on se fixe un point P , l'ensemble des trajectoires lâches qui y passe forme un cône, ou mieux deux demi-cônes opposés par le sommet, que l'on notera $C^+(P)$ et $C^-(P)$, et qui correspondent respectivement à tous les futurs, et à tous les passés, possibles du système lâche observé à l'instant présent dans l'état exact P . Il faut noter que les trajectoires lâches ne sont pas astreintes aux conditions qui régissent celles du système juste, et qui tiennent à la nature de la loi (1) : elles peuvent, en particulier, présenter autant de points anguleux ou multiples qu'on le voudra, et se couper les unes les autres ; l'inégalité (2) implique seulement qu'elles appartiennent au cône de sommet P , et que leurs rebroussements éventuels restent limités en amplitude.

Le problème examiné dans notre travail de 1967 était le suivant : connaissant la loi (1) du système juste et la valeur m du jeu, peut-on prédire le destin final d'un système lâche effectivement observé en P à l'instant t , c'est-à-dire l'ensemble limite ω du mouvement lâche ? La réponse à cette question dépend des singularités et des séparatrices de la cellule invariante D qui contient P (cellule qui perd naturellement son caractère invariant dès que le jeu intervient) ; on peut arriver à des conclusions assez précises dans les cas où $E = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$:

1°. Si l'état observé P se trouve dans un domaine ayant pour centre un point de repos du système juste, et défini par $\|F - m\|$, l'affixe du système lâche pourra demeurer indéfiniment dans ce domaine et y parcourir toute trajectoire, pourvu que ce soit à une vitesse suffisamment faible : on peut dire que le repos est remplacé, du fait du jeu, par un cliquetis. Si le point de repos est instable, l'affixe pourra aussi quitter le domaine du cliquetis, et suivre le destin des mouvements lâches partant de son point de sortie, ce qui nous amène au cas suivant :

2°. Si l'affixe observé est extérieur au domaine défini en 1°, le destin final du système dépend de la nature des autres singularités et des séparatrices. En particulier, dans le plan, ce destin pourra différer de celui du système juste s'il existe des points singuliers multiples d'ordre pair, ou des cycles limites suffisamment voisins les uns des autres (distants de moins de $2m$ en norme), ou enfin des séparatrices joignant deux cols ; de même, dans l'espace à trois dimensions, le destin du système lâche sera indéterminé si les surfaces frontières de D sont illimitées mais qu'elles portent un nœud-foyer stable non entouré de cycles limites, ou un col-foyer instable entouré d'un cycle limite stable ; si les faces de D sont limitées, il y aura incertitude chaque fois qu'une face



Signaux émis par des systèmes incomplètement déterminés
Théodore Vogel (Centre de Recherches Physiques du C. N. R. S.)

portera un nœud-foyer stable et une face adjacente un col-nœud ou un col-foyer instable, tous cycles limites étant alors exclus. Il va de soi que si le destin final du système lâche n'est pas celui du système juste, l'affixe quitte la cellule D pour n'y plus revenir; lorsque le destin final n'est pas modifié, la trajectoire lâche peut traverser les faces de D, mais elle finira par y revenir asymptotiquement.

Les conditions trouvées sont très voisines de celle de l'instabilité des systèmes dynamiques au sens "structurel" d'Andronov et Pontryagin; il est aisé de voir, d'ailleurs, que les systèmes structurellement stables sont une sous-classe des systèmes lâches à destin identique à celui des systèmes justes dont ils dérivent.

3. De la définition des conoïdes C^+ et C^- découlent immédiatement deux conséquences dont on aura besoin dans la suite :

1°. Si P est un point régulier du système juste, $C^+(P)$ contient strictement tous les conoïdes des avénirs des conséquents $f(P, t), t > 0$, et $C^-(P)$ contient strictement les conoïdes des passés des antécédents $f(P, t), t < 0$. La trajectoire juste passant par P constitue l'épine dorsale de $C^+(P)$.

2°. $C^+(P)$ contient strictement les zones de cliquetis des points de repos situés sur la trajectoire juste, et les enveloppe.

3°. Si P est un point de repos instable du système juste, l'affixe du système lâche pouvant se déplacer librement dans le domaine de cliquetis, celui-ci fait partie à la fois de $C^+(P)$ et de $C^-(P)$; mais aucun affixe extérieur ne peut parvenir à P, de sorte que le demi-conoïde des passés se réduit au domaine de cliquetis, alors que $C^+(P)$ comprend tout le domaine d'attraction de P dans le système juste à flèche de temps inversée, qui aurait $-F$ pour champ des vitesses. Les conclusions sont inversées si P est un point de repos stable du système juste : C^- est alors la réunion du domaine d'attraction de P et du domaine de cliquetis, C^+ se réduit à ce dernier.

Pour fixer les idées sur les domaines C, considérons le cas simple d'un système dynamique dans le plan,

$$\dot{x} = X(x, y) ; \dot{y} = Y(x, y) :$$

les conoïdes C^+ et C^- deviennent deux secteurs curvilignes opposés par le sommet, délimités par deux courbes qui passent par P. La tangente à l'une de ces courbes, de pente y' , forme avec la tangente à la trajectoire juste, de pente Y/X , un angle dont la tangente est $m/\sqrt{X^2 + Y^2 - m^2}$; l'équation différentielle des deux courbes frontières est donc

$$(3) \quad y' = \frac{Y}{X} \frac{X^2 + Y^2 - m^2 + mX}{X^2 + Y^2 - m^2 + mY}$$



Dans les régions où $X^2 + Y^2 = m^2$, y' s'écarte peu de Y/X ; au contraire, au voisinage de la zone de cliquetis ($X^2 + Y^2 \rightarrow m^2$), y' tend vers la normale $-X/Y$ à la trajectoire juste, donc vers la tangente à la frontière du cliquetis ; enfin, pour $X^2 + Y^2 = m^2$, il n'y a pas de valeurs réelles pour y' , de sorte que la frontière de C ne pénètre pas dans ce domaine.

Des considérations tout à fait analogues valent dans R^3 .

4. Ceci posé, considérons la situation suivante : on se propose d'étudier un phénomène dont on connaît en principe la loi d'évolution, qui est celle d'un système dynamique, mais que l'on croit troublé pour des raisons diverses, les écarts par rapport à l'évolution de principe restant toutefois bornés. Ce phénomène, représenté d'après les hypothèses faites par un système lâche, se produit à partir d'un état initial P_0 , inconnu mais invariable, et les évolutions recommencent pour une suite, continue ou discontinue, d'instants initiaux t_0^i , suffisamment nombreux et suffisamment étalés dans le temps pour qu'on puisse supposer (sans rien savoir d'une "probabilité" des perturbations) que par suite des variations inconnues des conditions d'évolution toutes les trajectoires lâches issues de P_0 seront empruntées une fois ou l'autre au cours de l'observation. Nous nous posons dans ces conditions la question de savoir quelles sont les informations qu'il est possible de déduire d'observations faites dans un domaine V de l'espace de phase.

1° Une première réponse est évidente : ces informations seront nulles si $V \cap C^+(P_0) = \emptyset$. On en déduit que l'ensemble des états P_i où l'on aura pu observer le phénomène au cours d'une expérience suffisamment prolongée est l'intersection de V avec le cône des futurs de P_0 , et que l'ensemble des états observables P_i dans le voisinage desquels il existe des états non observables appartient à $\text{Fr} C^+(P_0)$.

2° Le système juste étant connu par hypothèse, on peut construire les cônes C^+ en tout point du domaine des évolués, si l'on connaît le jeu m . Deux cônes dont les sommets ne sont pas les évolués d'un même mouvement juste ont une partie commune qui est un sous-ensemble strict pour chacun d'eux et qui est une multiplicité à n dimensions, limitée par une frontière qui est une multiplicité à $n-1$ dimensions ; cette multiplicité ne coïncidera que très exceptionnellement avec celle des P_i , et généralement cette coïncidence pourra être détruite par une modification du domaine d'observation V choisi, de sorte qu'en général d'ensemble des P_i appartiendra à un cône C^+ et à un seul, ce qui déterminera sans ambiguïté son sommet, c'est-à-dire l'état initial P_0 des évolutions observées. Il y aura exception pour les P_i qui seraient des points singuliers du système juste, ou qui seraient situés sur une face



Signaux émis par des systèmes incomplètement déterminés
Théodore Vogel (Centre de Recherches Physiques du C. N. R. S.)

séparatrice de deux cellules invariantes de ce système, car dans cette éventualité ces points auraient des voisins aussi proches qu'on le voudrait situés dans deux conoïdes distincts.

Pour illustrer ce qui vient d'être dit, reprenons l'exemple du système dynamique bidimensionnel du paragraphe précédent : les frontières du secteur C de sommet (x, y) sont les deux courbes définies par l'équation différentielle (3), et chacune de ces courbes est bien déterminée, sauf aux points singuliers où

$$Y \sqrt{X^2 + Y^2 - m^2} + mX = X \sqrt{X^2 + Y^2 - m^2} + mY = 0$$

qui seront les points singuliers $X=Y=0$ du système juste. En tout point P_i régulier pour le système juste, il passera donc une frontière "+" unique et une frontière "-" unique appartenant la première à un secteur ayant son sommet sur elle, la deuxième à un secteur ayant son sommet sur elle, donc différent du précédent si le sommet en question n'est pas un point singulier du système juste. Si l'on observe les phénomènes aux différents points d'une courbe qui ne soit pas une courbe intégrale de (3), il y aura deux états frontières observables, P_+ et P_- , respectivement situés sur une intégrale "+" et sur une intégrale "-" de (3) : l'intersection de ces deux intégrales donnera sans ambiguïté en général le point P_0 , état initial commun de toutes les manifestations observées du phénomène.

Il va de soi que ce raisonnement se transpose à un espace de nombre de dimensions quelconque, en remplaçant les courbes et les points frontières par des multiplicités de dimensions convenables.

En résumé, l'observation de répétitions suffisamment nombreuses du phénomène d'évolution permettra de déterminer sans ambiguïté l'état initial commun de ces évolutions, pourvu

- a) que l'on sache construire les $C^+(P)$, ce qui implique la connaissance de la loi juste et du jeu m ;
- b) que l'état initial en question ne soit pas une singularité du système juste ;
- c) que l'observation soit faite en des points qui ne soient ni des singularités du système juste, ni des points d'une frontière de cellules invariantes adjacentes de ce système.

5. Dans les conditions du paragraphe précédent, comment déterminer le jeu m, voire le champ juste F, qui n'est pas toujours suggéré par une théorie élémentaire négligeant les perturbations ? Observons, pendant un intervalle de temps suffisamment long, le point P_i de l'espace de phase, pour y repérer tout passage de l'affixe : si les hypothèses du n° 4 sont vérifiées, le phénomène sera observé aux époques $t_1^1, \dots, t_1^k$, formant l'ensemble I, et l'on pourra



Signaux émis par des systèmes incomplètement déterminés
Théodore Vogel (Centre de Recherches Physiques du C. N. R. S.)

mesurer les vitesses d'évolution correspondantes $P_i(t_i^k)$. Les extrémités de ces vecteurs rempliront une boule de rayon m , qui aura pour centre l'extrémité du vecteur vitesse juste $F(P_i)$. On aura donc, d'une part, la valeur du jeu

$$m = \frac{1}{2} \sup_{t \in I} P_i(t) - \inf_{t \in I} P_i(t)$$

et de l'autre les composantes de la vitesse juste

$$\text{Pr}_m F(P_i) = \frac{1}{2} \sup_{t \in I} \text{pr}_m P_i(t) + \inf_{t \in I} \text{pr}_m P_i(t)$$

En opérant ainsi pour un nombre suffisant de points P_i , on aura d'une part un ensemble de valeurs de m , qui devraient toutes être égales, et dont la dispersion montrera dans quelle mesure le phénomène observé est bien représenté par un système lâche ; et, d'autre part, un champ discret de valeurs de F , que l'on pourra exprimer par une fonction continue grâce à une interpolation convenable. - Il faut noter à cet égard que la relation triangulaire

$$P - F(P) \quad P - F(P) \quad + \quad F(P) - F(P)$$

permet de considérer un système lâche comme dérivant de divers systèmes justes, dès lors que les champs de vitesses de ceux-ci sont, en chaque point, suffisamment voisines en norme : on pourra donc interpoler les $F(P_i)$ par l'expression compatible avec les observations la plus conforme à l'idée qu'on se fait de la nature du phénomène observé.

6. Il faut maintenant examiner ce qui se passe lorsque P_0 est un point singulier du système juste (si dans un premier choix des P_i avaient cette propriété, on serait maître de les éliminer, de sorte que ce cas peut être écarté). Par un point singulier, il peut passer plusieurs trajectoires, voire une infinité, de sorte que la multiplicité de conoïdes issus de ce point peut recouvrir tout le domaine de l'espace de phase où les observations sont possibles, et qu'il n'y aura pas de frontière P_i . Le procédé du n°4 devient ainsi inapplicable.

On remarquera alors que P_0 est un antécédent lâche de chaque P_i , et qu'il appartient par conséquent à son conoïde des passés ; de sorte que finalement

$$P_0 \in C^-(P_i).$$

La construction de cette intersection ne présente pas de difficultés ; nous avons vu au n°3 que cette intersection contient le domaine de cliquetis entourant P_0 , et que chacun des conoïdes $C^-(P_i)$ est tangent à ce domaine : il en résulte que si les points d'observation sont suffisamment éloignés de P_0 et suffisamment éloignés les uns des autres pour être vus de P_0 sous des angles très différents, leur intersection se réduit sensiblement au domaine de cliquetis.



Signaux émis par des systèmes incomplètement déterminés
Théodore Vogel (Centre de Recherches Physiques du C. N. R. S.)

On peut encore illustrer ceci par un exemple dans le plan, choisi particulièrement simple : soit $X=x$ et $Y=y$; les trajectoires justes sont des droites issues de l'origine. On vérifie aisément que les frontières des C sont également des droites, à savoir les tangentes au cercle $X^2 + y^2 = m^2$ issues du sommet P_i . Si l'on prend les deux points $P_1 = \text{col}(0, y_1)$ et $P_2 = \text{col}(y_1, 0)$, l'intersection des deux secteurs C est la réunion du disque de cliquetis $x^2 + y^2 \leq m^2$ et de quatre triangles curvilignes, dont les sommets sont à l'intersection des deux bissectrices $x = \pm y$ et du cercle $x^2 + y^2 = r^2$, avec

$$r^2 = 2m^2 y_1^2 / (m^2 + y_1^2 - m^2 y_1^2).$$

On constate que lorsque y_1 varie de m à l'infini, r^2 diminue de $2m^2$ à m^2 , valeur qu'il atteint lorsque $y_1^2 = 2m^2$, puis augmente jusqu'à la valeur originelle $2m^2$, atteinte asymptotiquement. Les "cornes" de l'intersection des deux secteurs C restent donc négligeables, et au pire on peut conclure que

$$P_0 \quad (x, y) : x^2 + y^2 \leq 2m^2$$

REFERENCES

- /1/ VOGEL, Th. Sur une classe de systèmes incomplètement déterminés. In : Coll. nat. du GRETSI 1967, Paris 1968, pp. 125-129. (avec une bibliographie).
- /2/ VOGEL, Th. Théorie des systèmes évolutifs. Paris, Gauthier-Villars éd., 1965 : p. 15.