



**DEUXIÈME COLLOQUE
SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL
ET SES APPLICATIONS
NICE - 5 AU 10 MAI 1969**

38/ 1

SUR LES RELATIONS DE RECIPROCITE EN ACOUSTIQUE.

Maurice JESSEL, Maître de Recherche
au CENTRE DE RECHERCHES PHYSIQUES du C.N.R.S.
13 - MARSEILLE (9ème)

RESUME La notion d'une observable physique appelée réaction, introduite en électromagnétisme par V.H. Rumsey, est susceptible de transposition en acoustique. Destinée à décrire le degré de couplage entre deux systèmes de sources elle satisfait, sous des conditions très générales, à un théorème de réciprocité. Parmi ces conditions figure la similitude des signaux échangés. Le cas des réactions nulles offre également d'intéressantes perspectives.

SUMMARY A physical observable called the reaction, first defined by V.H. Rumsey in electromagnetic theory, is introduced in acoustics. Measuring the coupling between two systems of acoustic sources, reaction satisfies the reciprocity theorem under quite general conditions. Among these conditions is the similarity of emitted signals. The case of null reactions is also an interesting one.



DEUXIÈME COLLOQUE
SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL
ET SES APPLICATIONS
NICE - 5 AU 10 MAI 1969

38/ 3

SUR LES RELATIONS DE RECIPROCITE EN ACOUSTIQUE.

Maurice JESSEL, Maître de Recherche
au CENTRE DE RECHERCHES PHYSIQUES du C.N.R.S.
13 - MARSEILLE (9ème)

I.- INTRODUCTION -

=====

Une relation de réciprocité entre deux systèmes rayonnants - ou capables de rayonner - peut se schématiser par une égalité symbolique

$$(1) \qquad (a, b) = (b, a)$$

entre deux expressions déduites l'une de l'autre par permutation des indices a et b affectés à chaque système. Selon la terminologie proposée par V.H. RUMSEY, l'expression (a, b) sera la *réaction* du système (a) sur le système (b). Tout aussi bien on appellerait (a,b) *action* de (b) sur (a), sans même préjuger de l'existence de la relation (1). Enfin, lorsque la réciprocité (1) est acquise, on pourra se contenter de parler d'une *interaction* (a) $\leftrightarrow$ (b).

Un premier exemple de relation du type (1) est la relation de symétrie entre point d'émission et point d'observation qui existe, sous des conditions très larges, chez les fonctions de Green du régime sinusoïdal permanent. Elle peut s'écrire

$$(2) \qquad G(P_a, P_b) = G(P_b, P_a)$$

et se ramène au type (1) en considérant que chaque système est réduit cette fois à sa plus simple expression : une source ponctuelle



située soit en P_a soit en P_b . Or une fonction de Green $G(P, P')$ s'interprète comme le champ envoyé au point d'observation P par une source ponctuelle située en P' . On sera donc tenté de regarder (2) comme une relation d'invariance par échange mutuel d'un émetteur et d'un récepteur. En fait il semble plus indiqué de considérer qu'en chaque point P_a et P_b se trouve un traducteur ambivalent capable de fonctionner aussi bien comme émetteur que comme récepteur.

Un autre exemple simple, dû encore à Green, concerne deux systèmes de charges électrostatiques. Si les densités élémentaires de charges sont dq_a et dq_b et les champs résultants E_a et E_b respectivement, on aura

$$(3) \quad \int E_a dq_b = \int E_b dq_a$$

en étendant les intégrales à l'ensemble des charges qui composent chaque système. Ici la symétrie est totale du point de vue du mode d'action physique : la relation (3) exprime le principe newtonien de l'égalité de l'action et de la réaction, de sorte qu'il n'y a plus aucune raison de considérer un seul des systèmes comme actif et l'autre comme purement passif. Par contre il peut être commode de faire de l'un des systèmes un simple corps d'épreuve destiné à jauger l'autre système, ce qui nous amène à une dualité entre système testé et système de contrôle.

On connaît de nombreux autres exemples de relations de réciprocité du type (2) ou (3). Mais on en connaît peu qui s'appliquent aux régimes transitoires. D'autre part leurs conditions de validité n'ont pas toujours été clairement fixées. Notre objectif, d'ailleurs pas encore complètement atteint, était surtout d'élargir le choix des relations de réciprocité disponibles en acoustique. Pour ce faire, nous nous sommes inspiré, par analogie, des recherches effectuées depuis une vingtaine d'années par V.H. RUMSEY à propos des équations de Maxwell et de la réaction entre deux systèmes de sources électromagnétiques.



SUR LES RELATIONS DE RECIPROCITE EN ACOUSTIQUE.

par Maurice JESSEL

II.- RECIPROCITE DES POTENTIELS -

=====

Considérons deux distributions de sources acoustiques f_a et f_b de supports Ω_a et Ω_b . Les potentiels des vitesses qui en résultent, ϕ_a et ϕ_b , sont solution de l'équation des ondes

$$(4) \quad \frac{1}{c^2} \partial_{tt} \phi_a - \Delta \phi_a = f_a$$

b b b

affectée de l'indice convenable.

Nous multiplions l'équation en a par ϕ_b et l'équation en b par ϕ_a . Puis nous retranchons et intégrons sur un domaine D. Si nous posons respectivement

$$(5) \quad I_1 \equiv \int_D f_a \phi_b - f_b \phi_a$$

$$(6) \quad I_2 \equiv \frac{1}{c^2} \int_D \phi_b \partial_{tt} \phi_a - \phi_a \partial_{tt} \phi_b$$

$$(7) \quad I_3 \equiv \int_D \phi_a \Delta \phi_b - \phi_b \Delta \phi_a$$

nous obtiendrons :

$$(8) \quad I_1 = I_2 + I_3$$

D'autre part nous appellerons action du système (b) sur le système (a) ou- suivant Rumsey - réaction du système (a) sur le système (b), l'intégrale

$$(9) \quad \int_{\Omega_a} f_a \phi_b \equiv (a, b)$$



SUR LES RELATIONS DE RECIPROCITE EN ACOUSTIQUE.

par Maurice JESSEL

Dans cette écriture nous nous écartons légèrement de Rumsey qui notait successivement $\langle a, b \rangle$, $\langle ab \rangle$ et $a \cdot R b$, se référant avec raison, dans cette dernière notation, au produit scalaire de deux fonctions.

Hypothèse 1 : Le domaine D englobe les supports Ω_a et Ω_b des deux systèmes de sources. Il en résulte que :

$$(10) \quad I_1 = (a, b) - (b, a)$$

Conséquence : Il faut, pour que nous ayons réciprocité, que la somme $I_2 + I_3$ soit nulle.

- Conditions de nullité de I_3 -

En I_3 nous reconnaissons une intégrale de volume qui se laisse transformer, par la formule de Green, en l'intégrale de surface

$$(7') \quad I_3 = I_3' = \int_S N \cdot (\phi_b \text{ grad } \phi_a - \phi_a \text{ grad } \phi_b)$$

où N est le vecteur unitaire normal intérieurement sur la surface S qui limite le domaine D .

Cette intégrale est nulle sur toute surface ou morceau de surface sur laquelle sera satisfaite l'une des conditions aux limites suivantes :

$$a) \quad \phi = 0 \quad (\text{Condition de Dirichlet})$$

$$(11) \quad b) \quad N \cdot \text{grad } \phi = 0 \quad (\quad " \quad \text{de Neumann})$$

$$c) \quad N \cdot \text{grad } \phi = \text{Cste} \times \phi \quad (\quad " \quad \text{mixte})$$



SUR LES RELATIONS DE RECIPROCITE EN ACOUSTIQUE.
par Maurice JESSEL

Elle est également nulle sur la sphère de l'infini S_∞ à condition de regarder les supports Ω_a et Ω_b des deux systèmes de sources comme des compacts situés à distances finies.

- Conditions de nullité de I_2 -

L'intégrale I_2 peut se mettre sous la forme

$$(6') \quad I_2 = \frac{1}{c^2} \int_D \partial_t (\phi_b \partial_t \phi_a - \phi_a \partial_t \phi_b)$$

On en aperçoit facilement plusieurs cas de nullité :

α) en son pur permanent, si $\omega_a = \omega_b$ c'est-à-dire si les 2 systèmes opèrent à la même fréquence.

β) en son complexe permanent, si les fréquences émises par (a) et par (b) sont les mêmes et si les amplitudes A et B pour chaque fréquence sont proportionnelles :

$$(12) \quad A(\omega_i) / B(\omega_i) = \dots = A(\omega_1) / B(\omega_1) = \dots = \text{Cste}$$

conditions qu'on peut résumer en disant que le spectre de (a) et le spectre de (b) doivent être semblables.

γ) en régime quelconque, si en tout point du domaine D on a

$$(13) \quad \phi_a(t) / \phi_b(t) = \text{Cste}$$

cette constante pouvant du reste varier d'un point à un autre.

Mais en fait il n'est peut-être pas indispensable de rechercher les cas de nullité séparément pour I_2 et I_3 puisqu'il suffit, pour qu'il y ait réciprocité, que la somme de ces deux intégrales soit nulle. Or

$$(14) \quad I_2 + I_3 = \int_D \phi_b \square \phi_a - \phi_a \square \phi_b$$



SUR LES RELATIONS DE RECIPROCITE EN ACOUSTIQUE.

par Maurice JESSIL

Hormis le cas des régimes sinusoïdaux il pourrait être intéressant d'opérer dans l'espace-temps, en intégrant dans un domaine D à 4 dimensions. Une intégration par parties ramène (14) à une intégrale analogue à (7') mais où N est un quadrivecteur et S une hypersurface. Par voie de conséquence la notion de réaction serait étendue aux supports spatio-temporels des systèmes (a) et (b), ce qui peut être intéressant lorsqu'on voudra étudier la réciprocité dans les systèmes émettant des signaux de durée finie.

Hypothèse 2 : On peut se demander ce qu'il adviendrait si le domaine d'intégration D n'englobait pas le support de l'un des systèmes. En effet il n'est nullement obligatoire de prendre D identique à l'espace Ω siège du phénomène acoustique, comme il était naturel dans l'hypothèse 1.

Supposons par exemple que Ω_b soit en dehors de D .

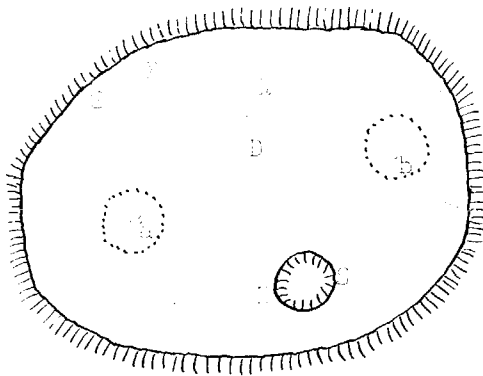
Alors

$$I_1 = (a, b)$$

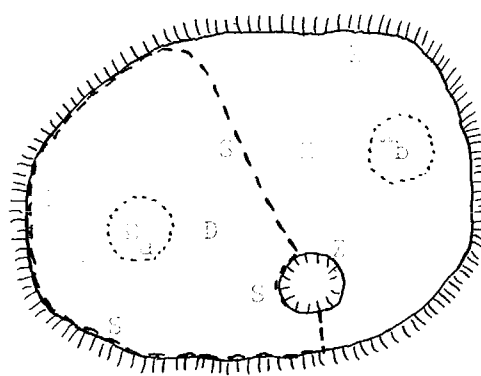
et $I_2 + I_3$ ne peut plus être nul.

En son pur, où I_3 disparaît, il reste alors

$$(15) \quad (a, b) = I_1 = \int_S N \cdot (\phi_b \text{ grad } \phi_a - \phi_a \text{ grad } \phi_b) \quad .$$



$D = \Omega$
 $S = \partial \Omega$



$D \neq \Omega$
 $\Omega \text{ (---)} \neq \Omega \text{ (—)}$



SUR LES RELATIONS DE RECIPROCITE EN ACOUSTIQUE.

par Maurice JESSEL

Ce transfert de la réaction à une surface S passant entre Ω_a et Ω_b a servi à V.H. Rumsey de base pour une nouvelle théorie du principe de Huygens. En laissant de côté, hors du domaine D , les sources du système (b), ces dernières ne sont pas devenues inopérantes pour autant : leur effet a été transféré à des sources équivalentes situées sur S et figurant dans l'intégrale I_3 .

III.- RECIPROCITE POUR LE CHAMP ACOUSTIQUE -

Rumsey a écrit des relations analogues à (15) pour les composantes E et H du champ électromagnétique, en traitant les équations de Maxwell comme l'équation des ondes au début de la section II. Nous pouvons faire de même avec le champ acoustique considéré comme composé d'un scalaire p (pression acoustique) ou θ (dilatation) accompagné d'un vecteur V (vitesse vibratoire).

Les équations du premier ordre, analogues aux équations de Maxwell, sont, pour la dilatation θ et la vitesse vibratoire V :

$$\begin{aligned} \partial_t \theta - \operatorname{div} V &= f \\ \partial_t V - c^2 \operatorname{grad} \theta &= F \end{aligned} \quad (16)$$

Aux seconds membres figurent des distributions scalaires f de sources simples (sphères pulsantes) et des distributions vectorielles F équivalentes à des dipôles ou sphères vibrantes. On les écrit successivement pour les systèmes (a) et (b), puis on forme la combinaison :

$$c^2 f_a \theta_b - F_a \cdot V_b$$

et la combinaison symétrique. On intègre dans le domaine D et on



38/10

SUR LES RELATIONS DE RECIPROCITE EN ACOUSTIQUE.

par Maurice JESSEL

retrouve la relation

$$(8) \quad I_1 = I_2 + I_3$$

en posant :

$$(17) \quad I_1 = \int_D (c^2 f_a \theta_b - F_a \cdot V_b) - (c^2 f_b \theta_a - F_b \cdot V_a)$$

$$(18) \quad I_2 = \int_D (c^2 \theta_b \partial_t \theta_a - V_b \cdot \partial_t V_a) - (c^2 \theta_a \partial_t \theta_b - V_a \cdot \partial_t V_b)$$

$$(19) \quad I_3 = c^2 \int_D (\theta_a \operatorname{div} V_b + V_b \cdot \operatorname{grad} \theta_a) - (\theta_b \operatorname{div} V_a + V_a \cdot \operatorname{grad} \theta_b) \\ = c^2 \int_S N \cdot (\theta_a V_b - \theta_b V_a)$$

Toujours en suivant Rumsey, on appellera réaction de (a) sur (b) l'expression

$$(20) \quad ((a, b)) = \int_{\Omega_a} c^2 f_a \theta_b - F_a \cdot V_b$$

de sorte que si D englobe Ω_a et Ω_b on aura :

$$(21) \quad I_1 = ((a, b)) - ((b, a)).$$

Sous des conditions analogues à celles de la section II, on aura $I_2 = 0$ et $I_3 = 0$ pour assurer la réciprocité :

$$(22) \quad ((a, b)) = ((b, a)).$$



SUR LES RELATIONS DE RECIPROCITE EN ACOUSTIQUE.

par Maurice JESSEL

D'autre part si D n'englobe pas Ω_b , c'est-à-dire si S passe entre Ω_a et Ω_b on aura

$$(23) \quad ((a, b)) = c^2 \int_S N \cdot (\theta_a v_b - \theta_b v_a)$$

On peut assimiler le second membre à une réaction $((b', a))$ en posant, pour les sources du système (b') :

$$(24) \quad \begin{aligned} f_{b'} &= N \cdot v_b \\ F_{b'} &= c^2 N \theta_b \end{aligned}$$

Le système (b') , supporté par la surface S , est équivalent au système b à l'intérieur du domaine D .

IV.- CONSEQUENCES DES RELATIONS DE RECIPROCITE -

=====

Nous reprenons ici la notation avec parenthèse simple sans faire de différence entre les définitions (8) et (20) de la réaction.

1°) Systèmes à interaction nulle.

L'équation $(a, b) = 0$ est une relation d'équivalence entre deux systèmes (a) et (b) . Nous en avons un exemple à la fin de la section III où l'on montre facilement que $(b, b') = 0$. Si deux systèmes (b) et (b') sont équivalents, ils ont même action sur tout autre système extérieur (a) :

$$(25) \quad (a, b) = (a, b') \quad .$$

En fait deux systèmes équivalents sont indiscernables sauf pour un observateur qui leur est incorporé.



SUR LES RELATIONS DE RECIPROCITE EN ACOUSTIQUE.

par Maurice JESSEL

2°) Systèmes ponctuels.

En son pur, en réduisant chaque support à un point, on retrouve facilement, des relations du type (2).

Soient :

$$(26) \quad \begin{aligned} F_a &= \vec{\alpha}_a \delta(P - P_a) & F_b &= \vec{\alpha}_b \delta(P - P_b) \\ f_a &= \beta_a \delta(P - P_a) & f_b &= \beta_b \delta(P - P_b) \end{aligned}$$

On en déduit, entre systèmes ponctuels complexes, la relation :

$$(27) \quad \vec{\alpha}_a \cdot \vec{V}_b(P_a) - c^2 \beta_a \theta_2(P_a) = \vec{\alpha}_b \cdot \vec{V}_b(P_b) - c^2 \beta_b \theta_a(P_b)$$

avec comme cas particulier la réciprocité (2) de la fonction de Green.

En régime quelconque les choses se compliquent du fait de l'irréversibilité du temps. Il faut alors se souvenir que l'équation des ondes admet aussi comme solution des potentiels avancés G^+ . En les utilisant nous retrouvons la symétrie :

$$(28) \quad G^-(P_b, t_b; P_a, t_a) = G^+(P_a, t_a; P_b, t_b)$$

étant donné que $t_b > t_a$ et que l'indice - rappelle qu'il s'agit des potentiels retardés habituels.

Entre ces derniers on a :

$$(29) \quad G^-(P_b, t_b; P_a, t_a) = G^-(P_a, -t_a; P_b, -t_b)$$

ou encore, plus simplement

$$(29') \quad G^-(P_b, t_b; P_a, t_a) = G^-(P_a, t_b; P_b, t_a)$$

En fait, au lieu de considérer que

$$G(P, t; P', t') = 0 \text{ dès que } t < t'$$



SUR LES RELATIONS DE RECIPROCITE EN ACOUSTIQUE.

par Maurice JESSEL

il serait peut-être plus indiqué de prendre, ici aussi,

$$\begin{aligned} G(P, t ; P', t') &= G^+ && \text{si } t < t' \\ \text{et} &= G^- && \text{si } t > t' \end{aligned}$$

en convenant qu'au lieu du champ reçu en P à l'instant t en provenance de la source P' émettant à l'instant t' la fonction G ci-dessus peut aussi signifier le champ émis en P à l'instant t et qui atteindra à l'instant t' le capteur situé en P'.

V.- CONCLUSION -

=====

La notion de réaction permet de relier commodément différents aspects de la réciprocité. Mais sa présentation actuelle ne semble pas en épuiser toutes les possibilités. D'importantes extensions semblent encore à prévoir, par exemple en ce qui concerne la notion voisine de *tension de radiation*, ou plus généralement la théorie de la mesure en physique mathématique classique.

BIBLIOGRAPHIE -

=====

- V.H. RUMSEY, "Reaction Concept in Electromagnetic Theory", Phys. Rev. 94 (1954) n° 6, 1483-91.
- V.H. RUMSEY, "A short way of solving advanced problems in Electromagnetic Fields and other linear systems", I.E.E.E. Trans. on Antennas and Propagation, AP - 11, (1963) n° 1, 73 - 86.
- J.W. STRUTT, Baron RAYLEIGH, The theory of Sound, Dover Publ., New-York, 1945, Vol. I, pp 93 et 98 ; Vol. II, p 145.
- P.M. MORSE & H. FESHBACH, Methods of Theoretical Physics, Mc Graw Hill, New York, 1953, pp 834, 858, 883, 1769.
- M. JESSEL, Cours d'Acoustique Générale, Chap. IV, C.R.P. du C.N.R.S. Marseille (9ème).
