

DEUXIÈME COLLOQUE
SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL
ET SES APPLICATIONS
NICE - 5 AU 10 MAI 1969

37/1

SOLUTION NOUVELLE AU PROBLEME DE DECONVOLUTION
EN PRESENCE DE BRUIT

Yvon BIRAUD

Infrarouge Spatial
Observatoire de Neudon

RESUME

La déconvolution proposée part des hypothèses suivantes :

- Grandeur à mesurer D supposée positive.
- A la réponse percussive de l'instrument notée A, correspond une bande passante à support borné ou quasi-borné.
- Si la grandeur mesurée est I la relation Grandeur/Mesure est une convolution : $I = A * D$.

L'hypothèse D positive, même avec un rapport S/b faible, permet de trouver une restitution très fidèle de D avec un "pouvoir de résolution" très supérieur à celui de l'instrument.

SUMMARY

The restoration process described suppose that :

- the signal to be measured D is positive.
- the impulse response A is band-limited.
- if I is the measurement, the relation between I and D is a convolution $I = A * D$.

The non-negativity of D, even if the signal to noise ratio is low, allows us to find a restoration which approaches well D with a resolution very much larger than the experimental one.



I. GENERALITES

Dans tous les domaines de la Physique un problème constant est celui de l'amélioration de la qualité des mesures . Celle-ci est toujours dégradée par les imperfections technologiques des instruments utilisés d'une part et d'autre part et plus fondamentalement par la présence inévitable de bruit. Ne nous donnant comme point de départ que le résultat expérimental de la mesure nous nous sommes appliqués à essayer de retrouver une image plus exacte de ce qu'était réellement la grandeur étudiée .

Nous nous sommes placés dans le cas très fréquent où la quantité mesurée est liée à la grandeur observée par une relation de convolution . Nous avons montré que dans le cas où l'on sait que la grandeur mesurée est positive l'on peut améliorer dans une large mesure l'image fournie par l'instrument même si elle est très entachée de bruit.

Nous appelons déconvolution en présence de bruit toute méthode capable , l'équation de convolution :

Grandeur mesurée = Grandeur réelle * Fonction instrumentale

étant donnée , de restituer la grandeur réelle alors que grandeur mesurée et fonction instrumentale sont entachées de bruit . Le vocabulaire employé emprunte beaucoup à l'Optique et à la Spectroscopie . En effet dans ces deux branches l'imagerie se traduit par de telles relations de convolution et c'est pour résoudre les problèmes posés dans ces deux branches ainsi qu'en Radioastronomie que nous avons élaboré le processus présenté ici

([1] . BIRAUD Y 1969)

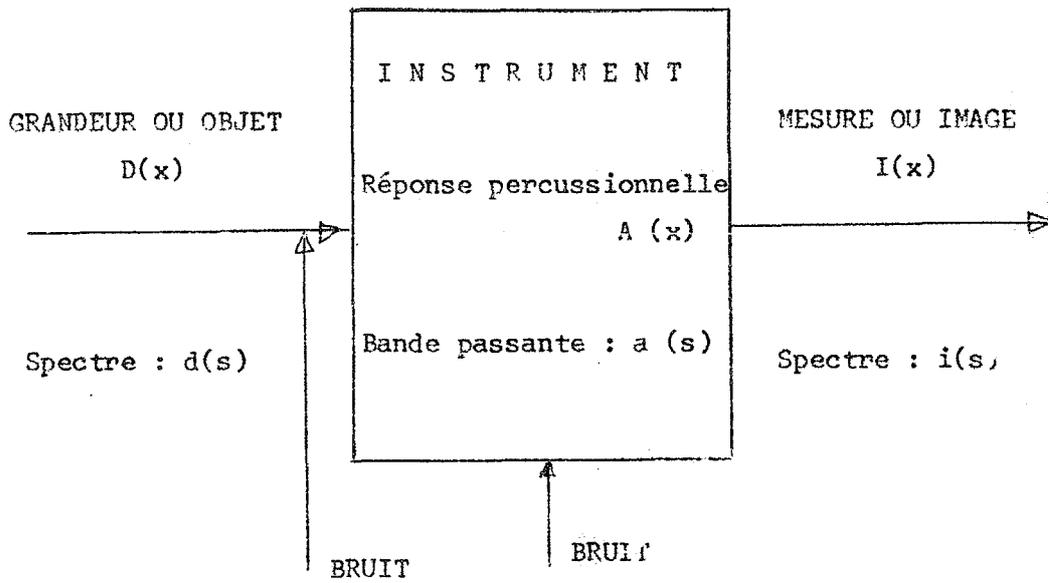


Fig. 1 : La dégradation de la mesure par l'instrument et le bruit.

Relation objet/image
ou grandeur/mesure : $I(x) = A(x) * D(x)$

Filtrage du spectre de
l'objet par la bande
passante instrumentale : $i(s) = a(s) . d(s)$

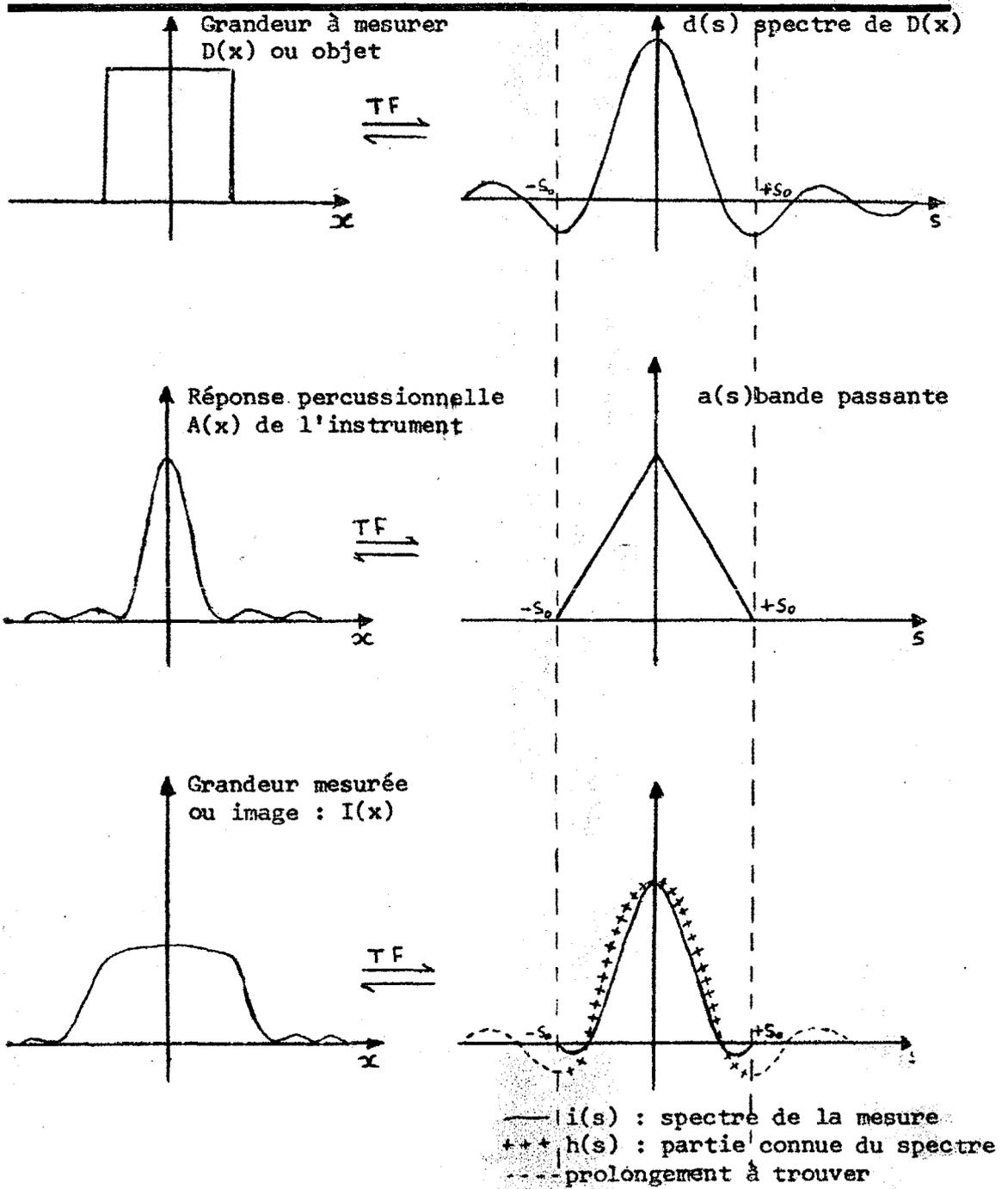


Fig. 2 : Relation objet/image

$$I(x) = D(x) * D(x)$$

$$i(s) = a(s) \cdot d(s)$$



II . DIFFERENTES METHODES DE DECONVOLUTION

Toute méthode de déconvolution ou restitution n'est efficace que si l'on connaît un certain nombre de propriétés de l'objet . Dans le cas contraire l'image doit être considérée comme la meilleure représentation actuelle de l'objet . D'ailleurs il est impossible de traiter celle-ci pour la rendre plus vraisemblable ce terme perdant toute signification car il nécessite pour sa définition une connaissance au moins partielle de l'objet .

Le problème fondamental qui se pose au départ de toute tentative de déconvolution est d'élaborer un processus de calcul numérique permettant d'injecter la connaissance a priori de l'objet dans la restitution . Cette traduction mathématique est souvent très difficile.

Elle ne doit pas être brutale . En effet la propriété dont on essaie de rendre compte est , le plus souvent , une connaissance locale de l'objet que le processus que l'on élabore rendra au mieux mais le plus souvent au détriment d'autres caractéristiques de celui-ci. C'est ce qui se passe fréquemment dans la technique dite de model-fitting qui présente de plus l'inconvénient de ne pouvoir mettre en évidence que des propriétés déjà connues . On échoue ainsi à faire apparaître des caractéristiques de l'objet qui existent réellement dans l'image mais si bien dissimulées qu'elles en ont , semble-t-il , disparu et que , bien évidemment on ne cherchera pas à mettre en lumière puisqu'on ne les a même pas pressenties. (Voir fig.6 et 6bis).



Dans certains cas , si l'on s'intéresse exclusivement à une caractéristique spéciale de l'objet et si l'on accepte une perte de qualité par ailleurs on peut obtenir une amélioration très sensible de l'image dans le sens choisi. C'est le cas dans la technique d'apodisation ([2] Arsac 1961, [3] Jacquinet P. , Boughon P et Dossier B. 1949) de détramage ou plus généralement du filtrage des fréquences spatiales ([4] Maréchal A. et Françon M. 1960) très utilisés pour l'amélioration des clichés photographiques .

Dans d'autres cas que nous allons examiner la traduction mathématique est difficile car elle met en jeu des processus instables (inversion de matrices quasi dégénérées par exemple) ou qui divergent très vite et nécessitent le plus souvent une approche polynomiale du problème . Ce qui est sans réalité physique et s'avère décevant en pratique .

Une critère souvent utilisé est le fait que la grandeur mesurée $D(x)$ est définie sur un support borné . Ceci se traduit par le fait que sa transformée de Fourier $d(\lambda)$ est une fonction analytique . Cette propriété permet de montrer que la connaissance de $d(\lambda)$ sur un support borné suffit à la connaître partout . C'est ainsi que de très nombreux processus de continuation analytique ont été essayés ([5] CASPER W. BARNES . 1966 ; [6] SCHEIDECKER J.P 1968 ; [7] R.A. WILLIAMS and W .S. C. CHANG 1966 ; etc...) . Mais toutes les techniques proposées sont très difficiles à mettre en oeuvre. Les résultats présentés sont , le plus souvent,



des déconvolutions de modèles en l'absence de bruit .
En effet il s'avère ([8] Robert H Mac Phie 1962 ;
[9] Ville 1956 ; [10] H. WOLTER 1964) que les
procédés s'appuyant sur l'analyticité sont excessivement
sensibles au bruit et aussi au fait qu'on doit , sur
ordinateur , limiter à un nombre fini de termes les
sommes infinies . Une autre utilisation de ce critère ,
mais sous une autre forme peut être faite en extrapolant
par la formule de SHANNON mais les résultats ([11] .
J. L. HARRIS) sont aussi donnés dans le cas de modèles
non bruités et la limitation par dégradation du rapport
S/b n'est pas précisée.



III . PRINCIPE DE LA NOUVELLE METHODE PROPOSEE

C'est en nous demandant si d'autres critères ne pouvaient être efficaces que nous avons pensé à utiliser le fait que la grandeur mesurée est , dans beaucoup de cas , positive car ayant les dimensions d'une énergie.

Précisons tout d'abord notations et hypothèses de travail.

- Toute les fonctions envisagées ici sont des fonctions complexes d'une variable réelle.
- Les fonctions représentant la grandeur à mesurer ou objet, ou le résultat de la mesure ou image seront des fonctions d'une variable x notées en majuscules . x est selon les cas homogène à un temps , une longueur ou n'a pas de dimension.
- Les transformées de Fourier (T.F.) de ces fonctions que nous appelons aussi Spectres seront notées en minuscules et agiront dans l'espace de la variable s qui est selon les cas homogène à une fréquence , à une fréquence spatiale ou n'a pas de dimension . Et nous noterons

$$f(A) = \mathcal{F}(F(x))$$

la transformée de Fourier de $F(x)$)

- Pour la simplification de l'exposé les calculs sont réalisés sur des fonctions agissant sur un espace à une dimension mais sont valables pour



des espaces à 2 dimensions (Optique) ou même à n-dimensions.

Si, dans ces conditions , on pose:

- D (x) : grandeur à mesurer ou objet
- I (x) : résultat de la mesure ou image
- A (x) : réponse percussionnelle de l'instrument qui réalise la mesure ou forme l'image

alors la relation objet / image est (voir fig.1)

$$I(x) = A(x) * D(x) \quad (1)$$

où * note la convolution.

Nous nous plaçons dans le cas où

- D (x) est réelle non négative et de support fini ou infini mais d'énergie finie possédant une T F $d(s)$
- A (x) possède une T F $a(s)$ de support borné ou qui est négligeable au-delà d'une fréquence limite s_0 (cas du filtrage en électronique)

Prenant la T.F. de la relation (1) il vient

$$i(\rho) = a(\rho) \cdot d(\rho) \quad (2)$$

qu'on ne peut transformer en

$$d(\rho) = i(\rho) / a(\rho) \quad (3)$$

que si elle a un sens (voir fig.2).

La relation (2) exprime le filtrage du Spectre $d(s)$ de l'objet par l'instrument dont la bande passante est $a(s)$. Le contenu spectral de D (x) est donc



fortement perturbé et ses hautes fréquences ne sont absolument pas transmises . Le contenu informationnel de $I(x)$ est bien inférieur à celui de $D(x)$. Le but de toute déconvolution est , en définitive , de combler ce déficit.

Du point de vue purement théorique la fréquence S_c de cut-off du filtre instrumental existe réellement dans certains cas . En Optique ou en Radioastronomie pour les instruments d'ouverture faible "la bande passante spatiale" est en effet la fonction d'autocorrelation de la distribution du champ électrique sur la pupille de sortie . Cette distribution étant à support borné il en est de même de son autocorrélée . En électronique par contre il est rare qu'un filtre ait une fréquence de coupure . Ici , comme dans les résultats expérimentaux en Optique et Radioastronomie , $|a(\rho)|$ décroît progressivement et au-delà d'une fréquence s_c est noyé dans les fluctuations de bruit.

La correction des effets instrumentaux qui se traduit par la relation (3) n'est significative que sur la bande $[-\rho_0, +\rho_0]$ où $\rho_0 < \rho_c$. Le seul matériel dont nous disposons est donc :

$$h(\rho) = d(\rho) + b(\rho) \quad \forall |\rho| \leq \rho_0 \quad (4)$$

Comme nous avons supposé $D(x)$ positive nous pouvons l'écrire

$$D(x) = (E(x))^2 \quad (5)$$

donc en prenant la T.F. de (5) nous voyons que son spectre est un carré de convolution :

$$d(\rho) = e(\rho) * e(\rho) = e(\rho)^{*2} \quad (6)$$



Le critère se traduit donc par le fait que l'on va approcher $h(s)$ par un carré de convolution. La non négativité de $D(x)$ semble, a priori, n'apporter que peu d'information. L'hypothèse est d'ailleurs encore moins restrictive : il suffit que $D(x)$ ait un signe constant sur tout son support. Cette condition définit un ensemble de fonctions possédant des propriétés particulières. Par exemple si $D(x)$ positive a un spectre de bande défini sur $[-A_0, A_0]$ alors on montre ([12] BOAS Jr and M. KAC) que

$$|d(t)/d(0)| \leq \cos(\pi/(2 + \{A_0/\rho\}))$$

où $\{t\}$ = Partie entière de t .

La condition (7), condition nécessaire mais non suffisante permet de déterminer la fréquence s_2 jusqu'à laquelle il faut au moins prolonger une fonction $d(s)$ connue seulement sur le support $[-A_1, A_1]$ pour être sûr que sa T.F. soit positive. Nous avons utilisé cette relation dans ce sens pour nos calculs mais, si pour des raisons physiques ou théoriques on a la possibilité de connaître s_0 alors cette inégalité permet d'éliminer tout spectre restitué qui ne la vérifierait pas. Cette relation, enfin, met en évidence l'importance de la valeur $d(0)$ aire de $D(x)$ et qui est donc liée à l'énergie globale de la grandeur mesurée.

L'objet étant inconnu et l'image ayant été déformée la seule quantité qui traduise exactement les propriétés connues de l'objet est la fonction $h(s)$ sur le support $[0, A_0]$. C'est pourquoi la méthode que nous avons mise au point opère dans l'espace des fréquences s . Elle revient à chercher une fonction $g(s)$ autocon-



volée de $f(s)$ qui approche, au sens des moindres carrés, la fonction $h(s)$ sur le support $[0, A_0]$. Ceci assure que la restitution trouvée $G(x) = \mathcal{F}(g(\Delta))$ est positive. Le plus souvent l'approche de $h(s)$ sur son support nous impose de construire une fonction $g(s)$ dont le support $[0, A_1]$ est supérieur à $[0, A_0]$. Nous dirons alors que nous avons réalisé un gain A_1/A_0 en pouvoir séparateur.

Nous comparerons le plus souvent la restitution obtenue à :

- $I(x)$: image donnée par l'instrument.
- $H(x)$: TF de $h(s)$ dite " solution principale " suivant BRACEWELL([12] R.N. BRACEWELL and J.A ROBERTS, 1954)
- $D(x)$: dans le cas où l'on restitue un objet connu et que l'on s'est donné.

Bien qu'elle restitue chaque fréquence spatiale à sa bonne valeur l'un des inconvénients de la solution principale tient au fait qu'elle est détériorée par de fortes oscillations parasites dues au fait que sa TF $h(s)$ présente en s_0 une discontinuité parfois importante. Supposer $h(s)$ nulle au-delà de s_0 n'a d'ailleurs aucun sens physique et est manifestement faux si $D(x)$ est à support borné. Ces oscillations sont très gênantes dans l'interprétation des formes de l'objet. Elle introduisent souvent des "pieds négatifs" qui n'ont aucune signification si l'objet qu'on veut restituer est positif.



IV - REALISATION DU PROCESSUS : LE CALCUL ITERATIF :

Le procédé utilisé est un calcul par itérations réalisé sur ordinateur. Toutes les fonctions traitées sont donc échantillonnées. Partant d'une fonction hermitienne quelconque $f_0(s)$ on construit :

$$g_0(s) = f_0(s)^{*2}$$

Puis à f_0 on additionne la perturbation hermitienne (voir fig. 3)

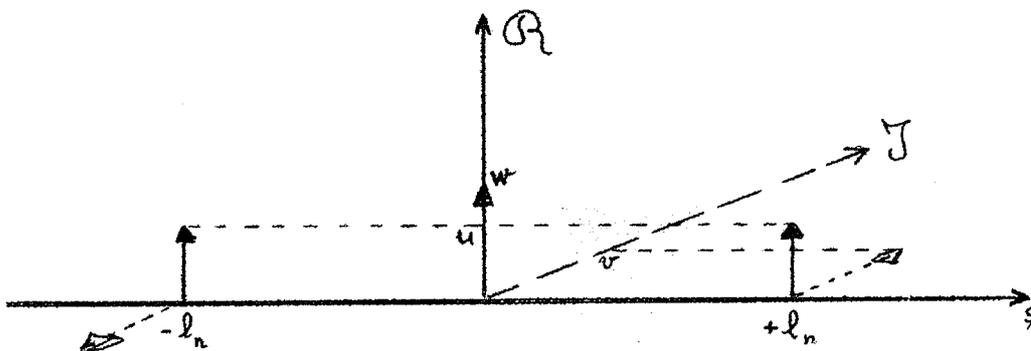


Fig. 3 : La perturbation w_{l_n}

$$w_{l_0}(u, v, w) = w \delta(s) + u (\delta(s+l_0) + \delta(s-l_0)) - jv (\delta(s+l_0) - \delta(s-l_0)) \quad (8)$$

(où $\delta(s)$ est l'impulsion de Dirac)

w_{l_0} ne dépend que de trois paramètres u , v , et w et de l_0 de sorte que la nouvelle fonction $f_1 = f_0 + w_{l_0}$ ne diffère de f_0 qu'à l'origine et aux échantillons d'abscisse $s = \pm l_0$. (l'abscisse l_n étant toujours un multiple entier du pas d'échantillonnage, la perturbation affecte donc toujours f_0 en ces points). Par contre

$$g_1(s) = f_1(s)^{*2} = (f_0(s) + w_{l_0}(s))^{*2}$$



diffère de $g_0(s)$ sur tout son support. On a donc déformé g_0 en tous ses points. Mais quand on calcule

$$M_1 = \frac{1}{A_0} \int_0^{A_0} |h(s) - g_1(s)|^2 ds \quad (9)$$

qui exprime l'écart quadratique entre h et g_1 on obtient une quantité fonction des trois paramètres u , v et w seulement. On peut envisager de pondérer l'intégrale définissant M_1 par $a(s)^2$.

On peut considérer M_1 comme une forme quadratique en u , v , w . On minimise alors M_1 en tenant compte, de plus, de la relation.

$$\langle g_1(s), \delta(s) \rangle = \langle h(s), \delta(s) \rangle \quad (10)$$

(où $\langle f_1, f_2 \rangle$ note le produit scalaire de deux fonctions ou pseudo-fonctions ([13] L. SCHWARTZ, 1965).

La condition (10) est fondamentale et doit être satisfaite afin que l'aire de la restitution cherchée soit identique à celle de la grandeur mesurée.

Quand on a trouvé la perturbation w_{l_0} optimale, on commence la deuxième itération qui permet de déterminer celle w_{l_1} qui, additionnée à $f_1 = f_0 + w_{l_0}$ minimisera la quantité M_2 , etc...

Partant d'une fonction initiale f_0 on conduit le calcul en faisant varier l_n . Le support de f_0 est $[0, A_0/2]$ de telle sorte que $g_0 = f_0^{*2}$ ait le support double soit $[0, A_0]$ qui est celui de h . L'abscisse l_n caractéristique de la perturbation w_{l_n} décrit donc, au début du processus, le segment $[0, A_0/2]$ et l'on compare à chaque étape la quantité M_n (calculée en (9)) à

$$\sigma_m^2 = \frac{1}{A_0} \int_0^{A_0} |b(s)|^2 ds$$



variance des fluctuations de bruit.

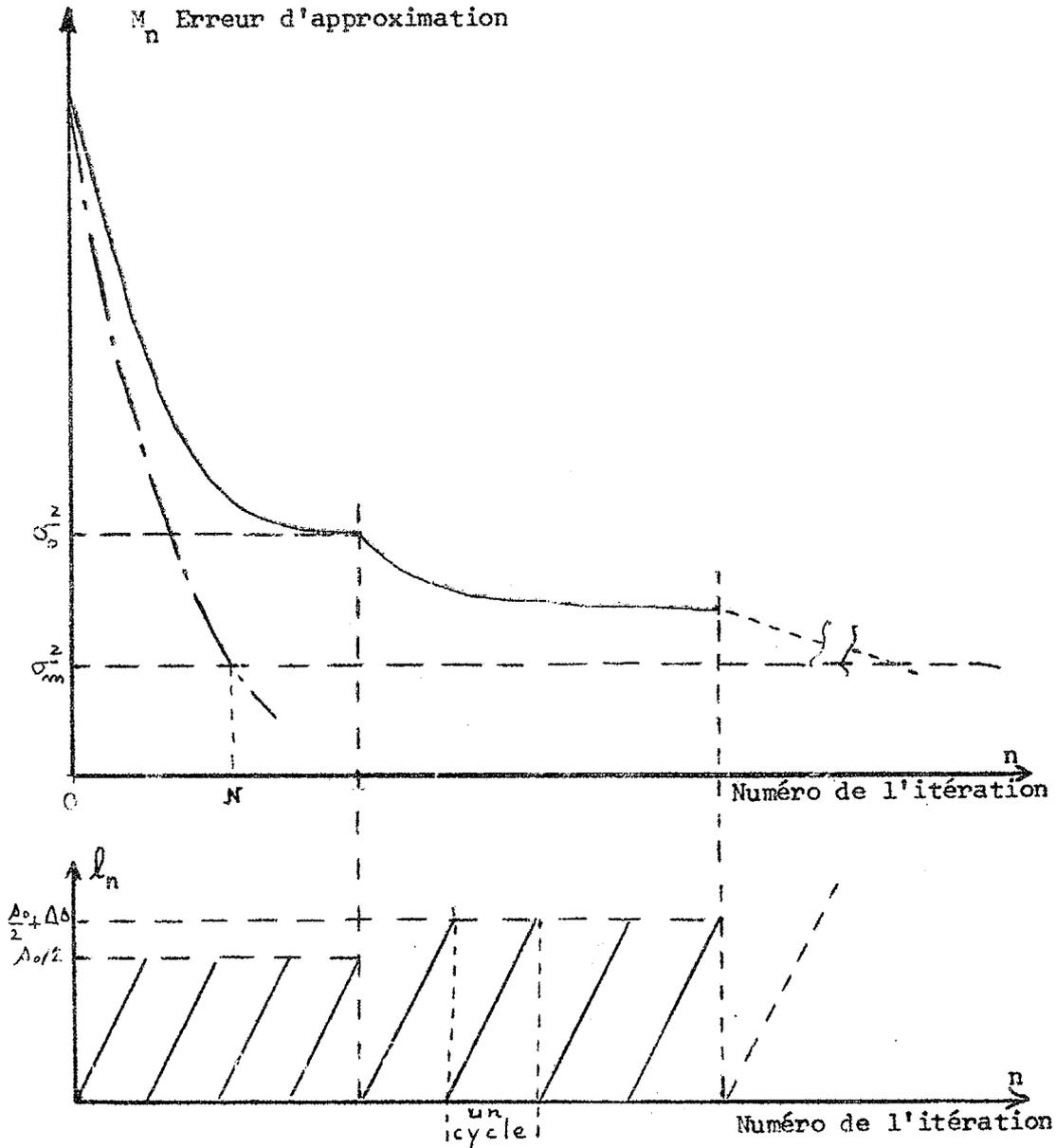


Fig. 4 : Variations de M_n et l_n



Les variations de l_n et les valeurs correspondantes de M_n sont représentées sur la fig. 4. On voit que deux cas peuvent se présenter :

- l_n n'ayant pas cessé de décrire le segment $[0, A_0/2]$ l'erreur d'approximation M_n décroît très vite et atteint en N la valeur σ_m^2 . Alors on peut estimer que la solution g_N trouvée est valable car compatible avec les erreurs expérimentales. Dans ce cas, inintéressant pour nous, et qui se présente quand σ_m est grand nous voyons que les fluctuations de bruit ont interdit d'augmenter le support de $h(s)$. Il n'y a pas eu gain en pouvoir séparateur. Néanmoins $G_N(s)$ sera non-négative.

-Si, par contre, dans les mêmes conditions de variations de l_n l'erreur M_n décroît mais tend asymptotiquement vers $\sigma_0^2 > \sigma_m^2$ alors pour trouver une approximation compatible avec le bruit on doit faire varier l_n sur le segment $[0, A_0/2 + \Delta \rho]$. Pour trouver un carré de convolution approchant $h(s)$ on est donc amené à créer dans g des fréquences qui ne se trouvent pas dans h . On fera varier l_n de la même façon que précédemment, par cycles de 0 à $s_0/2 + k \Delta s$ jusqu'à ce que M_n vaille σ_m^2 . Il suffit alors, pour obtenir la restitution de prendre la T. F. de la fonction g_n à laquelle on s'est arrêté. Le gain en pouvoir séparateur est alors

$$S = \frac{A_0/2 + k \Delta s}{A_0/2} = 1 + 2k \Delta s / s_0$$



V - RESULTATS :

Mais pour que le processus présenté soit valable il faut qu'il soit stable. Nous avons tout d'abord vérifié l'influence de la nature de la fonction de départ f_0 . Elle est quasi nulle. Les différences entre les restitutions obtenues dans les cas où f_0 hermitienne est de la forme créneau, triangle, sinusoïde, exponentielle tronquées sont à peine perceptibles et ceci quelle que soit la nature de la grandeur que l'on cherche à restituer où la manière dont on fait varier l_n .

Ensuite nous nous sommes assurés que la manière dont on fait varier l_n n'importe pas. Là encore les valeurs des Δs et la répartition des indices de fin de cycle influent très peu sur les restitutions trouvées.

Dans tous les cas, de plus, le procédé a fourni des restitutions très satisfaisantes et toujours très voisines de la réalité.

Nous avons tout d'abord essayé la méthode de la manière suivante. Nous donnant l'objet a priori nous en avons pris la T. F. que nous avons volontairement tronquée à une fréquence s_0 . La fig. 5 donne l'exemple de la restitution d'une source formée de deux arches d'une cosinusoïde surélevée. Les figures 6 et 6 bis présentent la restitution de trois créneaux et est un cas typique où une méthode par model-fitting aurait échoué.

Nous avons procédé de même pour des objets connus qu'on a convolés par la réponse percussionnelle de l'instrument. A ce résultat on a ajouté un bruit gaussien blanc. La fig. 7 montre la simulation de la mesure bruitée, la restitution après correction des effets instrumentaux ou solution principale, l'objet et la restitution obtenue par notre procédé.



Enfin, la fig. 8 présente la restitution d'une mesure réelle. C'est la distribution de brillance E.W de la radiosource Cygnus A mesurée à 11 cm de longueur d'onde par le radiotelescope de Nançay. Le lobe d'antenne a été déterminé par des passages de la source ponctuelle 3C 12 3. Le rapport s/b global, très difficile à chiffrer est d'environ 50 et est dû principalement aux incertitudes sur le lobe. Les résultats sont en accord parfait avec les mesures effectuées sur cette source mais à plus haute résolution tant pour l'exactitude des positions que pour les amplitudes relatives des deux composantes ([14] RYLE M., ELSMORE B. and NEVILLE A. C., 1965 ; [15] WADE C. M., 1966).

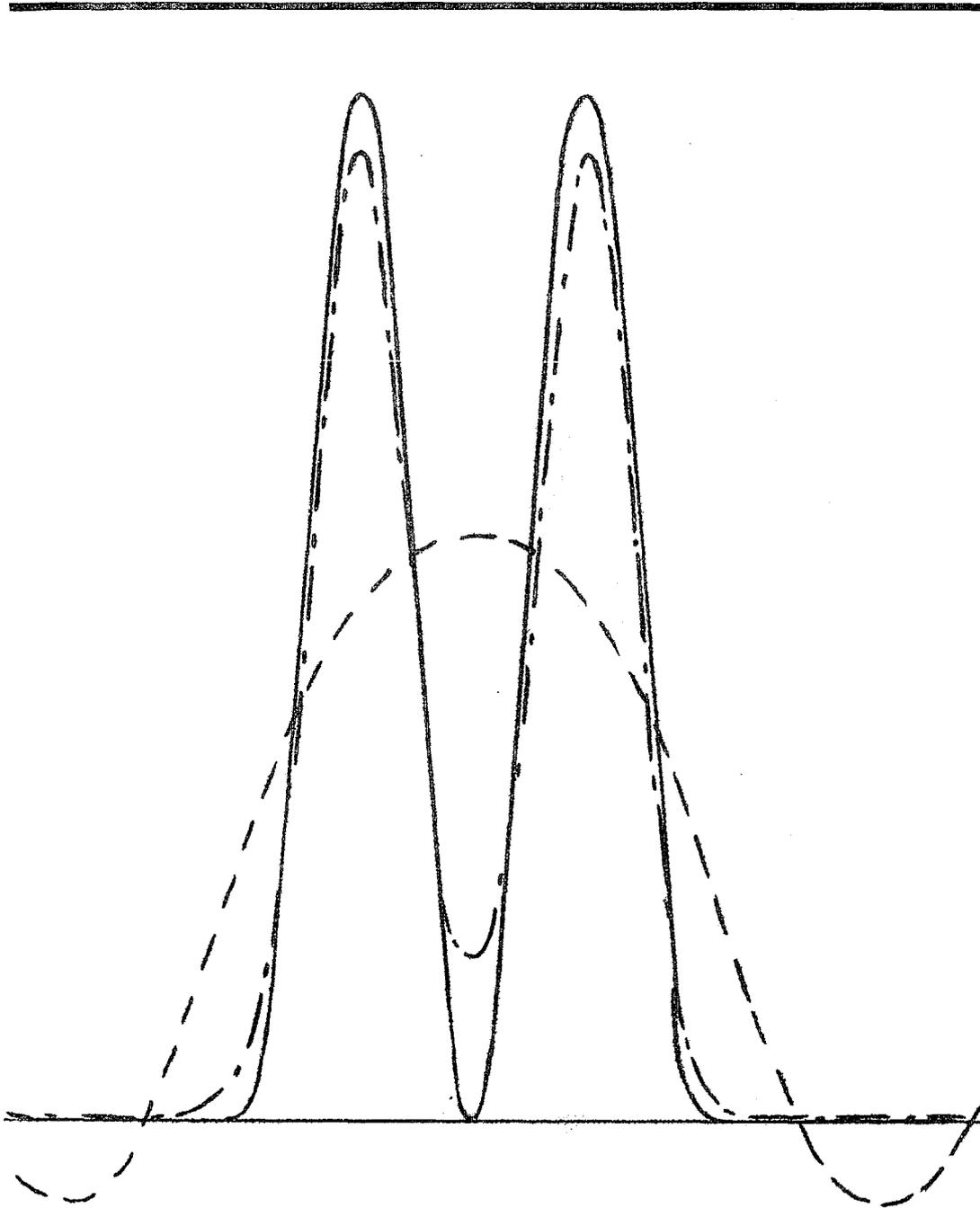


Fig. 5 : Restitution de deux arches de cosinusoïde surélevée

- — la solution principale
- l'objet à restituer
- · - la restitution trouvée

Résolution multipliée par 5.

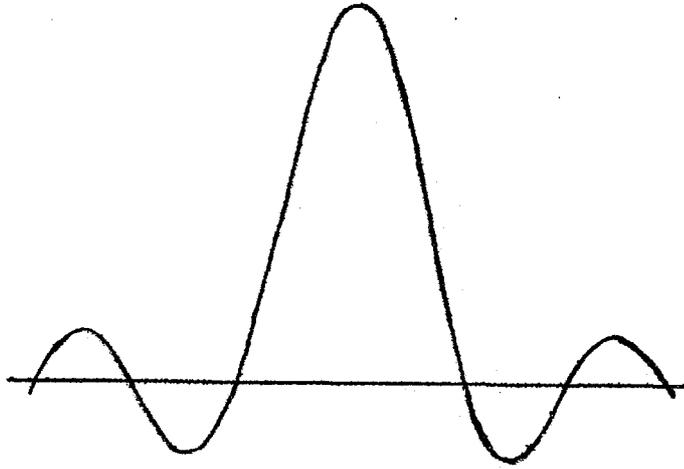


Fig. 6 : Réponse percussive corrigée : T. F. de la fonction

$$f(s) = 1 \quad \forall |s| \leq s_0$$

$$= 0 \quad \forall |s| > s_0$$

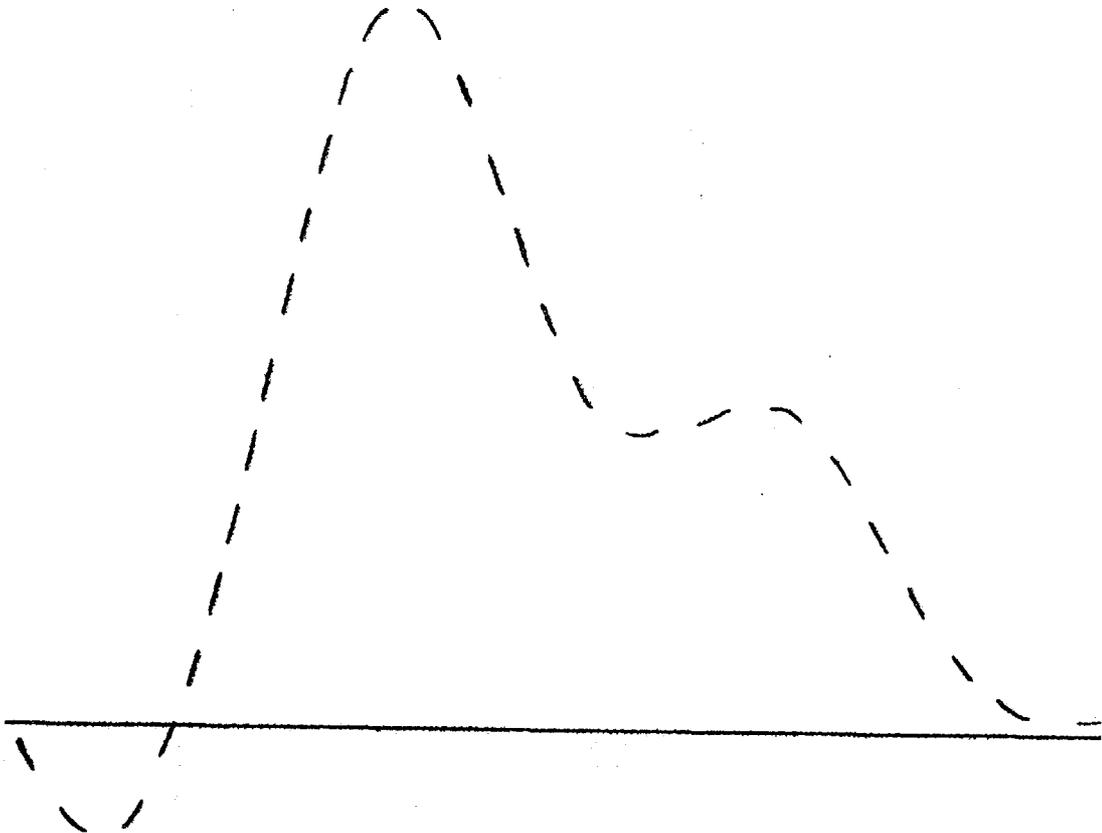


Fig. 6 : La solution principale : c'est la convolution de l'objet par la réponse percussive corrigée. Voir fig. 6 bis.

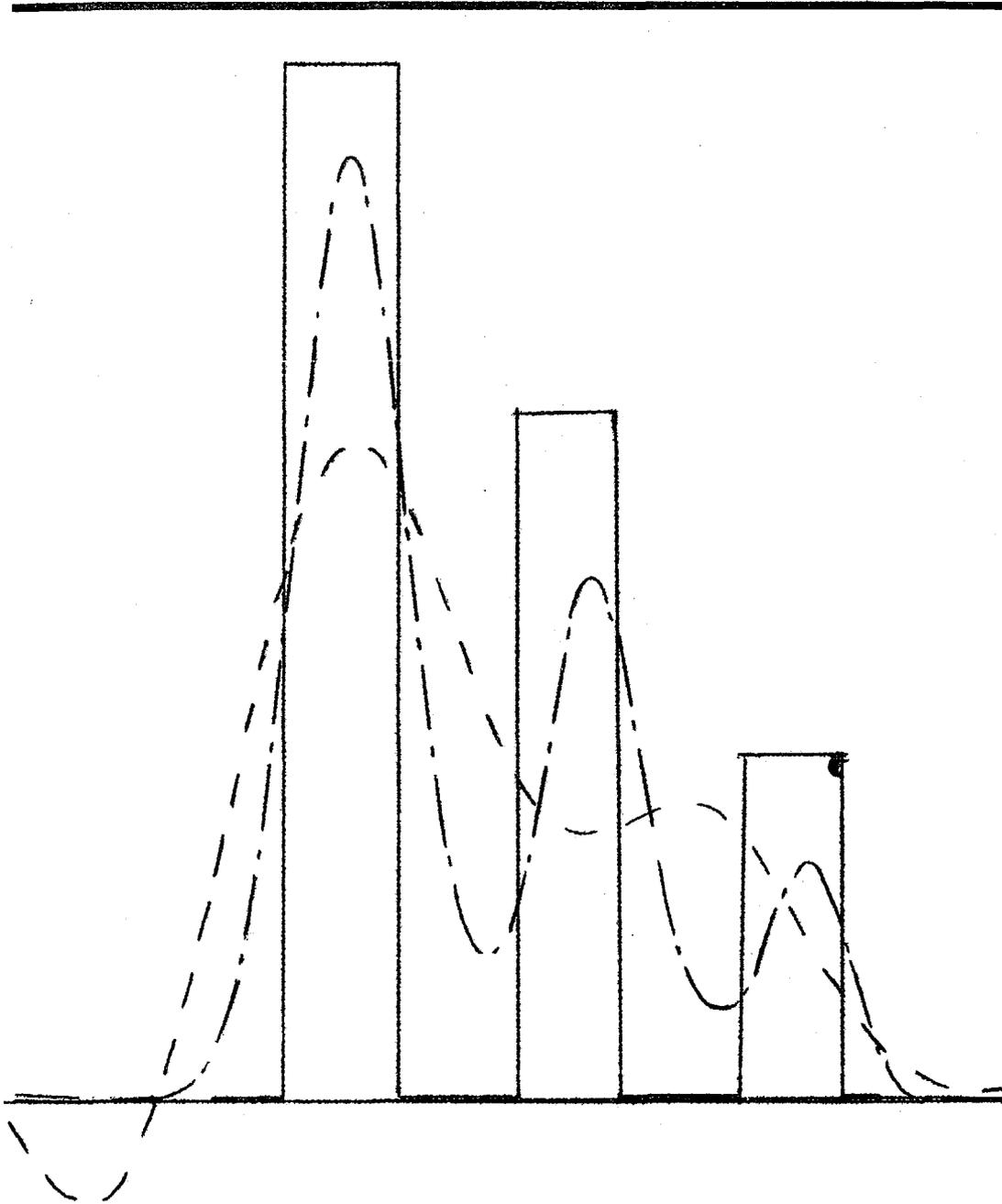
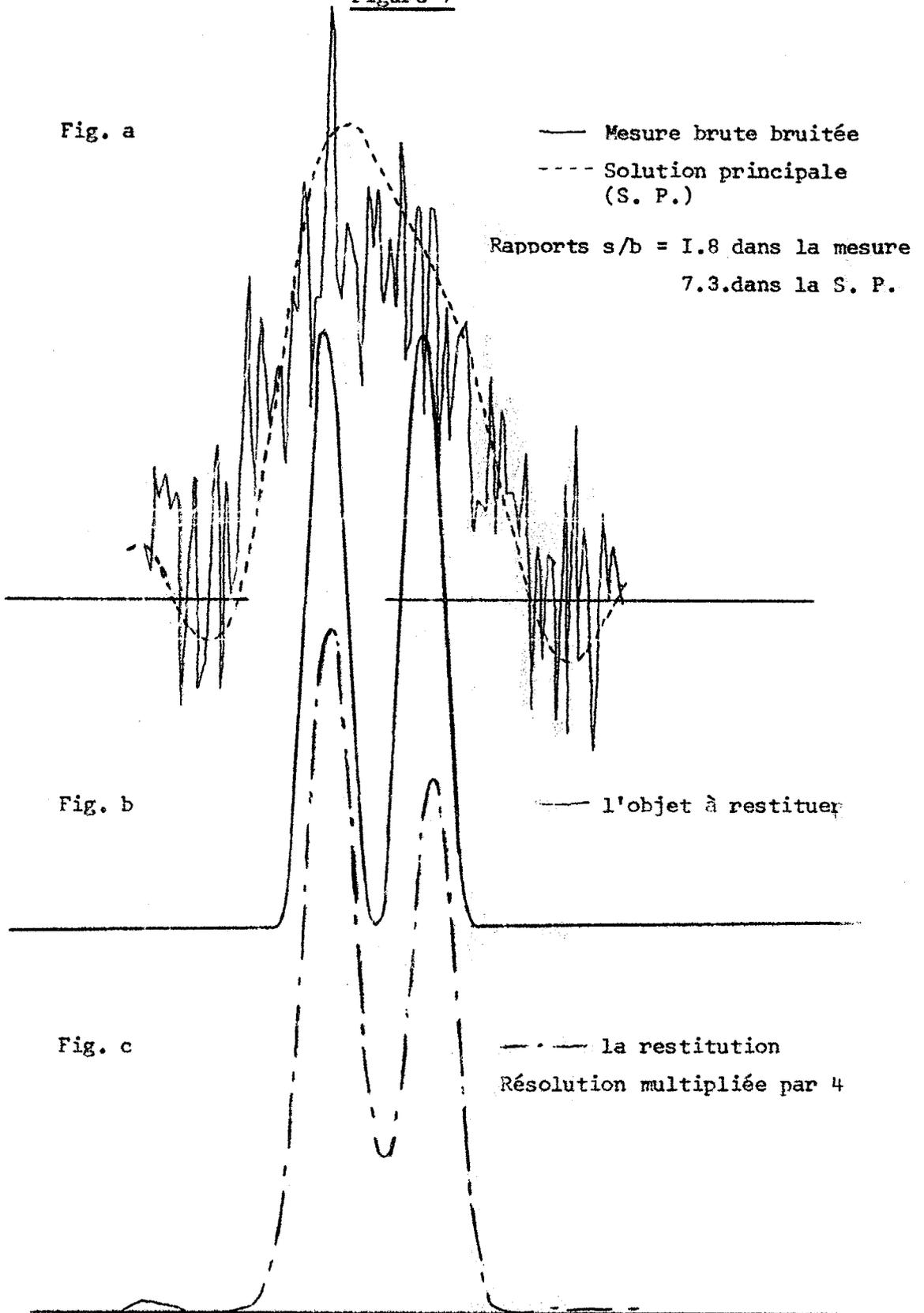


Fig. 6 bis :

- l'objet à restituer : 3 crénaux
- - - la solution principale
- . - la restitution. Résolution multipliée par 3



Figure 7



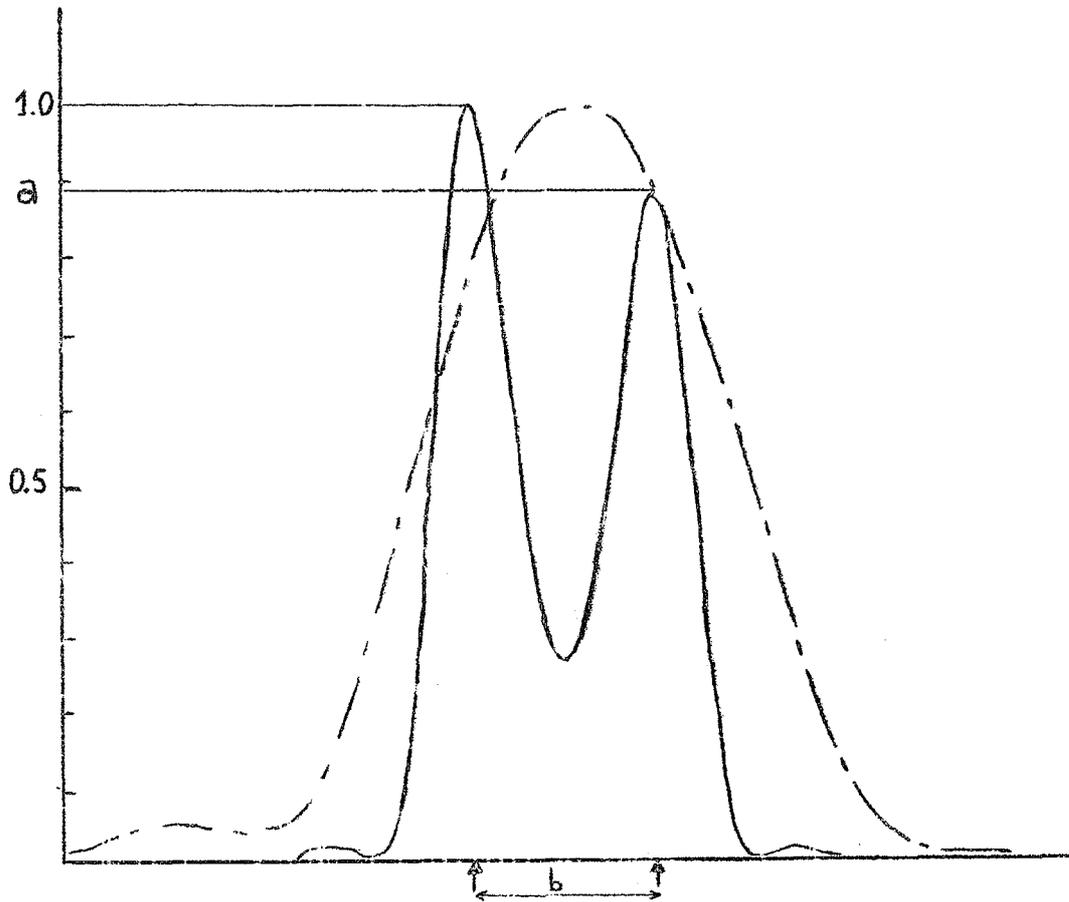


Fig. 8 - La distribution de brillance E.W de la radio-source cygnus A.

— · — La sortie d'appareil brute

— La restitution

a et b sont exacts à 1 % près
Résolution multipliée par 2.75



B I B L I O G R A P H I E

- (1) - BIRAUD Y. A new approach for increasing the resolving power by Data processing. *Astron. & Astrophys.*, 1. 124-127 (1969).
- (2) - ARSAC J. Transformation de Fourier et Théorie des distributions. Dunod, Paris, 1961.
- (3) - JACQUINOT P., BOUGHON P. et DOSSIER B. - La théorie des images optiques. *Revue d'Optique*, p. 183, 1949.
- (4) - MARECHAL A. et FRANCON M. - Diffraction. Structure des images. Ed. de la *Revue d'Optique*, Paris, 1960.
- (5) - CASPER W. BARNES - Object restoration in a diffraction limited imagin system. *JOSA*, Vol. 56, n° 5, May 1966.
- (6) - SCHEIDECKER J. P. - Thèse de Doctorat de 3è Cycle, Paris 1968.
- (7) - WILLIAMS R. A. and CHANG W. S. C. -Resolution and noise in Fourier Transform spectroscopy. *JOSA*, Vol. 56, n° 2, Feb. 1966.
- (8) - ROBERT H. MACPHIE - On increasing the effective aperture of antennas by data processing. Technical Report, n° 58. Electrical Engineering Research Laboratory. University of Illinois. Urbana. Illinois, July 1967.
- (9) - VILLE J. A. Cables et transmissions, 1-44, 1956.
- (10) - WOLTER H. The Problem of analytic continuation of the spectral function $F(\nu)$ in Optics. *Progress in Optics*, Vol. I, 202-210, 1964.



-
- (11) - HARRIS J. L. Diffraction and Resolving Power, JOSA, Vol. 54, n° 7, July 1964.
- (12) - BRACEWELL R. N. and ROBERTS J. A. - Aerial smoothing in Radio-astronomy. Austral. J. of Phys., Vol. 7, 615-640, Dec. 1954.
- (13) - SCHWARTZ L. Méthodes mathématiques pour les sciences physiques. Hermann, Paris, 1965.
- (14) - RYLE M., ELSMORE B. and NEVILLÉ A. C., Nature, 205, 1259, 1965.
- (15) - WADE C. M. Phys. Rev. Letters, 17, 20, 1961, 1966.