



DEUXIÈME COLLOQUE
SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL
ET SES APPLICATIONS
NICE - 5 AU 10 MAI 1969

33/1

PROPRIETES STATISTIQUES MONODIMENSIONNELLES ET
BIDIMENSIONNELLES DES ECHOS DE REVERBERATION.
APPLICATION A LA REVERBERATION DE SURFACE POUR
DEUX TYPES D'EMISSION

J.Y. JOURDAIN

Centre d'Etude des Phénomènes Aléatoires (CEPHAG)
(associé au C.N.R.S.) (*)

RESUME :

Dans une première partie on expose le modèle de FAURE pour la réverbération et on présente quelques résultats qui en découlent sur la fonction de corrélation, la statistique de divers paramètres. On montre ensuite comment on peut étudier les propriétés statistiques de tels bruits et mettre en évidence certaines caractéristiques exposées au début.

ABSTRACT :

In the first part, sea reverberation model of FAURE is outlined. On the basis of this model, some results related to the correlation function and statistics of different parameters are given. Thereafter we describe the methods used to verify some the characteristics mentioned at the beginning of this work.



DEUXIÈME COLLOQUE
SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL
ET SES APPLICATIONS
NICE - 5 AU 10 MAI 1969

33/3

1. INTRODUCTION

L'analyse des bruits revêt une importance de plus en plus grande, soit qu'ils portent une information en eux, soit qu'ils dégradent un message que l'on veut transmettre. Elle se doit d'aller au-delà des mesures de puissance. Les mesures deviennent statistiques et par là d'interprétation quelquefois délicate. La réverbération est un bruit particulier qui n'est pas stationnaire et dont la bande passante est souvent étroite sauf dans le cas où le signal émis est à large bande.

Plusieurs modèles ont été proposés pour la réverbération, celui de Pierre FAURE semble particulièrement adapté au phénomène et a été développé avec succès par V.V. OI'shevskii dans le cas de la réverbération de fond et de volume.

2. MODELE CLASSIQUE DE LA REVERBERATION (1), (2), (3), (4)

2.1 Principe général



Le signal émis rencontre des impuretés et des inhomogénéités du milieu qui renvoient chacune une fraction de l'énergie vers le récepteur. Celui-ci reçoit donc un signal qui est la superposition d'un certain nombre de signaux élémentaires d'amplitude et de phase aléatoires. Si les diffracteurs sont mobiles ou absorbent certaines fréquences on doit faire intervenir en plus des paramètres de déformation aléatoires.

Si le signal $s(t)$ est émis, le bruit de réverbération reçu $R(t)$ est de la forme

$$R(t) = \sum_i a_i \cdot s\left\{ (t - t_i), \Delta \omega_i \right\}$$

$\Delta \omega_i$: paramètre Doppler

On remarque que les signaux élémentaires qui sont parvenus avant le temps t au récepteur et après le temps $t - T$, T étant la durée du signal émis, interviennent dans $R(t)$. Le nombre de ces signaux varie avec la densité en diffracteurs du milieu et au cours du temps avec le "volume occupé" par le signal émis. Cette variation en fonction du temps du nombre d'échos élémentaires provoque une variation de puissance moyenne qui peut être prévue dans certains cas, quand on a une certaine connaissance du milieu et des caractéristiques de l'émission : directivité, position etc...

2.2 Hypothèses généralement faites sur le milieu

- Les diffracteurs sont de faibles dimensions vis à vis de l'espace occupé par le signal transmis et même



pour certains vis à vis de la longueur d'onde.

Pour une émission de 60 ms. et de fréquence 20 kHz le signal occupe 90 m. dans la mer; la longueur d'onde est de 7 cm.

- La densité des diffracteurs est constante dans une unité de volume de sorte qu'à un instant donné t on peut définir un nombre moyen de signaux élémentaires arrivant au récepteur par unité de temps ; soit $\langle n_1(t) \rangle$ cette densité.

- Le nombre n de signaux élémentaires arrivant au récepteur pendant un temps T obéit à une loi de POISSON de paramètre $\langle n_1 \rangle T$

$$P(n) = \frac{(\langle n_1 \rangle T)^n e^{-\langle n_1 \rangle T}}{n!}$$

Ce qui revient à ajouter aux hypothèses précédentes que les diffracteurs sont indépendants en position

Le nombre de diffracteurs dans une région d , contenue dans un espace D où il y a N diffracteurs répartis avec une densité uniforme, suit alors une loi binominale

$$P_N(n) = C_N^n p^n \cdot (1 - p)^{N - n}$$

avec $p = \frac{d}{D}$



Si la densité est constante dans D

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \cdot N = \langle n_1 \rangle \cdot T$$

Pour un grand nombre de diffracteurs la loi binominale tend vers la loi de POISSON

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_N(n) = P(n) = \frac{(\langle n_1 \rangle T)^n e^{-\langle n_1 \rangle T}}{n!}$$

2.3 Quasi stationnarité - Hypothèses supplémentaires nécessaires [4]

On démontre que sous ces hypothèses la covarian-
ce peut s'écrire

$$C(t_1, t_2) = \langle a^2 \rangle \iint \langle n_1(\theta) \rangle s(t_1 - \theta, \Delta\omega) s(t_2 - \theta, \Delta\omega) P(\Delta\omega) d(\Delta\omega) d\theta$$

avec $\langle a^2 \rangle$: Moment du 2nd ordre des amplitudes élémentaires

$\langle n_1(\theta) \rangle$ Nombre d'échos élémentaires par unité de temps

$P(\Delta\omega)$ Densité de probabilité du Doppler $\Delta\omega$ (liée à la répartition de la vitesse des diffracteurs).

$C(t_1, t_2)$ dépend de deux variables de temps t_1 et t_2 , le bruit de réverbération n'est pas stationnaire. Nous allons voir que dans certaines conditions, généralement



vérifiées, il est quasi stationnaire, c'est-à-dire réductible à la stationnarité ce qui justifie l'emploi de correcteur automatique de gain.

On dit qu'un bruit est quasi stationnaire lorsqu'on peut le mettre sous la forme

$$F(t) = f(t) \cdot X(t)$$

$f(t)$ fonction déterministe

$X(t)$ fonction aléatoire stationnaire du 2e ordre centrée

Les moments de $F(t)$ sont :

$$\langle F(t) \rangle = f(t) \cdot \langle X(t) \rangle = 0$$

$$\Gamma_F(t, \tau) = f(t) \cdot f(t+\tau) \cdot \Gamma_X(\tau)$$

$$\sigma_F(t) = f(t) \cdot \Gamma_X(0)^{\frac{1}{2}}$$

Si bien que si nous considérons la fonction normalisée

$$\rho_F = \frac{\Gamma_F(t, \tau)}{\Gamma_F(t, 0)^{\frac{1}{2}} \cdot \Gamma_F(t+\tau, 0)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma_F(t, \tau)}{\sigma_F(t) \cdot \sigma_F(t+\tau)}$$

on s'affranchit de la variation déterministe en fonction du temps et l'on trouve



$$\rho_F(\tau) = \rho_x(\tau) = \frac{\sqrt{x(\tau)}}{\sqrt{x(0)}}$$

Si on peut considérer $\langle n_1(\theta) \rangle$ comme constant dans le temps sur une durée au moins égale au support de $s(t)$ on peut décomposer la covariance en un terme statistique et un terme dépendant du temps. Ceci est vrai de façon générale quand le signal émis est suffisamment bref. La covariance s'écrit alors :

$$C(t, \tau) = \langle \sigma^2 \rangle \langle n_1(t) \rangle \iint s(\theta).s(\theta+\tau).P(\Delta\omega).d(\Delta\omega).d\theta$$

puisque $\langle n_1(t) \rangle$ est constant dans le domaine d'intégration en θ ; on peut alors étudier la fonction de corrélation normalisée de la réverbération

$$\rho(\tau) = \frac{\iint s(\theta).s(\theta+\tau).P(\Delta\omega).d(\Delta\omega).d(\theta)}{\iint s^2(\theta).P(\Delta\omega).d(\Delta\omega).d(\theta)}$$

La réverbération est quasi stationnaire au sens où nous l'avons défini, elle peut s'écrire :

$$R(t) = f(t) \cdot X(t)$$

2.4 Etude de la corrélation (sous les hypothèses de quasi stationnarité). [4]



a) Les diffracteurs sont immobiles :

La fonction de corrélation normalisée est celle du signal ce qui est normal puisque la réverbération est une somme de signaux élémentaires, indépendants, sans déformations.

$$\rho(\tau) = \frac{\int s(\theta) \cdot s(\theta + \tau) d\theta}{\int s^2(\theta) d\theta}$$

Le signal est en général formé d'un signal porteur modulé par une fonction enveloppe qui, dans le cas d'une impulsion de durée T est la fonction $\prod_T(t)$. On appellera $s(t)$ l'enveloppe du signal et $z(t)$ la porteuse.

$$s(t) = s_0(t) \cdot z(t)$$

- Emission d'une fréquence pure f_0

on trouve

$$\rho(\tau) = r(\tau) \cdot \cos \omega \cdot \tau$$

$r(\tau)$ est la fonction de corrélation de l'enveloppe. C'est aussi l'enveloppe de la fonction de corrélation.

- Emission d'un bruit filtré (bande Δf)

Si la bande du filtre est assez étroite, sa fonction de corrélation normalisée peut se mettre sous la forme



$$\rho_z(\tau) = r_z(\tau) \cdot \cos \omega_0 \tau$$

ω_0 est la fréquence centrale du bruit.

On a alors

$$\rho(\tau) = r(\tau) \cdot r_z(\tau) \cdot \cos \omega_0 \tau$$

Si le signal émis est long devant $\frac{1}{\Delta f}$, $r_z(\tau)$ décroît plus vite que $r(\tau)$. De toute façon, on voit que le support de la fonction de corrélation ne peut être, sur l'axe des τ positifs, supérieur à la durée T du signal.

$$r(\tau) = 0 \quad | \tau | > T$$

- Emission d'une fréquence modulée

Les résultats sont sensiblement les mêmes que pour la fréquence pure si l'excursion est très faible: Si, au contraire, elle est importante, il ne diffèrent pas de ceux d'une émission de bruit, avec tous les cas intermédiaires possibles.

b) Les diffracteurs sont en mouvement:

On supposera que :

- leurs trajectoires sont indépendantes;
- leurs vitesses sont constantes ainsi que leurs directions pendant la durée d'une émission;
- les Dopplers sont petits devant la fréquence centrale

le $\frac{\Delta \omega_i}{\omega_0} \ll 1 \quad \Delta \omega_i = \frac{2v_i}{c} \omega_0$
avec c vitesse de propagation du son



ω_0 : fréquence centrale

La covariance s'écrit

$$C(t, \tau) = \langle n_1(t) \rangle \cdot \langle a^2 \rangle \cdot \int P(\Delta\omega) \cdot s(t, \Delta\omega) \cdot s(t+\tau, \Delta\omega) \cdot dt \cdot d(\Delta\omega)$$

avec

$$s(t) = s_0(t) \cdot \cos[(\omega_0 + \Delta\omega)t + \phi(t)]$$

Si on suppose que la loi $P(\Delta\omega)$ est centrée, on montre que l'on peut écrire :

$$C(t, \tau) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} P(\Delta\omega) \cdot \cos\Delta\omega\tau d(\Delta\omega) \cdot C_0(t, \tau)$$

avec $C_0(t, \tau)$ covariance quand les diffracteurs sont immobiles $[P(\Delta\omega) = \delta(\Delta\omega)]$. L'intégrale est la partie réelle de la fonction caractéristique de la loi de $\Delta\omega$

Si on ne suppose pas la loi $P(\Delta\omega)$ centrée mais seulement symétrique par rapport à une valeur $\Delta\omega_0$, les trajectoires des diffracteurs ne sont plus indépendantes; on peut cependant se ramener au cas simple précédent en écrivant

$$s(t) = s_0(t) \cdot \cos[(\omega_0 + \Delta\omega_0 + \Delta\omega')t + \phi(t)]$$

la loi de $\Delta\omega' = \Delta\omega - \Delta\omega_0$ est centrée; on introduit un Doppler systématique sur la fréquence du signal que l'on retrouve dans $C_0(t, \tau)$ (la fréquence centrale est changée).



2.5 Etude de la fonction aléatoire $X(t)$

Sous certaines hypothèses assez générales la réverbération peut être considérée comme quasi stationnaire c'est-à-dire que l'on peut écrire

$$R(t) = f(t) \cdot X(t)$$

$f(t)$ est une fonction certaine

$X(t)$ est une fonction aléatoire stationnaire centrée

$X(t)$ peut lui-même s'écrire

$$X(t) = \rho(t) \cdot \cos [\omega_0 t + \Phi(t)]$$

$\rho(t)$ est l'enveloppe

$\Phi(t)$ est la phase

Toutes deux sont aléatoires dans le cas général.

On a ainsi :

$$R(t) = f(t) \cdot \rho(t) \cdot \cos [\omega_0 t + \Phi(t)]$$

Il peut être intéressant d'avoir une connaissance plus précise de chacun des termes, en particulier connaître les propriétés statistiques de $X(t)$, $\rho(t)$, $\Phi(t)$.

Le niveau de réverbération $f(t)$ a été étudié par de nombreux auteurs en fonction des caractéristiques géométriques de l'émission et du milieu. Beaucoup de mesures sont venues vérifier les résultats trouvés.



Il reste néanmoins que chaque cas est un cas particulier.

$X(t)$, à chaque instant est la résultante de nombreux signaux élémentaires d'amplitude et de phase variables. Si aucun n'a une influence prépondérante on montre que $X(t)$ a une distribution en amplitude gaussienne.

$$P_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

Ceci quelle que soit la nature du signal émis. Quand il n'en n'est pas ainsi la distribution s'écarte d'autant plus d'une gaussienne que le nombre de diffracteurs est faible, et la loi de X peut s'exprimer par un développement du type

$$P_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 - \frac{\gamma_a}{3!} H_3\left(\frac{x}{\sigma}\right) + \frac{\gamma_e}{4!} H_4\left(\frac{x}{\sigma}\right) + \dots \right]$$

H_3 et H_4 sont les troisième et quatrième polynômes d'Hermite - $\gamma_a = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$ et $\gamma_e = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$ sont des coefficients de dissymétrie et d'exès. Dans ce cas la loi reste symétrique

Si bien que l'on peut écrire :

$$P_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \frac{\gamma_e}{4!} \left[\left(\frac{x}{\sigma}\right)^4 - 6\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2 + 3 \right] \right]$$



$$\mu_3 = \gamma_a = 0$$

$$\gamma_e = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 \neq 0$$

Un autre cas intéressant est celui de la présence au temps t , d'un écho sinusoidal d'amplitude A qui vient s'ajouter à la réverbération. Si on suppose la phase aléatoire equirépartie sur $0 - \pi$, la densité de probabilité de l'amplitude sera obtenue par la convolution des lois :

$$P_1(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{A^2 - x^2}} \quad \text{pour } |x| \leq A$$

$$P_1(x) = 0 \quad \text{sinon}$$

et

$$P_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

On trouve une intégrale qui peut s'exprimer sous forme d'une série de fonctions de BESSEL

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + A^2}{4\sigma^2}\right) \left\{ I_0\left(\frac{Ax}{\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{A^2}{4\sigma^2}\right) + 2 \sum_{K=1}^{\infty} (-1)^K I_K\left(\frac{A^2}{4\sigma^2}\right) I_{2K}\left(\frac{Ax}{\sigma^2}\right) \right\}$$



Lorsque $X(t)$ est gaussien on peut connaître facilement la loi de son enveloppe et la loi de sa phase.

La définition de l'enveloppe fait appel au signal analytique

$$Z(t) = P + iQ = \rho(t) \cdot \exp\{i(2\pi\nu_0 t + \phi(t))\}$$

avec

$$X(t) = R_e(Z(t)) = \rho(t)$$

P et Q forment une paire de HILBERT. Lorsque X est gaussien elles suivent la même loi; elles sont, de plus, indépendantes, car non corrélées au même instant. Comme

$$P = \rho \cos \phi$$

$$Q = \rho \sin \phi$$

ρ et ϕ sont l'enveloppe et la phase de $X(t)$

$$P_{PQ}(\rho, q) = P_P(\rho) \cdot P_Q(q) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{\rho^2 + q^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$P_P(\rho) = \rho \int_0^{2\pi} P\{\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi\} \cdot d\varphi$$

On trouve ainsi la loi de l'enveloppe :

$$P_P(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right)$$

qui est la loi de RAYLEIGH



sa moyenne est $m_p = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sigma = \langle p \rangle$

sa variance est $\sigma_p^2 = \frac{4 - \pi}{2} \cdot \sigma^2$

le moment non centré du second ordre est : $\langle p^2 \rangle = 2 \sigma^2$

En prenant comme variable $I = p^2$, on a la loi de puissance instantanée

$$P(i) = \frac{1}{2\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{i}{2\sigma^2}\right)$$

$$P_i(i) = \frac{1}{\langle i \rangle} \cdot \exp\left(-\frac{i}{\langle i \rangle}\right)$$

La probabilité, pour que la puissance instantanée dépasse un seuil i_0 est donnée par

$$\text{Prob}(I > i_0) = \exp\left(-\frac{i_0}{\langle i \rangle}\right)$$

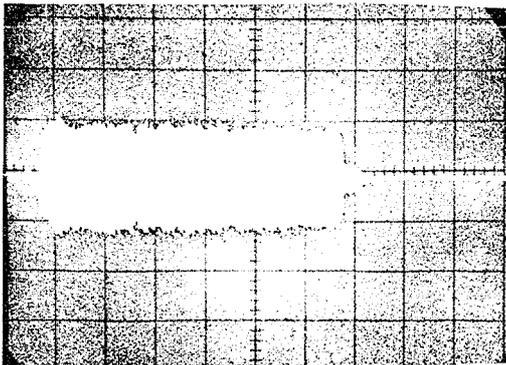
La loi de ϕ est en général uniforme sur $(0 - 2\pi)$. Ceci est vrai dès que $\rho(t)$ est stationnaire et que la probabilité conditionnelle $P(\phi/\rho)$ ne dépend pas du temps non plus. L'absence d'une distribution spatiale des diffuseurs bien définie et ordonnée suffit à montrer que ces deux conditions sont remplies. Cela peut cependant ne plus être vrai en présence d'un obstacle. On peut alors retrouver la loi de ϕ comme on l'a fait pour l'enveloppe, à partir de la loi bidimensionnelle des composantes en quadrature.



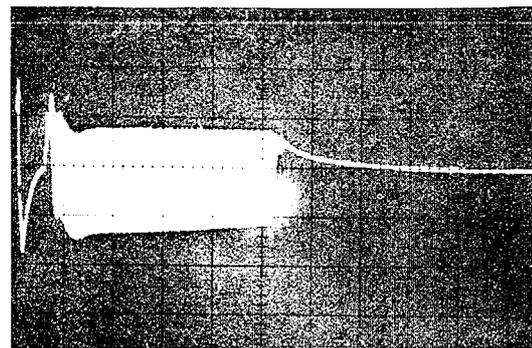
3. EXEMPLES DE MESURES STATISTIQUES SUR DE TELS BRUITS EN VUE DE DEGAGER CERTAINES PROPRIETES

3.1 Généralités

Les mesures qui sont présentées ont été effectuées sur des bandes magnétiques enregistrées en mer (mode F.M.). Il s'agit de réverbération de surface correspondant à l'émission d'un bruit de bande relative $\frac{\Delta f}{f} = \frac{1}{10}$ ou d'une fréquence pure f_0 . La durée de l'émission est dans les deux cas de 50 ms environ - le cycle a une durée un peu inférieure à 3 secondes.

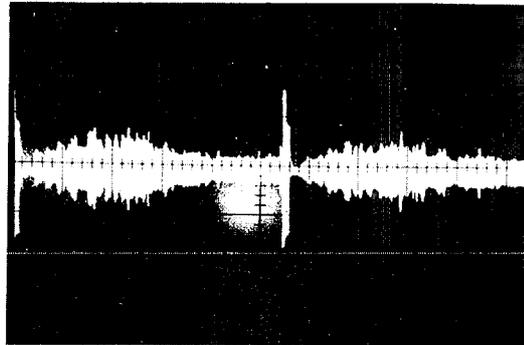


Emission d'un bruit
1 V./car. - 10 ms./car.



Emission d'une fréquence
pure
1 V./car. - 10 ms./car.

On possède pour chaque type d'émission environ 90 cycles qui sont considérés comme des réalisations indépendantes de la même épreuve caractérisée par des conditions d'émission, de réception et de mer que l'on s'est efforcé de garder semblables pour toutes les expériences.



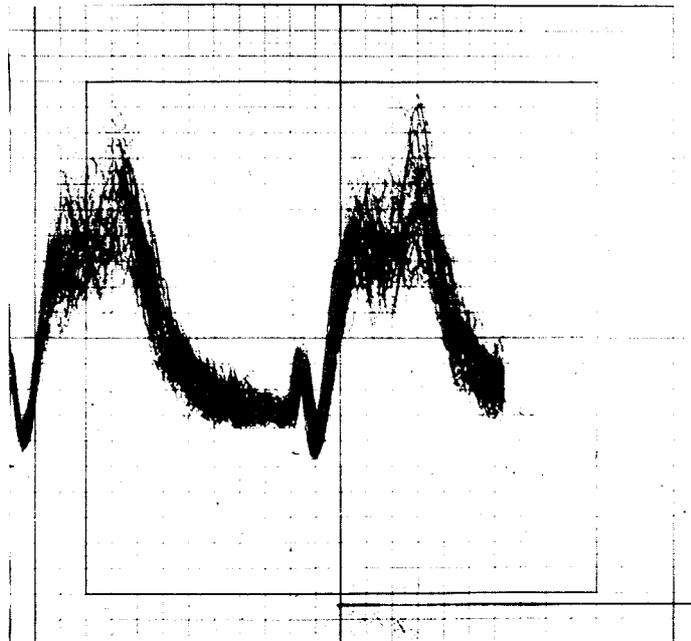
Emissions suivies du diffus de réverbération

1 V./car. - 0,5 s./car.

La base qui sert à l'émission est directive immergée à 40 mètres et inclinée de 5° par rapport à l'horizontale. Le diffus de réverbération arrive sensiblement après l'émission, l'onde sonore mettant un certain temps à atteindre la surface. La croissance du niveau est ensuite assez rapide. On rencontre les diffracteurs qui sont essentiellement des bulles d'air et des remous de vagues. Puis on observe une décroissance due à l'augmentation de l'incidence ainsi qu'à l'atténuation due à la distance.



Niveau de réverbération pour une émission de bruit.



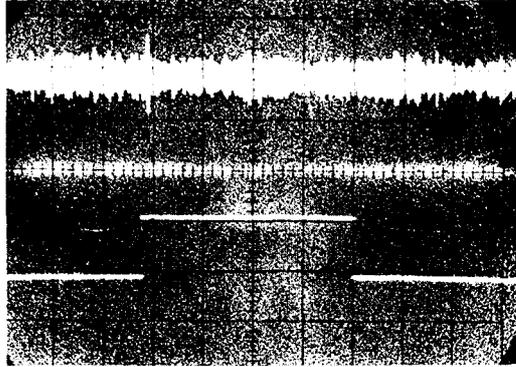
Niveau de réverbération pour l'émission d'une fréquence pure.



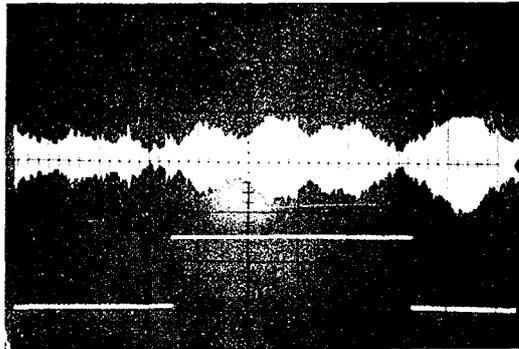
3.2 Problèmes posés par la non stationnarité

Nous avons vu que la réverbération nous fournissait une fonction aléatoire qui a ceci de particulier qu'elle possède une date origine, en contre partie elle n'est pas stationnaire, un déplacement de l'échelle de temps change l'estimation des moments. On est obligé d'opérer en des dates précises sur des réalisations indépendantes. On se heurte alors au fait que 90 échantillons ne donnent pas une précision statistique très grande pour des variables telles que l'amplitude, dont les variations sont importantes. On a tourné la difficulté en disant que si l'amplitude suit une certaine loi à la date t_0 , la loi doit être la même à la date $t_0 + \Delta t$ pourvu que Δt ne soit pas trop grand. Cela suppose, si par exemple l'amplitude suit une loi de GAUSS $N(0, \sigma)$ en t_0 , qu'elle suit la même loi de GAUSS en $t_0 + \Delta t$, c'est-à-dire que le niveau n'ait pas changé et qu'il n'y a pas eu apparition d'un phénomène parasite, un écho prépondérant par exemple, entre t_0 et $t_0 + \Delta t$.

On est donc amené à faire l'étude dans une fenêtre de temps pour chaque réalisation, ceci pour les 90 cycles.



Emission d'un bruit



Emission d'une fréquence pure

Bruit de réverbération pendant la durée d'une

fenêtre d'étude de 100 ms.



Afin d'être sûr que la loi de $X(t)$ n'évolue pas sur une fenêtre Δt , on a fait varier la largeur Δt de la fenêtre pour chaque date t_0 où l'on a fait un histogramme. On a considéré que les résultats étaient valables lorsque les écarts sur les moments estimés pour différents Δt n'étaient pas supérieurs aux écarts statistiques observés pour plusieurs estimations différentes sur une même largeur de fenêtre Δt à la date t_0 .

Cette façon d'agir se justifie d'ailleurs très bien. Si nous reprenons l'hypothèse nécessaire pour avoir la quasi-stationnarité qui est que le milieu n'évolue pas pendant un temps de l'ordre de la durée du signal, de façon à garder constant le nombre moyen d'échos élémentaires revenant au récepteur, nous voyons que notre façon de travailler dans une fenêtre revient à vérifier naturellement que cette hypothèse, qui permet de faire des mesures dans de meilleures conditions, est vérifiée. Comparer ensuite les mesures faites à des dates différentes pour vérifier la quasi-stationnarité ne revient plus qu'à contrôler la réalité des développements que l'on a faits à partir de cette hypothèse.

3.3 Description des appareils de mesure

Contrairement à ce qui est habituel, l'essentiel de la chaîne de mesure est analogique. L'organe de mesure statistique est un sélecteur d'amplitude Inter-technique à 4096 canaux. La fonction aléatoire sous forme d'une tension électrique est échantillonnée par un générateur d'impulsions recurrentes ou aléatoires, extérieur, ce qui définit à partir de la fonction aléatoire $X(t)$ une variable aléatoire X_t . Le rôle du sé-



lecteur est de classer les impulsions en fonction de leur amplitude de façon à réaliser un histogramme . Le classement ne peut évidemment pas se faire de façon continue; on définit des classes de niveaux, opérant ainsi une quantification. Cela n'est cependant pas très gênant puisque l'on peut avoir jusqu'à 2048 classes pour 10 volts. Le sélecteur d'amplitude a deux voies c.à.d qu'il peut traiter deux paramètres X et Y formant un couple (X, Y) et réaliser des histogrammes à deux dimensions représentant la probabilité du couple : $P_{xy}(x, y)$. Cette surface peut être visualisée en perspective cavalière. On peut aussi avoir une modulation d'intensité dans le plan xoy :

Quand on classe des couples la quantification est plus grossière, le nombre possible des réalisations étant 4096, soit n_1 , le nombre des réalisations possibles de X et n_2 celui de Y, on doit avoir: $n_1 + n_2 = 4096$

Cependant on peut se limiter à des fenêtres d'intérêt sur X et Y et avoir la même finesse de résolution (pour une partie de $p(x, y)$) que celle que l'on peut atteindre pour $p(x)$

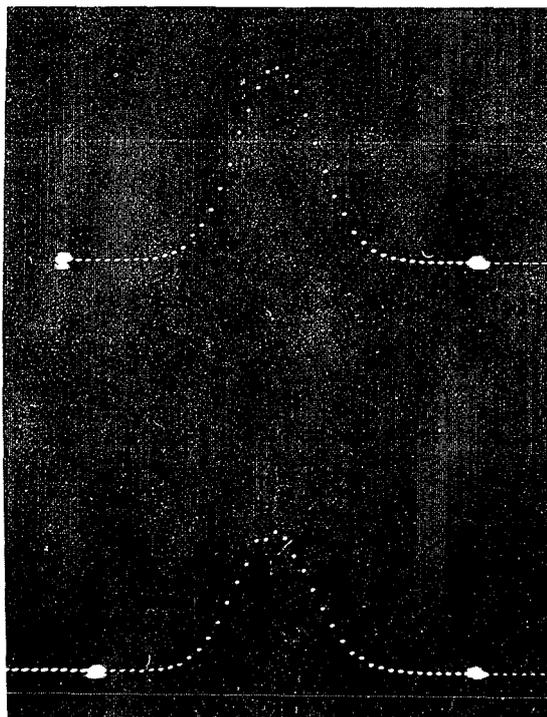
La variable aléatoire, au lieu d'être une impulsion de hauteur variable, peut être aussi un nombre aléatoire d'impulsions; ce qui permet de faire des histogrammes de dépassement de seuil, de durée etc...

La sortie des résultats se fait sur une imprimante ou sur une bande perforée ce qui permet les traitements sur calculateurs.



3.4 Densité de probabilité des amplitudes

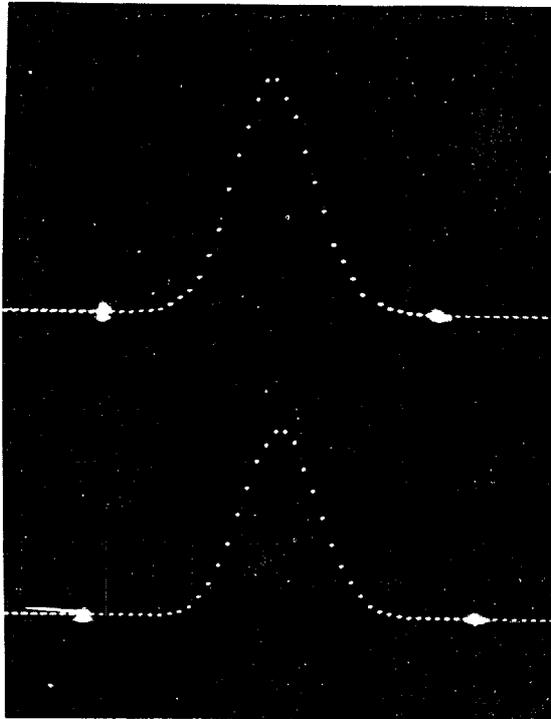
Le bruit est échantillonné à une fréquence suffisamment haute pour avoir un grand nombre d'échantillons. Quand le bruit est gaussien, on essaie d'avoir une période d'échantillonnage correspondant à un zéro de la fonction de corrélation on sait qu'alors les échantillons sont indépendants et les calculs de précision, convergence des fréquences vers la probabilité etc... s'en trouvent simplifiés. A part les considérations de simplification des calculs la période d'échantillonnage n'intervient pas.



Histogramme des amplitudes instantanées pour deux fréquences d'échantillonnage différentes.

En haut : $f = 3400$ Hz

En bas : $f = 4800$ Hz



Histogramme des amplitudes instantanées pour deux fréquences d'échantillonnage différentes.

En haut : $f = 5700$ Hz

En bas : $f = 9500$ Hz

Les densités de probabilité de $X_0 = X(t_0)$ ont en fait été estimées autour de t_0 pendant Δt sur les N réalisations de la fonction aléatoire $X(t)$. Ceci se fait simplement en autorisant le classement uniquement pendant la durée d'une impulsion apparaissant à la date t_0 et de longueur Δt . Les oscillogrammes montrent des densités de probabilité. On a aussi représenté celles-ci sur papier semi-logarithmique en les normalisant : en abscisse la variable réduite $\frac{x - m}{\sigma}$, en ordonnée $\sigma \cdot P_{X_0} \left(\frac{x - m}{\sigma} \right)$. Les points représentent les mesures expérimentales, la courbe en trait plein est le graphe de $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Les fonctions de répartition sont représentées avec une échelle Galtonienne - là aussi les points représentent les mesures expérimentales, la droite en trait plein est la courbe théorique.

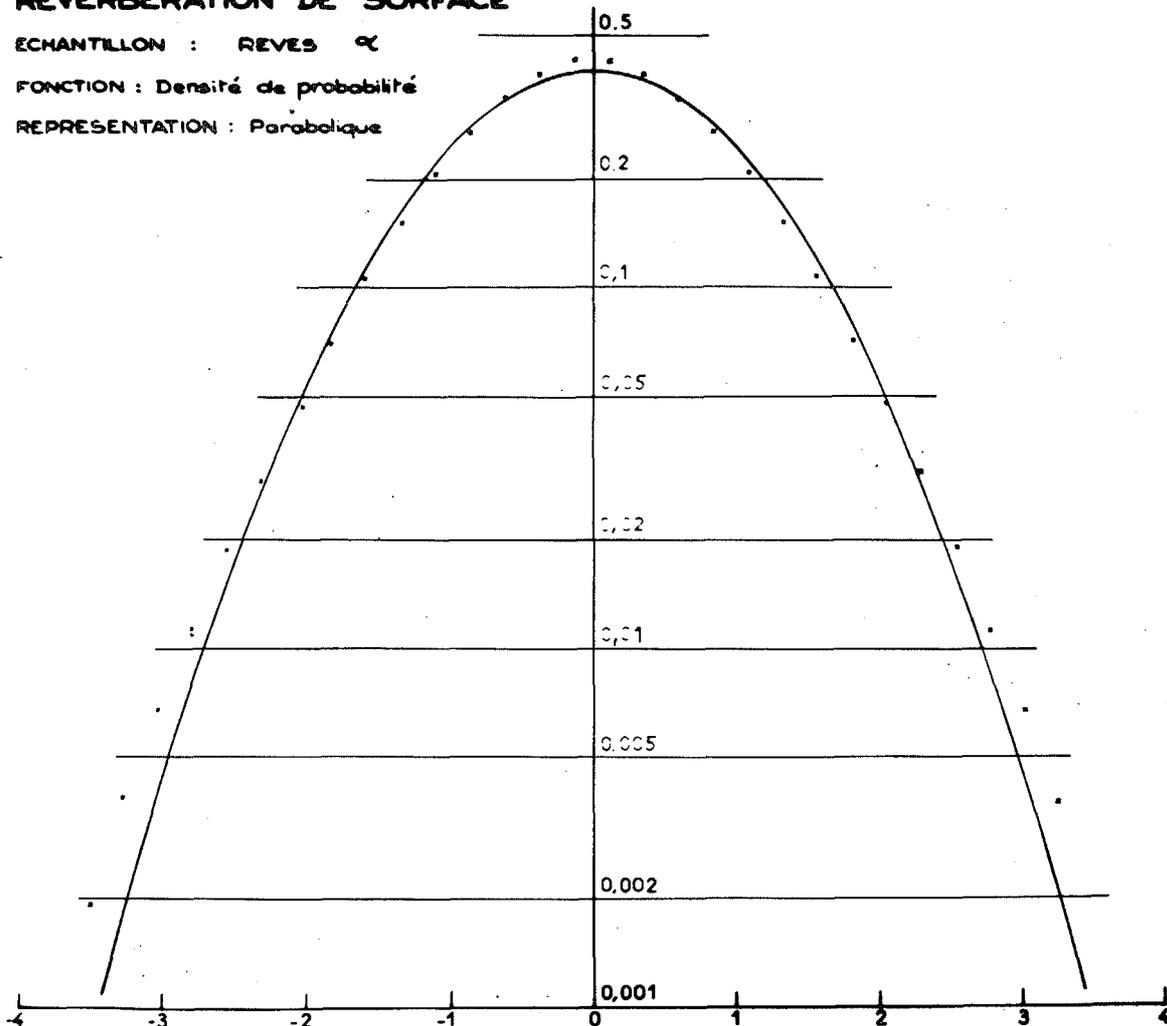


REVERBERATION DE SURFACE

ECHANTILLON : REVES α

FONCTION : Densité de probabilité

REPRESENTATION : Parabolique



- Influence de la largeur de la fenêtre.

REVES α est un enregistrement, pour une émission sinusoïdale, à la date $t_0 = 1,5$ seconde avec

$t = 1$ sec. Le maximum est trop haut, la loi reste symétrique mais les points ne sont pas sur la courbe. C'est l'exemple d'une fenêtre trop large et de la composition de plusieurs lois. L'estimation de σ donne :

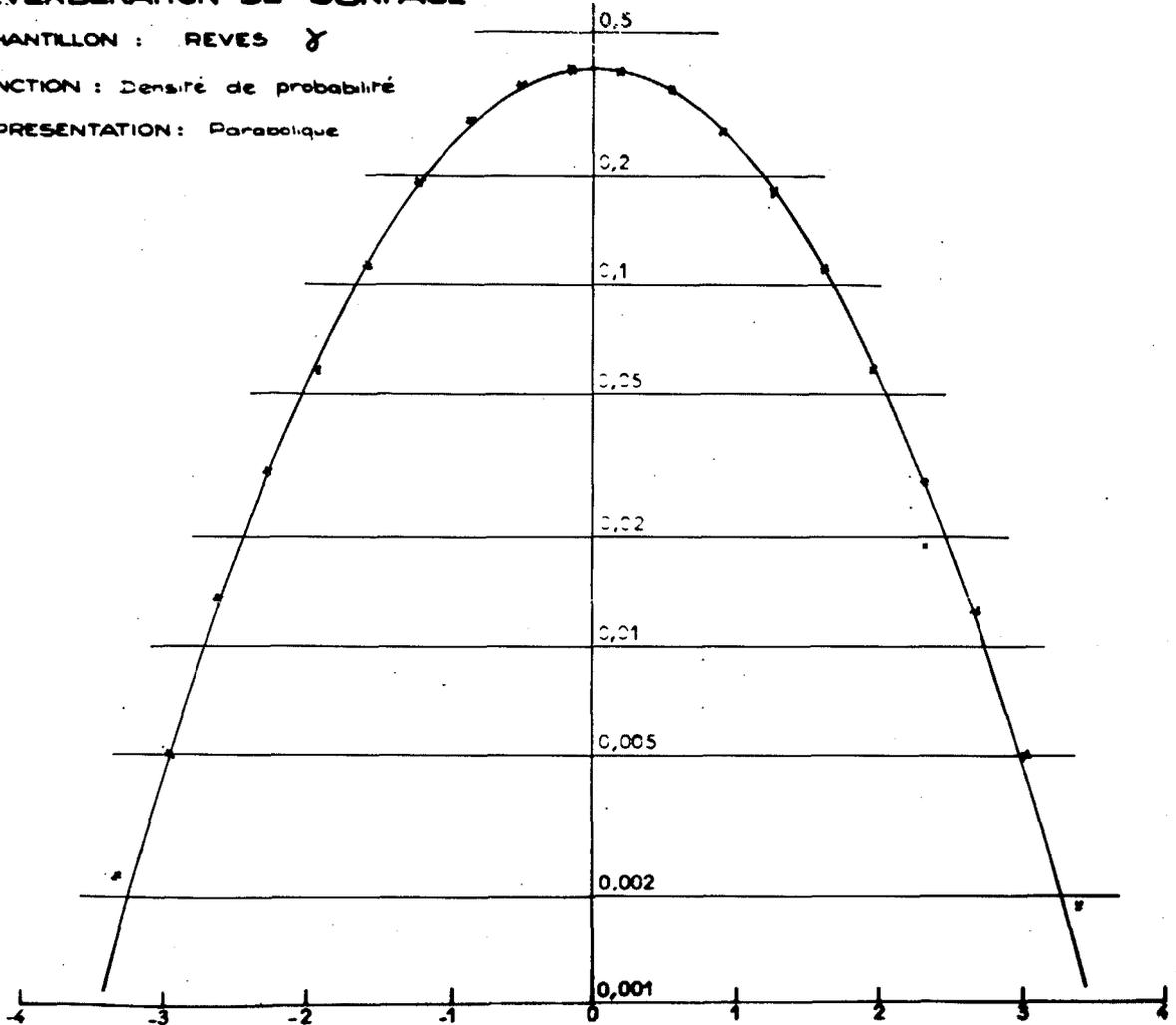
$$\sigma = 8,3. \text{ (Unité : un canal, homogène à une tension)}$$



REVERBERATION DE SURFACEECHANTILLON : REVES γ

FONCTION : Densité de probabilité

REPRESENTATION : Parabolique



REVES γ Les conditions sont les mêmes, seule la largeur de la fenêtre a été réduite à 200 ms. Les points se placent correctement sur la courbe, l'écart type estimé n'est plus que : $\sigma = 5,7$.

Les différentes mesures effectuées pour des valeurs différentes de t_0 ont mis en évidence que si parfois $\Delta t = 200$ ms. donnait des résultats corrects, il

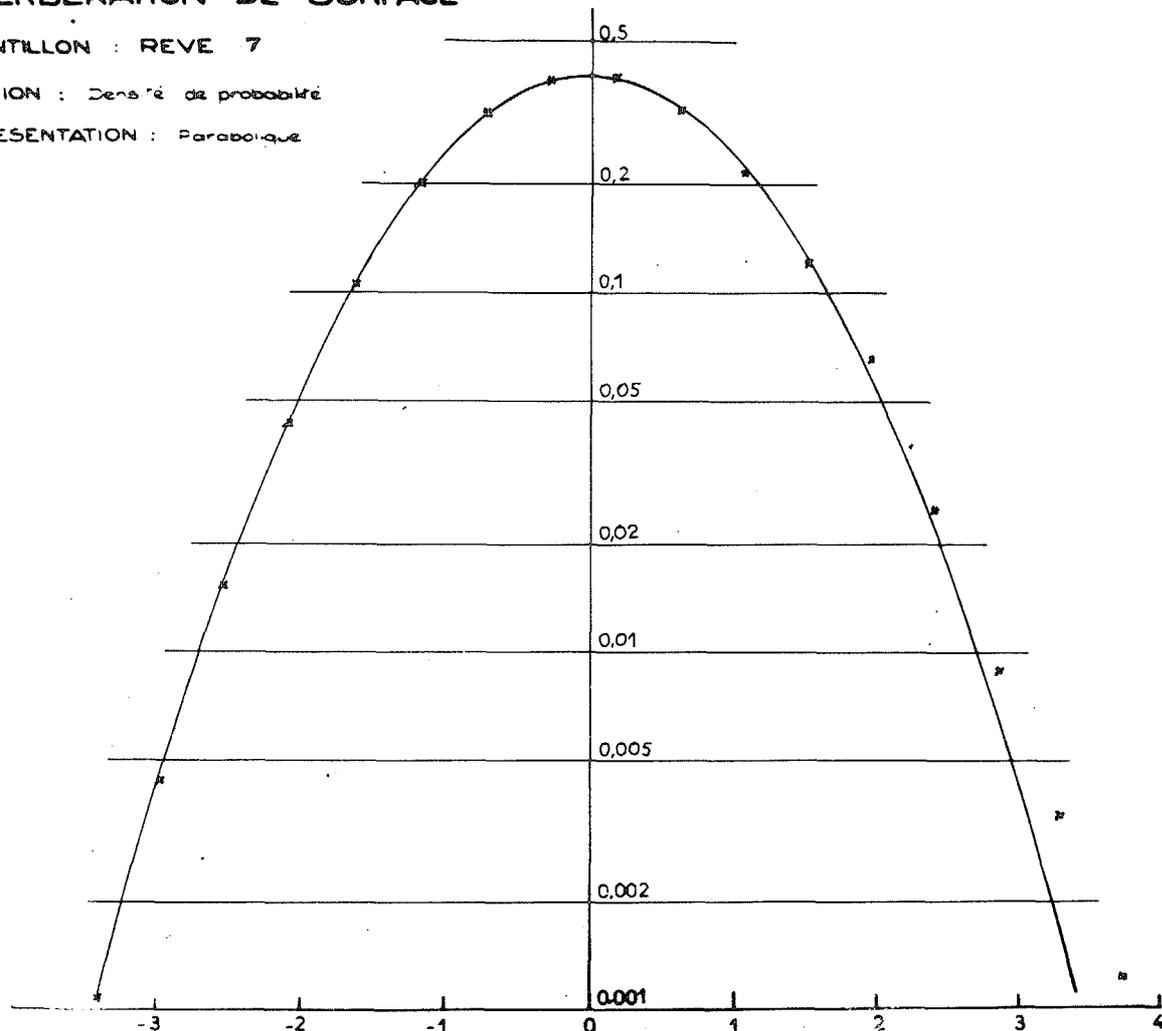


REVERBERATION DE SURFACE

ECHANTILLON : REVE 7

FONCTION : Densité de probabilité

REPRESENTATION : Parabolique



valait mieux se contenter de $\Delta t = 100$ ms dans les zones où les variations de puissance moyenne sont plus rapides.

Etude de la loi à différentes dates t_0 ;

REVE 7 est un enregistrement, pour une émission de bruit, à la date $t_0 = 770$ ms. On remarque la bonne coïncidence pour les amplitudes négatives jusqu'à trois fois l'écart type; les résultats moins bons pour les amplitudes positives ont mis en évidence une légère dissymétrie dans l'amplification.

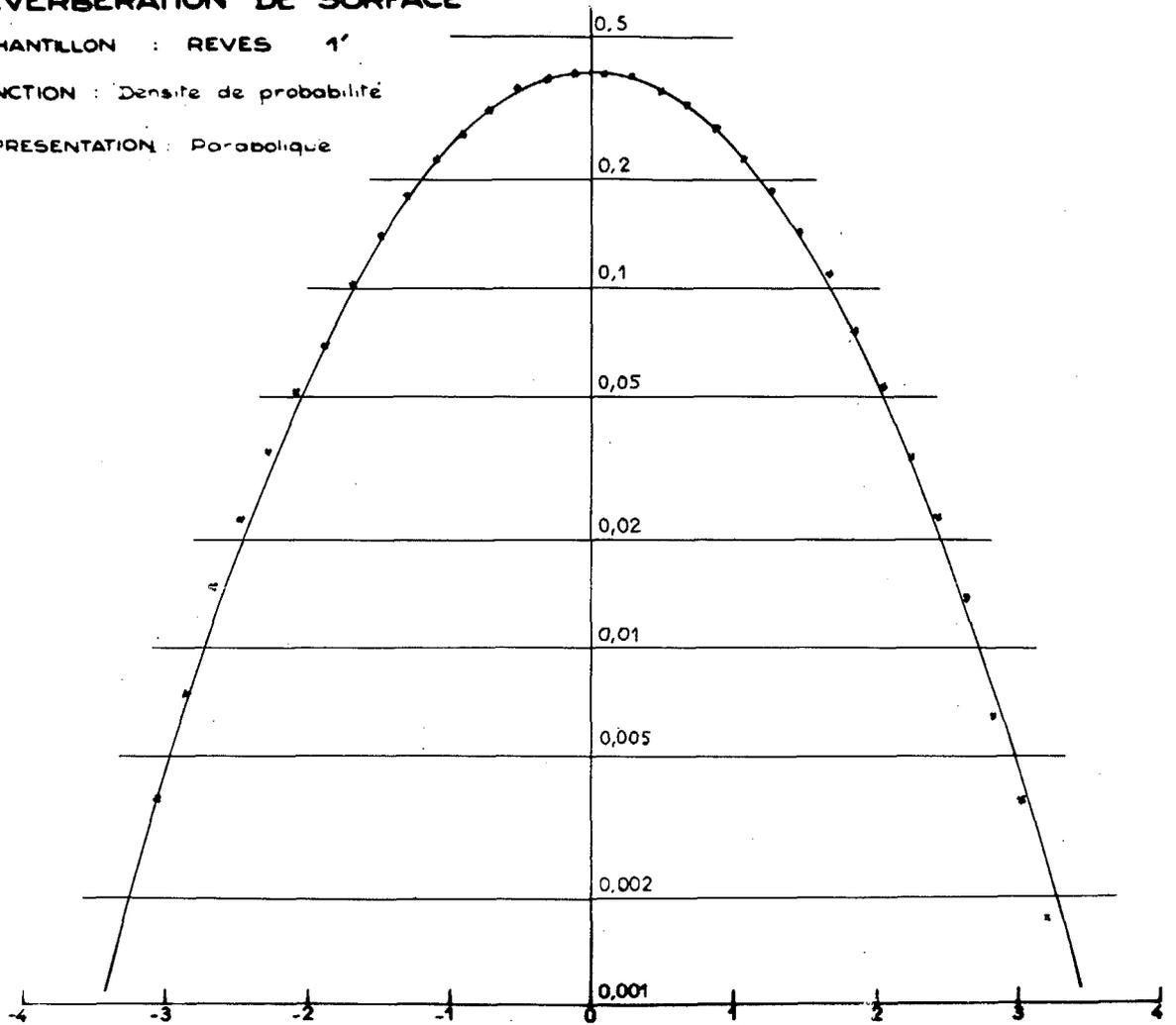


REVERBERATION DE SURFACE

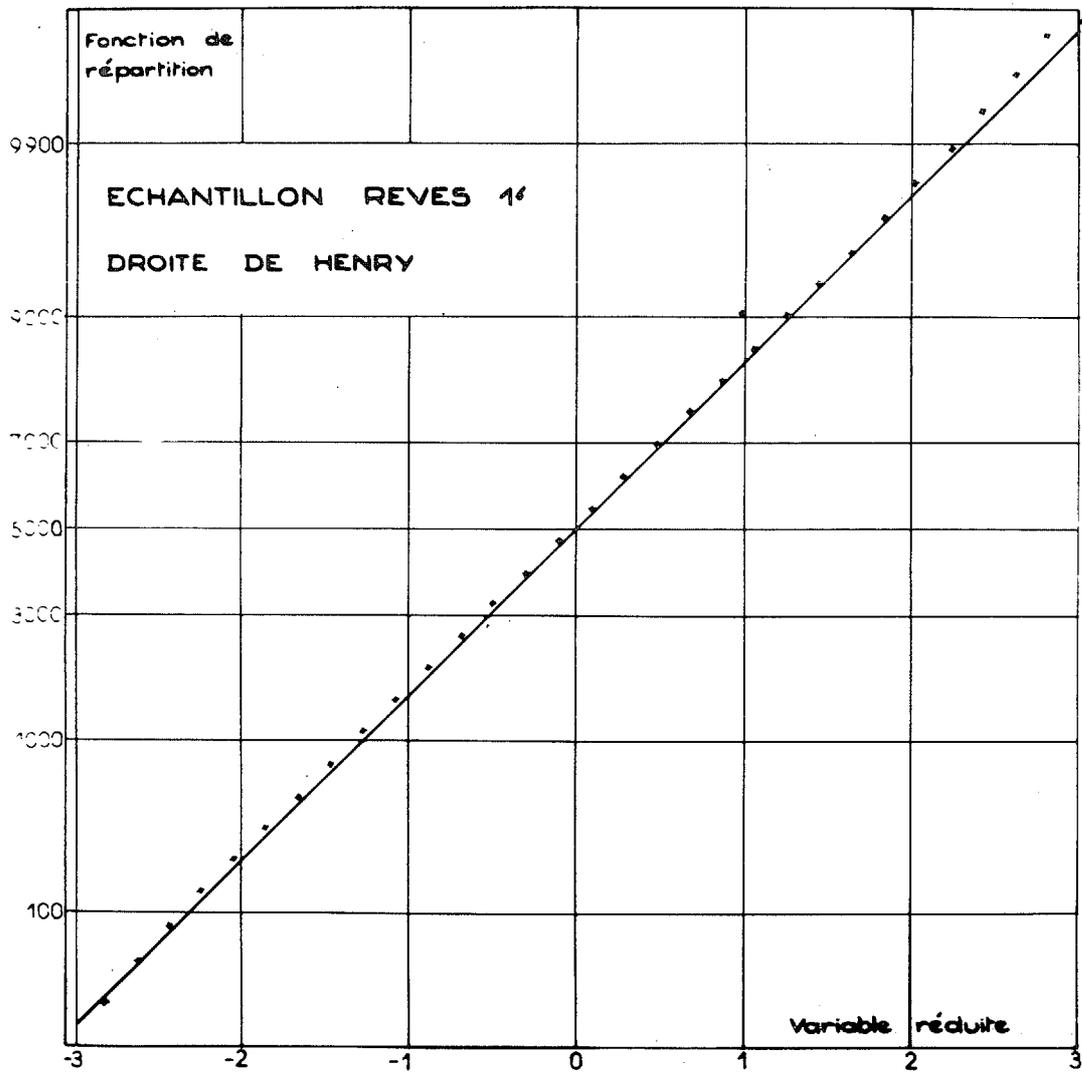
ECHANTILLON : REVES 1'

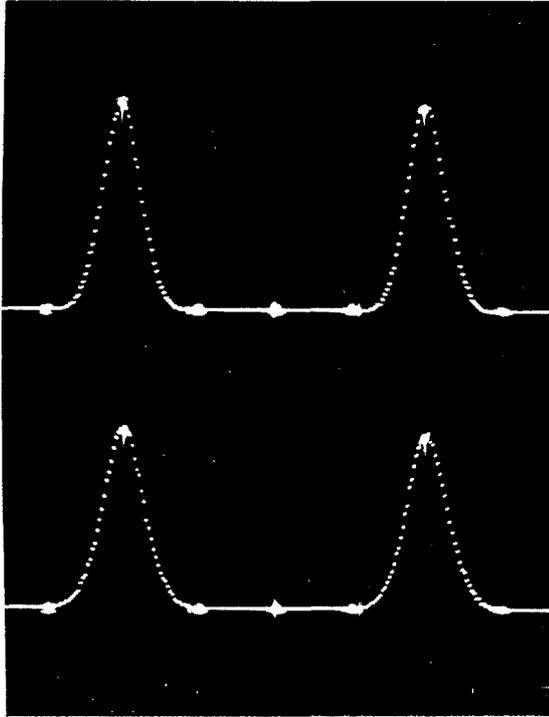
FONCTION : Densité de probabilité

REPRESENTATION : Parabolique



REVES 1' correspond à une émission sinusoïdale pour $t_0 = 1$ sec et $\Delta t = 108$ ms. Les points expérimentaux aussi bien pour la densité de probabilité que pour la fonction de répartition se placent correctement par rapport aux courbes théoriques. Un générateur de bruit gaussien donne des résultats à peine meilleurs.

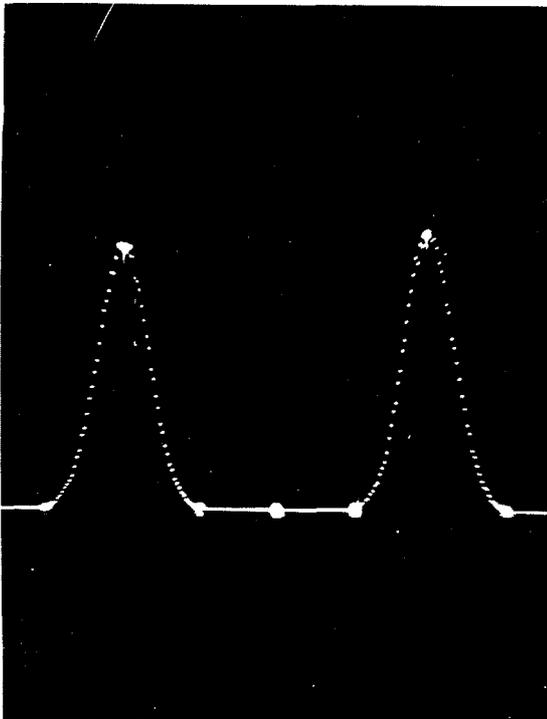




REVES 1 - REVES 1'

$$t_0 = 1,2 \text{ s.}$$

$$\Delta t = 108 \text{ ms.}$$



REVES 2 - REVES 2'

$$t_0 = 1 \text{ sec.}$$

$$\Delta t = 108 \text{ ms.}$$

REVES 3 - REVES 3'

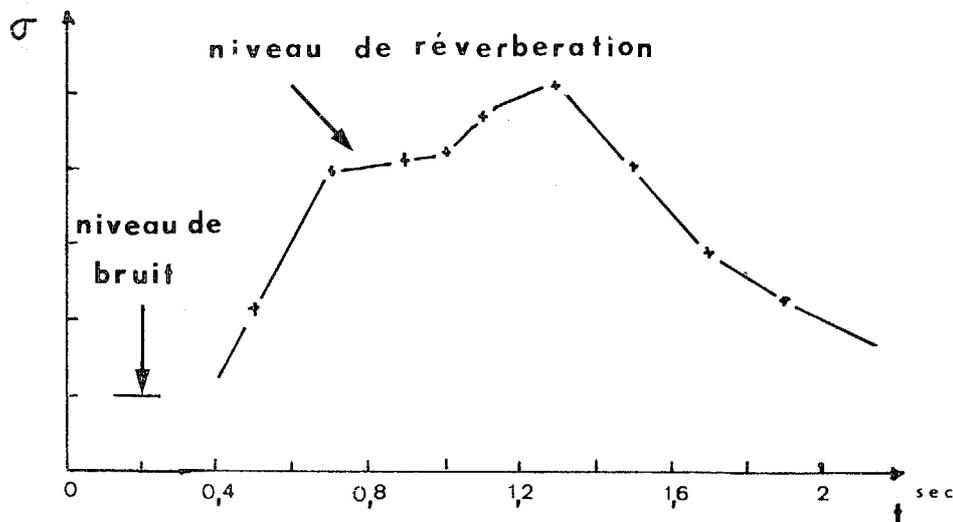
$$t_0 = 0,8 \text{ sec.}$$

$$\Delta t = 108 \text{ ms.}$$

Histogrammes des Amplitudes instantanées



Les enregistrements pour différents t_0 montrent que la réverbération, à un instant donné, a une amplitude instantanées qui suit une loi de GAUSS quel que soit le type d'émission. L'écart type varie en fonction du temps. Son estimation nous a permis de tracer les courbes du niveau de réverbération en fonction du temps.



3.5 Densité de probabilité d'un couple d'amplitudes instantanées

L'étude de la loi bidimensionnelle des amplitudes instantanées va nous permettre une analyse plus fine encore, en ce sens qu'elle fait intervenir le coefficient de corrélation ρ entre les deux variables aléatoires $X_1 = X(t_1)$ et $X_2 = X(t_2)$. Pour deux variables gaussiennes centrées la densité de probabilité du couple est donnée par :

$$P(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \cdot \left(\frac{x_1^2}{\sigma_1^2} - \rho \frac{x_1 x_2}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{x_2^2}{\sigma_2^2} \right) \right\}$$

$$\text{avec } \sigma_1^2 = \langle X_1^2 \rangle, \sigma_2^2 = \langle X_2^2 \rangle \text{ et } \rho = \frac{\langle X_1 X_2 \rangle}{\sigma_1 \cdot \sigma_2}$$

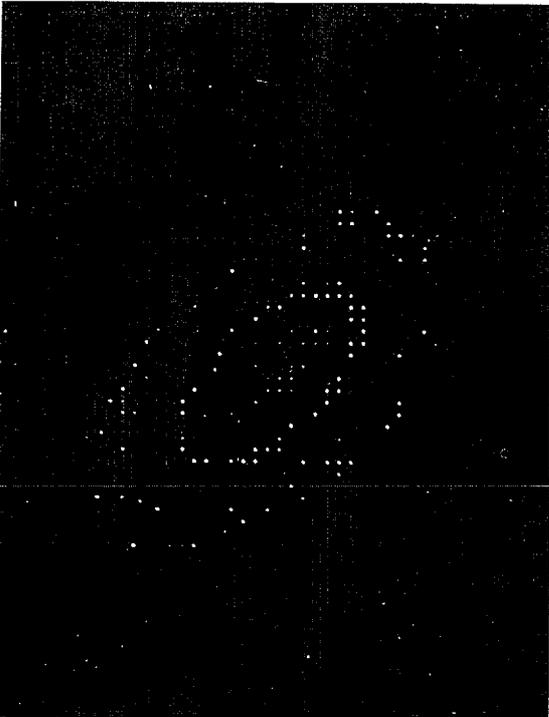
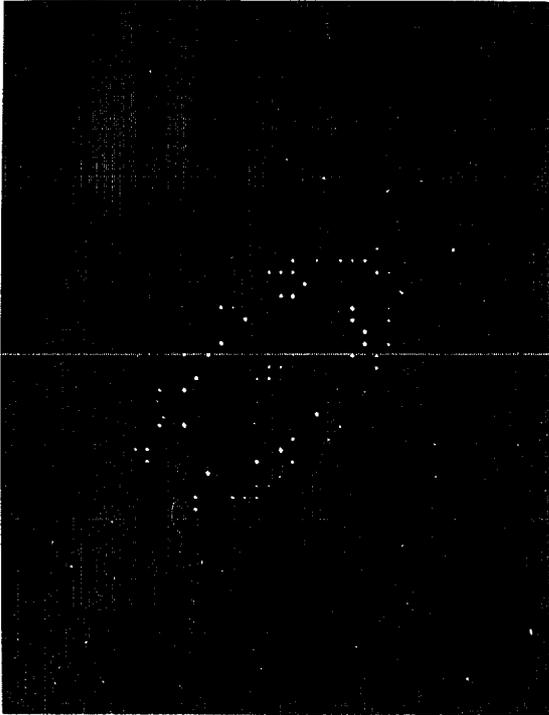


On voit apparaître le coefficient ρ qui dans le cas d'un bruit quasi-stationnaire ne doit pas dépendre de t_1 et t_2 pourvu que l'on conserve $t_2 - t_1 = \tau$ constant. La surface $z = p(x_1, x_2)$, si l'on fait une translation sur t_1 et t_2 , évolue car σ_1 et σ_2 dépendent du temps. Si nous opérons comme pour les probabilités monodimensionnelles, dans une fenêtre telle que l'on puisse considérer que X_1 et X_2 suivent la même loi, en particulier $\sigma_1 = \sigma_2$, alors la section par un plan quelconque d'équiprobabilité $z_1 = k$ avec la surface $z_2 = p(x_1, x_2)$ est une ellipse homothétique de

$$x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2 = 0$$

Pour vérifier la quasi-stationnarité il suffit donc de faire des histogrammes bidimensionnels de couples (X_1, X_2) tels que $X_1 = X(t_0)$ et $X_2 = X(t_0 + \tau)$ pour différentes dates t_0 et vérifier par exemple ce caractère d'ellipticité des sections. Un autre moyen de la mettre en évidence à partir d'un tel histogramme est de considérer des sections obtenues en fixant une des variables. Prenons par exemple le plan $x_2 = a$. On obtient l'histogramme monodimensionnel de X_1 conditionné par $X_2 = a$. Si X_1 et X_2 suivent des lois gaussiennes, les lois conditionnelles sont des gaussiennes.

Si l'on trace le lieu de leur valeur moyenne en fonction de la valeur de la variable de conditionnement on trouve une droite, appelée droite de régression dont la pente est $\rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$. Il est donc très simple, par



Oscillogrammes de sections d'équiprobabilité d'histogrammes bidimensionnels. Le décalage des échantillonnages est $\tau = 65 \text{ s}$ dans tous les cas. On n'a changé que la position de la fenêtre. En haut, pour une émission de bruit la fenêtre de 100 ms est placée pour la section extérieure en $t_0 = 625 \text{ ms}$, pour la section intérieure (plus brillante) à 750 ms. En bas, pour une émission sinusoïdale, la section extérieure correspond à la date $t_0 = 2650 \text{ ms}$, et l'autre à $t_0 = 1250 \text{ ms}$. On remarque que les ellipses sont bien homothétiques. Le coefficient de corrélation $\rho(\tau)$ est bien indépendant de la date, ce que l'on vérifie par des moyens d'estimations moins empiriques.



un traitement des histogrammes monodimensionnels, de vérifier le caractère gaussien et de tester la quasi-stationnarité en faisant apparaître la corrélation normalisée,

Comme pour les histogrammes monodimensionnels nous avons opéré dans des fenêtres. Les couples sont formés à partir de deux échantillonnages identiques mais décalés de τ en associant à chaque impulsion du premier échantillonnage, l'impulsion du second qui la suit de τ . Les couples sont alors classés tant que les deux impulsions les formant se trouvent dans une fenêtre de temps $(t_0, t_0 + \Delta t)$. Pour pouvoir conserver l'ordonnancement en couples il est nécessaire que la période d'échantillonnage soit supérieure au retard τ .

3.6 Densité de probabilité de l'enveloppe

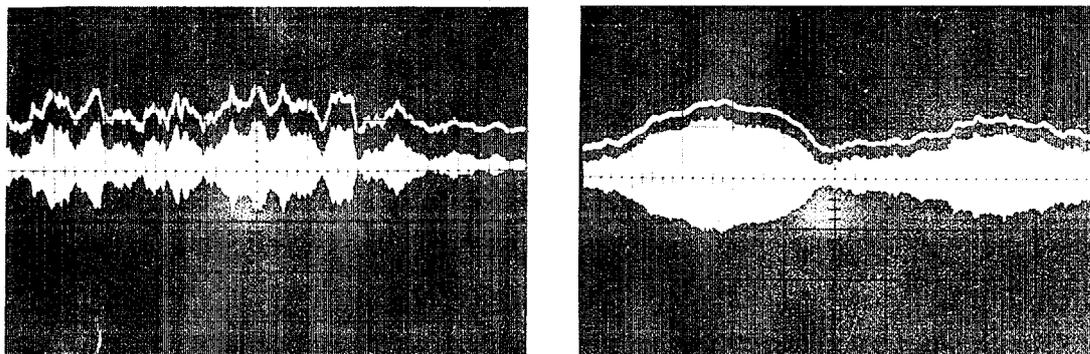
Nous avons obtenu la fonction enveloppe en faisant un redressement double alternance et en filtrant pour ne laisser passer que les fréquences modulantes. Les photos ci-dessous sont des oscillogrammes sur lesquels figurent la fonction enveloppe sur la trace supérieure, la fonction bruit sur la trace inférieure.

Si l'on reprend la représentation

$$R(t) = f(t) \cdot X(t) = f(t) \cdot \rho(t) \cos[\omega_0 t + \phi(t)]$$

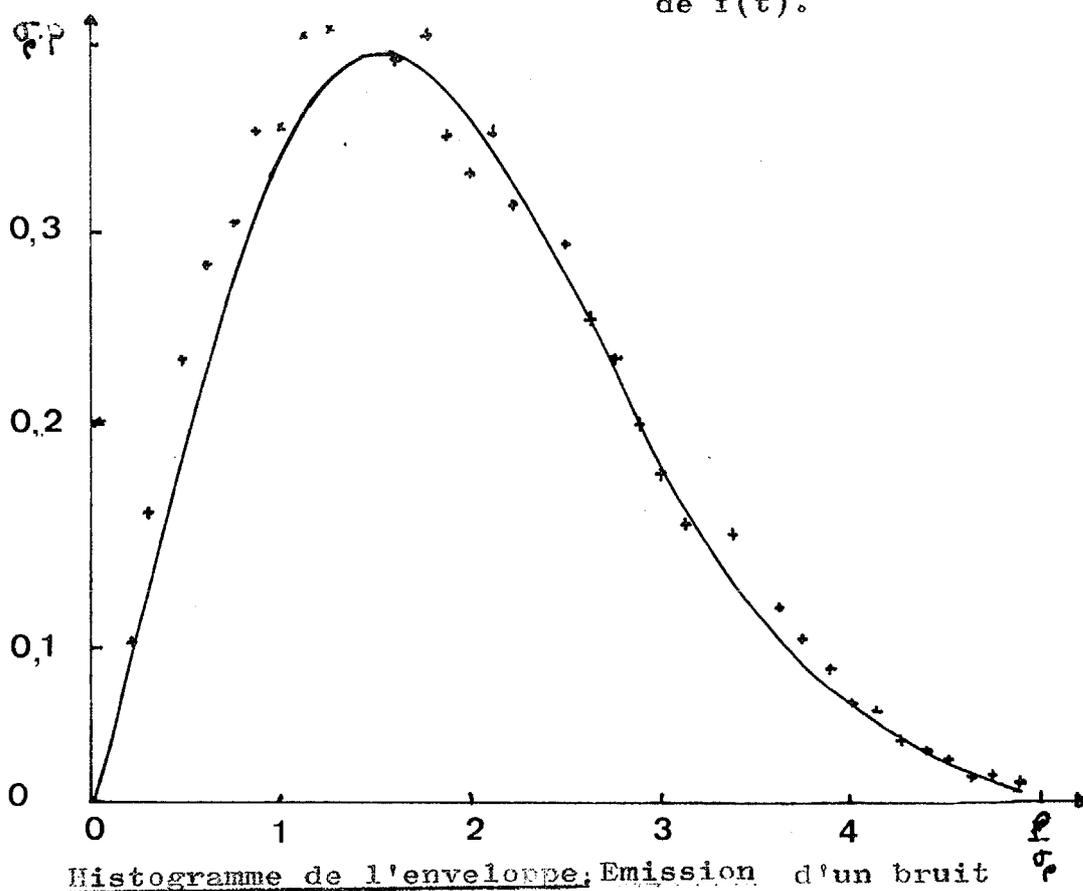
ce que nous obtenons est en réalité : $f(t) \cdot \rho(t)$.

. En effet le filtrage n'élimine pas $f(t)$ dont le spectre est à très basse fréquence (quelques Hertz). Un filtrage passe-haut modifierait $\rho(t)$ qui a un spectre de bande en basse fréquence.



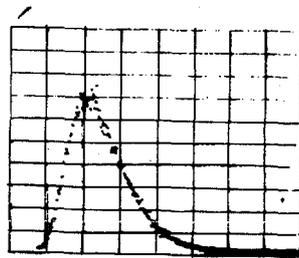
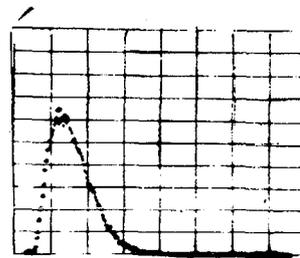
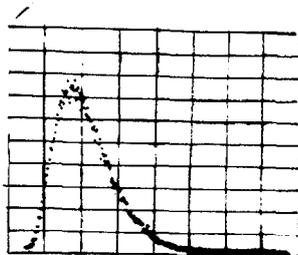
Réverbération et son enveloppe : à gauche pour l'émission d'un bruit, : à droite pour l'émission d'une fréquence pure.

La fonction enveloppe est échantillonnée. Les échantillons sont classés uniquement à la date t_0 pendant le temps Δt , pour s'affranchir de l'influence de $f(t)$.





On obtient ainsi les histogrammes de $P(t)$ à une constante multiplicative près : $f(t_0)$. On en a tracé plusieurs pour différentes dates et pour les deux types d'émissions. Les résultats sont compatibles. La représentation normalisée permet une comparaison à la loi de RAYLEIGH (courbe en trait plein) des points expérimentaux. (figure précédente)

 $t_0 = 625 \text{ ms}$  $t_0 = 950 \text{ ms}$  $t_0 = 750$  $t_0 = 650$

Emission d'un bruit

Emission d'une fréquence pure

Histogrammes d'enveloppe. en différentes dates, pour les deux types d'émissions.



Densité bidimensionnelle de l'enveloppe -

On a tracé plusieurs densités bidimensionnelles d'enveloppe aussi bien pour des émissions de bruit que pour celles d'une fréquence pure, ce qui nous a permis d'apprécier la dépendance de deux échantillons de l'enveloppe en fonction du temps qui les sépare.

Soient ρ_0 et ρ_τ les deux variables aléatoires obtenues à partir de l'enveloppe $\rho_0 = \rho(t_0)$ et

$\rho_\tau = \rho(t_0 + \tau)$. Ol'shevskii donne pour la densité de probabilité bidimensionnelle:

$$\text{Prob}(\rho_0 = \rho \text{ et } \rho_\tau = \rho') = \frac{\rho \cdot \rho'}{\sigma^4(1-r^2(\tau))} \exp\left\{-\frac{\rho^2 + \rho'^2}{2\sigma^2[1-r^2(\tau)]}\right\} I_0\left\{\frac{r(\tau)\rho\rho'}{\sigma^2[1-r^2(\tau)]}\right\}$$

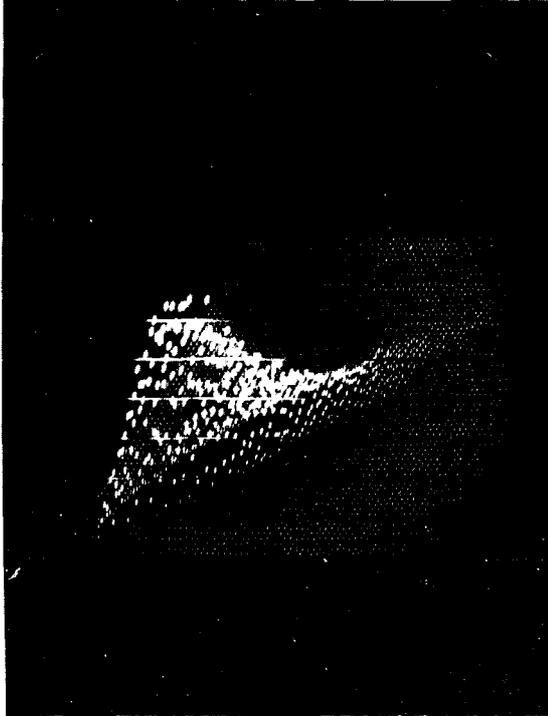
où $r(\tau)$ est l'enveloppe de la fonction de corrélation normalisée de $R(t)$.

et σ l'écart type de la fonction aléatoire $X(t)$.

Les deux oscillogrammes montrent une dépendance stochastique encore très forte : les valeurs possibles ne s'éloignent pas beaucoup de la droite $X = Y$.

Il est remarquable de voir que dans le cas de l'émission d'une fréquence pure f_0 la dépendance stochastique est encore plus forte pour un retard

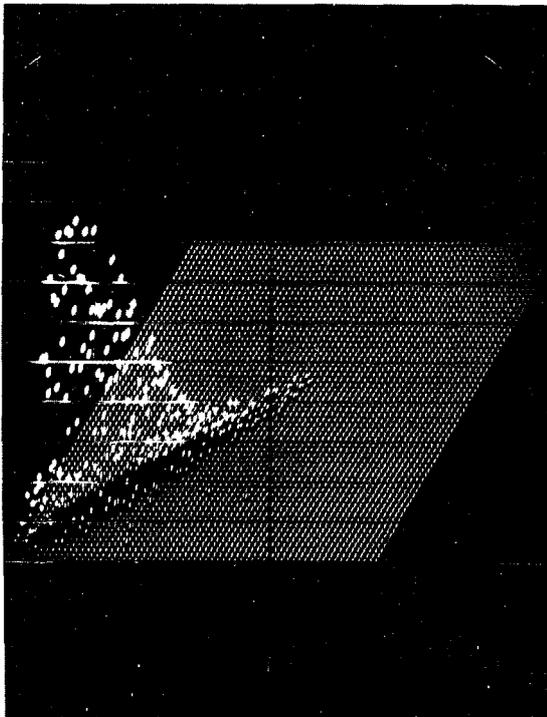
$\tau = 907 \mu s$ que dans le cas de l'émission d'un bruit de bande relative $\frac{\Delta f}{f} = \frac{1}{10}$ pour un retard $\tau = 112 \mu s$. L'influence de la date t_0 à laquelle on fait les histogrammes est sans importance sur leur nature ; de nombreuses expériences sont venues confirmer ce résultat.



Emission d'un bruit :

$$\zeta = 112, s$$

$$t_0 = 750 \text{ ms}$$



Emission d'une fréquence pure :

$$\zeta = 907 \text{ s}$$

$$t_0 = 650 \text{ ms}$$

Histogrammes bidimensionnels d'enveloppe.

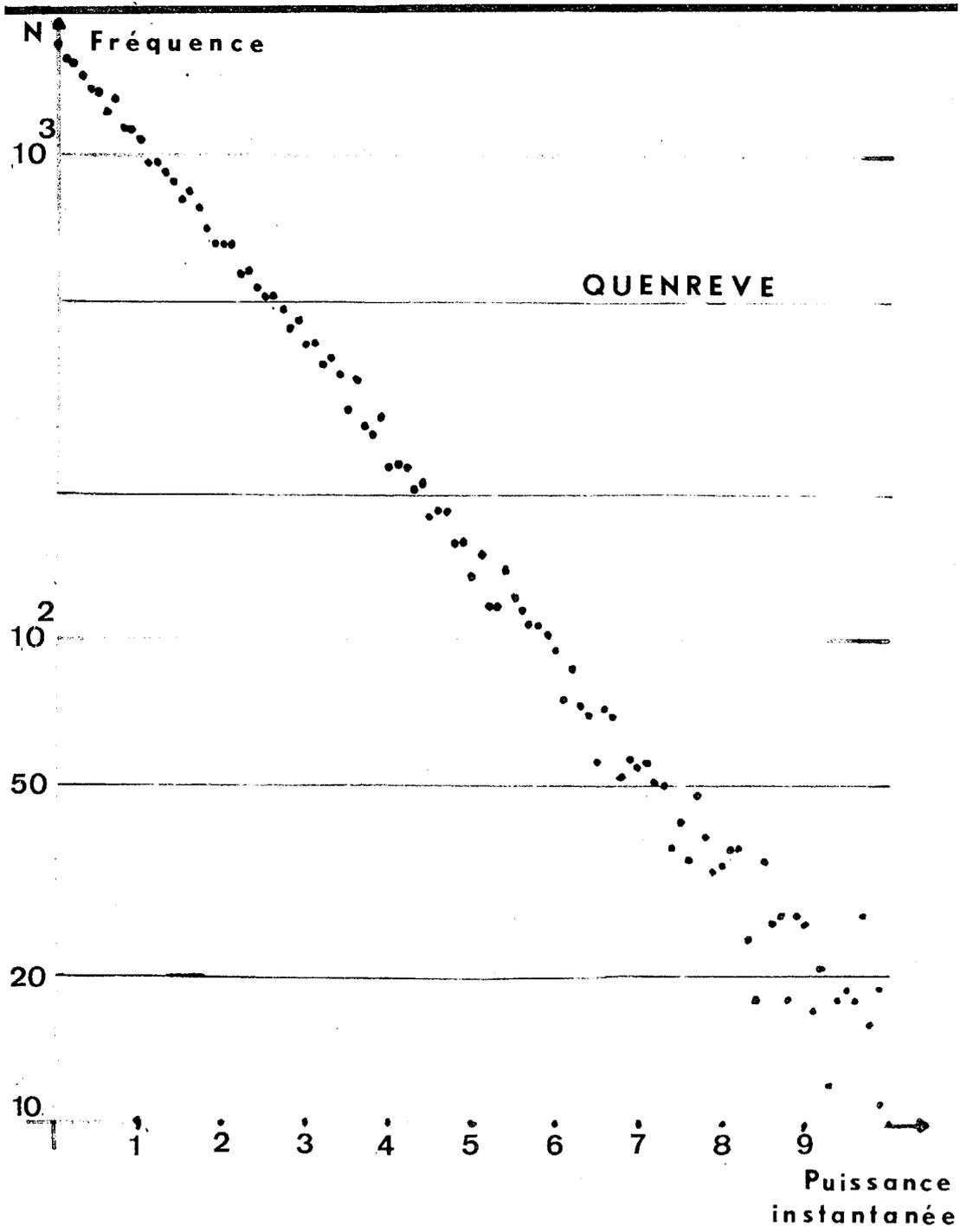


3.7 Densité de probabilité de la puissance instantanée

La détection au lieu d'être linéaire est cette fois quadratique. Les histogrammes sont obtenus comme précédemment. Suivant notre modèle, ce sont des estimations de $P_I(i) = \frac{1}{\langle i \rangle} \exp - \frac{i}{\langle i \rangle}$, c'est pourquoi on les a représentés avec une échelle logarithmique pour les ordonnées. Les points expérimentaux se placent bien sur une droite. Les fréquences faibles ont une assez grande dispersion comme il est normal.

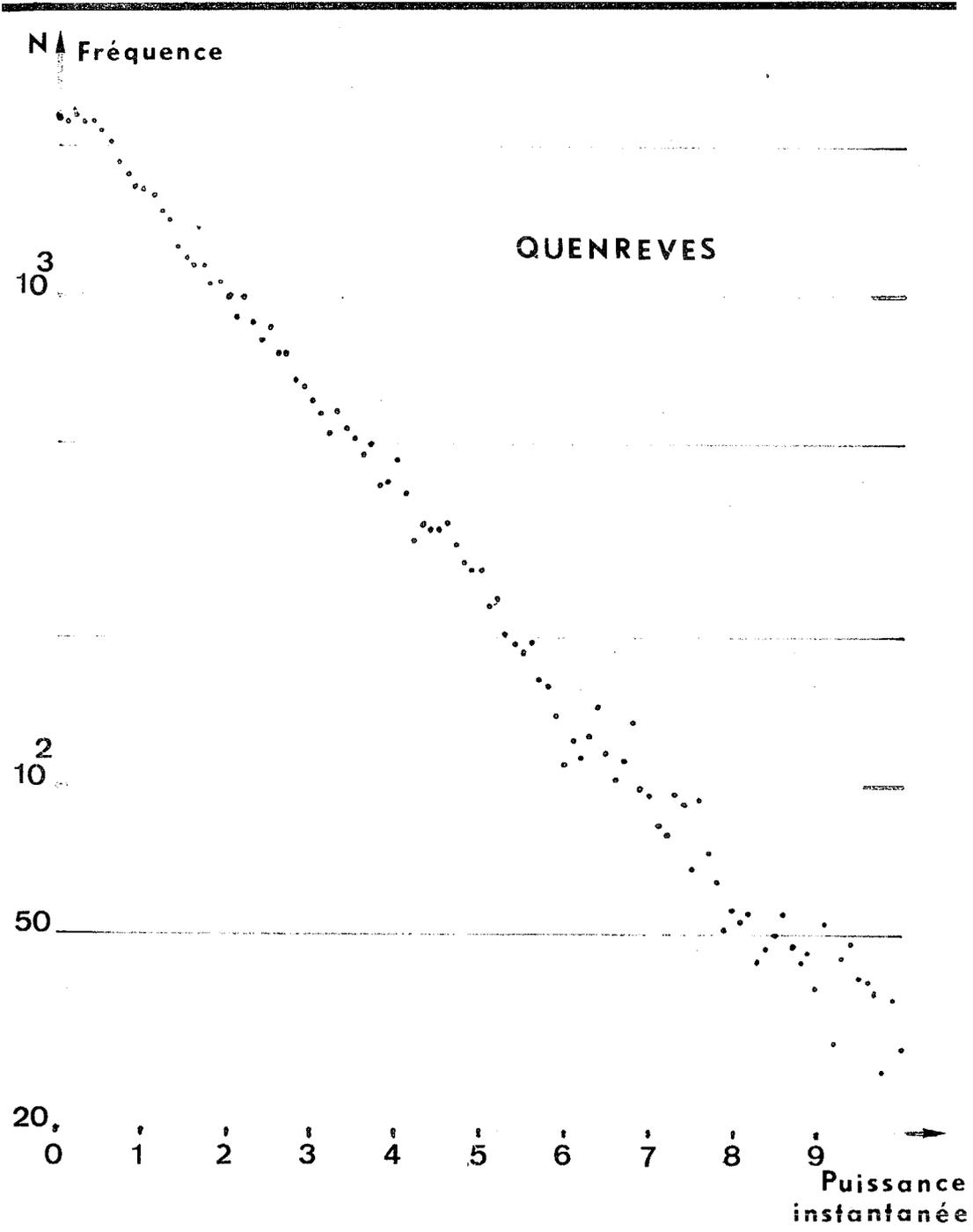
3.8 Validité de la représentation $R(t) = f(t) \cdot X(t)$

Nous avons vu indirectement en mettant en évidence la propriété de quasistationnarité, que la réverbération possède une composante certaine $f(t)$. Cette fonction $f(t)$ ne peut en général être isolée en faisant une détection car $X(t)$ a souvent une enveloppe dont le spectre basse fréquence ne peut être séparé par filtrage de $f(t)$. L'étude de l'écart type pour différentes dates nous a permis de construire le graphe de $y = \sigma \cdot f(t)$ mais c'est un moyen qui nécessite de nombreuses réalisations. Les histogrammes réalisés, que ce soit pour les valeurs instantanées, pour l'enveloppe ou pour la puissance montrent que $X(t)$ est une fonction aléatoire gaussienne. Les types d'émission à bandes relatives faibles que l'on a étudiés donnent à la réverbération une composante $X(t)$ qui peut être formulée en introduisant le signal analytique. Les oscillogrammes mettent en évidence une fréquence porteuse pour les deux types d'émissions, cependant l'enveloppe évolue beaucoup plus rapidement dans le cas d'une émission de bruit. Si nous considérons le signal de réverbération dans le cas d'une émission



Emission de bruit

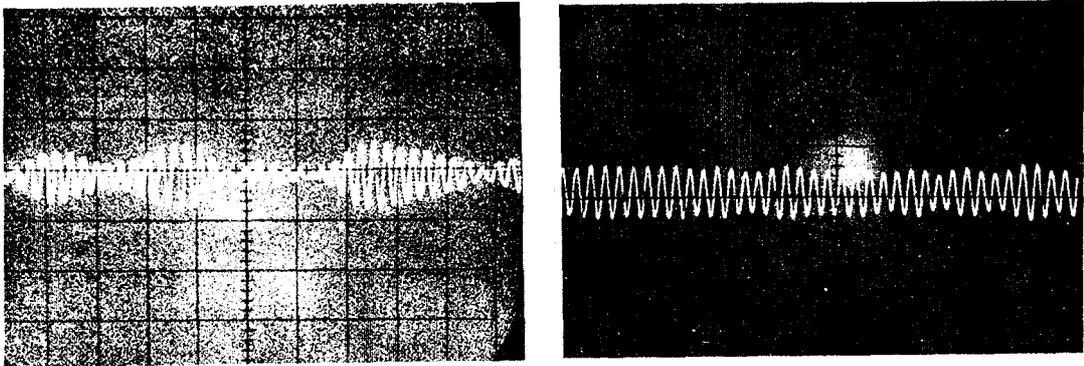
Histogramme de la puissance instantanée



Emission d'une fréquence pure ,
histogramme de la puissance instantanée.



sinusoïdale, dire que la réverbération a une amplitude qui suit une loi de GAUSS paraît inquiétant au sens habituel où nous l'entendons, lequel suppose l'ergodisme. Nous pouvons dire que $X(t)$ est une fonction aléatoire gaussienne uniquement parce que, quel que soit t , la variable $X(t)$ suit une loi de GAUSS. L'amplitude change d'une réalisation à l'autre, dans le temps, la loi suivie est presque certaine, comme pour un écho qui serait à peine distordu.



Oscillogramme de réverbération : 0,2 ms/carreau,
à gauche pour une émission de bruit,
à droite pour l'émission d'une fréquence pure.

Ceci est valable pour des durées inférieures au support de la fonction de corrélation, qui dépend de l'émission et de la déformation apportée par le milieu. Grossièrement on peut considérer que l'on a une fonction composée de sections de sinuscoïde $y = A \sin x$, d'amplitudes A aléatoires et de loi $P_A(a)$.

On a alors :

$$P_Y(y) = \int_0^{\infty} P_{Y|A=a}(y) \cdot P_A(a) da$$



Si la phase est équi-répartie "sur $0 - 2\pi$ "

$$P_{Y/A=a}(y) = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - y^2}} \quad -a \leq y \leq a$$

et $P_{Y/A=a}(y) = 0$ sinon

Si A suit une loi de RAYLEIGH

$$P_A(a) = \frac{a}{\sigma^2} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}$$

La loi des amplitudes est alors donnée par

$$P_Y(y) = \int_0^{\infty} \frac{a e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}}{\pi \sigma^2 \sqrt{a^2 - y^2}}$$

Le changement de variable $a^2 - y^2 = z$ donne

$$P_Y(y) = \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \cdot \frac{e^{-\frac{y^2+z}{2\sigma^2}}}{\sqrt{z}} dz$$

car $P_{Y/A=a}(y) = 0$ lorsque $z < 0$

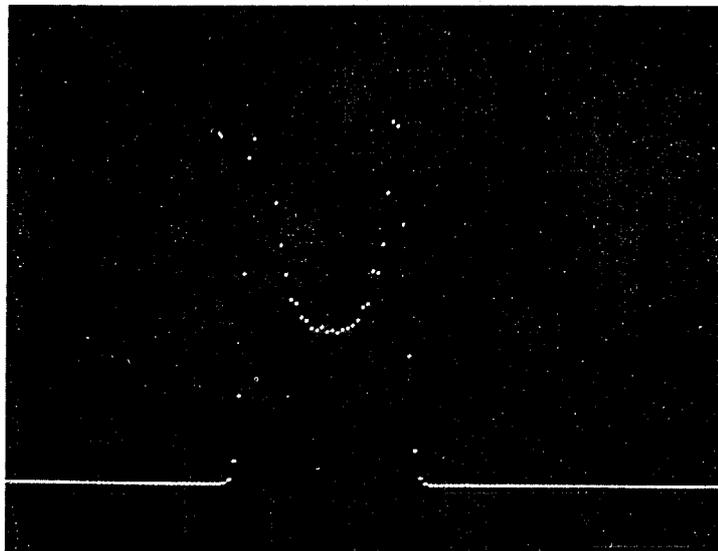
On peut écrire

$$P_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{z}{2\sigma^2}} dz}{\sigma \sqrt{\pi} \sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$$



L'intégrale est égale à 1, c'est la valeur de la fonction de répartition d'une variable gaussienne élevée au carré, à l'infini.

On trouve ainsi que l'amplitude suit une loi de GAUSS. L'étude de la réverbération dans des fenêtres très étroites relève à coup sûr de ce processus. Nous avons d'ailleurs mis en évidence cette cohérence temporelle de la réverbération en faisant l'histogramme de $R(t)$ quand $f(t)$. $\rho(t) = A$ constant. $R(t)$ est échantillonné mais les échantillons ne sont classés que lorsque l'enveloppe $\rho(t) \cdot f(t)$ est comprise entre les deux valeurs rapprochées $A - \frac{\Delta a}{2}$ et $\frac{A + \Delta a}{2}$. L'histogramme obtenue est celui de $A \cos[\omega t + \phi(t)]$ (t), il doit représenter

$$P_{\gamma} \frac{1}{\pi \sqrt{A^2 - \gamma^2}}$$


Histogramme de $\cos(\omega t + \phi(t))$, troisième facteur,
La représentation $R(t) = f(t) \cdot \rho(t) \cdot \cos(\omega t + \phi(t))$



L'oscillogramme montre que c'est bien le résultat obtenu à cela près que l'on n'a pas une résolution infinie sur A , que y est quantifié, on ne peut donc pas avoir d'asymptotes.

CONCLUSION.

La réverbération est un phénomène très gênant. Aléatoire d'une émission à l'autre, il conserve des propriétés du signal émis. On peut s'affranchir de la non stationnarité par un correcteur de gain approprié qui doit s'adapter aux changements de conditions expérimentales. Ensuite le filtrage adapté dans le cas de l'émission d'une fréquence pure n'est pas très performant, ne serait ce que parce que la réverbération ne peut être considérée comme gaussienne sur la durée d'un signal. L'ergodisme en quelque sorte est mis en défaut, car si d'une réalisation à l'autre on peut parler de fonction aléatoire, l'aspect temporel, au moins sur les durées qui nous intéressent, peut garder les caractéristiques du signal certain émis.



BIBLIOGRAPHIE

- 1 P. FAURE - Theoretical Model of reverberation Noise. JASA 1964, vol. 36, p. 259.
- 2 P. FAURE - Modèle statistique de la réverbération. Conférence présentée au Colloque OTAN/MARINE NATIONALE "Traitement du Signal", Grenoble 1964, édité par le CEPHAG. (2 ref.)
- 3 V.V. OL'SHEVSKII - Probability distribution of sea reverberation levels. Soviet Physics-Acoustics - Avril/Juin 1964. Vol.9 N° 4.
- 4 V.V. OL'SHEVSKII - Characteristics of Sea reverberation. Special research report - Consultants bureau N.Y. 1967. (58 ref.)
- 5 P.B. ANDREEVA & E.G. KHARAT'YAN - Sound scattering by the surface of the ocean and by surface scattering Layers. Soviet Physics - Acoustics, Avril/Juin 1967 - Vol. 12, N° 4 (13 réf.)
- 6 W.C. MEECHAM - FOURIER transform Method for the treatment of the problem of radiation from irregular surfaces. JASA, 1956 - Vol. 28, N° 3, p. 370. (6 ref.)
- 7 H. W. MARSH - Exact solution of wave scattering by Irregular Surfaces - JASA 1961 - vol. 33 n° 3 p. 330 (1 ref)
- 8 G.R. GARRISON, S.R. MURPHY, D.S. POTTER - Measurements of the backscattering of underwater sound from the sea surface.- JASA 1960 - vol. 32 n° 1
- 9 R.J. URICK - R.M. HOOVER - Backscattering of sound from the sea surface, its Measurements, causes, and application to the prediction of reverberation levels - JASA 1956 - vol. 28 n° 6 p. 1038 (6ref.)
- 10 R.P. PATTERSON - backscatter of sound from a rough boundary JASA 1961 vol. 35 n° 12 p. 2010 (9 ref.)
- 11 R.M. RICHTER - Measurement of Backscattering from the sea surface JASA 1964 vol. 36 n° 5 p. 864



BIBLIOGRAPHIE (suite)

- 12 W.J. TOULIS - Acoustic - wave - theory interpretation of surface and bottom reverberation
JASA 1963 vol. 35 n° 5 p. 656 (13 ref.)
- 13 R.A. D'ANTONIO - R.F. HILL - Distorsion of underwater acoustic signals reflected from a time space random surface JASA 1965 vol. 38 n° 5 p.701 (6 ref.)
- 14 Carl ECKART - The scattering of sound from the sea surface - JASA 1953 vol. 25 n°3 p. 566 (6 ref.)
- 15 R.H. HELLEN - Doppler shift of sonar backscatter from sea surface - JASA 1964 vol. 36 n° p.1395
- 16 R.J. URICK - Principales of underwater sound for engineers - Mc Graw Hill Book Company.
- 17 H. MERMOZ - Résumé des idées de bases sur les filtrages optimaux (temporel et spatialen détection active) - Laboratoire D.S.M. du Brusac - Rapport interne n° 18 940 DSM/B.
- 18 S.M. GARBER - Hight resolution sonar signals in multipath environment. Supplement to I.E.E. transactions on Aerospace and electronics systems 1966 vol. AES 2 n° 6 (5 ref.)