DEUXIÈME COLLOQUE
SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL
ET SES APPLICATIONS
NICE - 5 AU 10 MAI 1969

MODELE DE BRUIT NON GAUSSIEN. APPLICATION A LA THEORIE DE LA DETECTION.

par

B. PICINBONO et G. VEZZOSI

Institut d'Electronique Fondamentale - Faculté des Sciences -
. 91 - ORSAY.

Après une brève discussion de la notion de stationnarité, on présente un modèle statistique de fonction aléatoire pouvant représenter un bruit apparemment stationnaire pendant la durée d'un signal mais présentant des variations aléatoires de puissance. Les propriétés statistiques sont complètement définies par des familles de fonctions caractéristiques. Ce bruit n'étant pas gaussien, on étudie le problème de la détection d'un signal certain et on montre que le système optimal n'est pas un système linéaire. Pour un cas particulier, on montre, moyennant certaines approximations, que ce système est formé d'un filtrage adapté suivi d'un régulateur de gain.

After a short review of the concept of stationarity, we study a statistical model of stochastic process which can describe a noise which seems stationary for a short time intervall (e.g. duration of a signal), but has slow variation of the power. This noise is defined by a family of characteristic functions and is non gaussian. We study the problem of detection of a deterministic signal in this noise and we show that the optimum system is not linear. For a particular application we show that this system is obtained by, a regulation of the power and a matched filtering.

DEUXIÈME COLLOQUE
SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL
ET SES APPLICATIONS
NICE - 5 AU 10 MAI 1969

MODELE DE BRUIT NON GAUSSIEN. APPLICATION A LA THEORIE DE LA DETECTION.

par

B. PICINBONO et G. VEZZOSI
Institut d'Electronique Fondamentale - Faculté des Sciences -
91 - ORSAY.

I. - INTRODUCTION.

La plupart des travaux concernant le traitement du signal utilisent l'hypothèse du bruit parasite stationnaire et gaussien. Cette hypothèse, qui permet de mener à bien des calculs qui, sans elle, seraient pratiquement inextricables, est heureusement très souvent vérifiée dans la pratique.

Cependant, et en particulier en Acoustique sous-marine, les bruits réels semblent avoir une structure plus complexe. Tout d'abord, l'hypothèse gaussienne ne semble pas toujours acceptable, et certains phénomènes transitoires ou impulsifs montrent un écart net à la loi de Gauss.

Mais c'est surtout la stationnarité qui semble la plus critiquée. Cependant, cette notion n'est pas toujours comprise de façon très claire et, pour la discussion ultérieure, il est nécessaire de préciser un peu ce point.

Un bruit gaussien non stationnaire est défini par sa covariance, et la plupart des théories statistiques de la détection peuvent s'appliquer lorsque cette covariance est connue.

Mais un tel bruit est, dans une certaine mesure, trop déterministe. En particulier, la puissance instantanée $E[X^2(t)]$ est une fonction connue du temps. Or, il semble que dans les phénomènes réels cette puissance varie d'une manière beaucoup moins déterministe, et à la limite est aléatoire. De proche en proche, on aboutit donc à l'idée de processus gaussien composé qui serait un processus gaussien dont la covariance serait elle-même aléatoire. La définition de tels processus est assez délicate et nous ne l'examinerons pas en détail ici (1). Ce que nous pouvons retenir cependant, c'est le fait que ce que les expérimentateurs appellent "bruit non stationnaire" peut très bien être représenté par un processus aléatoire stationnaire au sens strict mais comportant plusieurs temps caractéristiques. Pour des mesures assez brèves (par exemple pendant la durée d'un signal) le bruit paraît stationnaire. Pour des durées plus longues, certains paramètres comme la puissance peuvent varier aléatoirement. Enfin, considérés de $-\infty$ à $+\infty$ ces bruits sont stationnaires.

Dans cet exposé, nous présentons un modèle statistique pour un tel bruit et nous présentons une tentative d'appliquer dans ce cas la théorie de la détection.

II. - MODELE STATISTIQUE.

Considérons la fonction aléatoire (f.a.) B(t) définie par :

$$B(t) = \sqrt{A(t)}\; X(t) . \qquad (2-1)$$

où X(t) est une f.a. gaussienne centrée et stationnaire de fonction de corrélation $\Gamma_X(\tau)$ et A(t) une f.a. stationnaire, positive et indépendante de X(t). On a évidemment $E\left[B(t)\right] = 0$.

Supposons que A(t) soit à variation lente, c'est-à-dire que

$$\tau_a \gg \tau_x \; ; \qquad (2-2)$$

τ_a et τ_x étant les "temps de corrélation" de A(t) et X(t). Ceci signifie que A(t) ne varie pas sur des intervalles de temps où les valeurs de X(t) deviennent indépendantes, et on peut alors écrire :

$$\Gamma_B(\tau) = E\left[B(t)\,B(t-\tau)\right] = E\left[A\right]\Gamma_x(\tau) \qquad (2\text{-}3)$$

Cependant, si on fait une observation sur un temps court devant τ_a et grand devant τ_x, la fonction de corrélation apparente peut s'écrire :

$$\Gamma'_B(\tau) = A(t)\,\Gamma_x(\tau)\,, \qquad (2\text{-}4)$$

la fonction A(t) représentant les variations aléatoires de $\Gamma'_B(0) = E\left[B^2(t)\right]$.

Tout ceci peut se présenter dans un langage beaucoup plus rigoureux en utilisant les fonctions composées. En particulier, $\Gamma'_B(\tau)$ apparaît comme une fonction de corrélation conditionnelle et $\Gamma_B(\tau)$ est la fonction de corrélation a priori.

Dans toute la suite, nous nous intéresserons toujours à des instants $\{t_i\}$ se trouvant dans des intervalles de temps très petits devant τ_a. Dans ces conditions, la fonction caractéristique de la v.a. n dimensionnelle $B(t_1)\ldots B(t_n)$ peut s'écrire :

$$\varphi_B\left[u_1\ldots u_n\right] = E\left\{\exp - \frac{1}{2}\,A\;C_{ij}\,u_i\,u_j\right\} \qquad (2\text{-}5)$$

où $C_{ij} = \Gamma_X(t_i - t_j)$, la valeur moyenne dans l'équation (2-5) étant évidemment prise par rapport à A.

Dans une certaine mesure, on peut dire que pour ces instants $\{t_i\}$ B(t) peut être considéré comme le produit de X(t) par une v.a. $\sqrt{A}$ indépendante de X(t). Evidemment, dans la pratique, il faut que A dépende de t, sinon B(t) ne serait pas ergodique. Remarquons à ce stade que $\varphi_B\left[\{u_i\}\right]$ définie par l'équation (2-5) est la fonction caractéristique d'un processus sphériquement invariant étudié par différents auteurs (2) (3) (4). Dans la suite de cet exposé, nous supposerons que X(t) est un bruit blanc, ou, pour éviter les nombreuses difficultés mathématiques posées par un tel processus (5) que le spectre de X(t) est constant dans une bande -B+B très grande devant l'inverse de tous les intervalles de temps que nous considérerons ici. Dès lors, C_{ij} de l'équation (2-5) peut s'écrire :

$$C_{ij} = \sigma^2 \delta_{ij} \qquad (2\text{-}6)$$

et ainsi la fonction caractéristique (2-5) devient

$$\varphi_B \left[\{u_i\} \right] = \varphi_A \left[\frac{i}{2} \sigma^2 \sum_1^n{}_i \; u_i^2 \right] \qquad (2\text{-}7)$$

où φ_A est la f. c. de la v. a. A.

La densité de probabilité s'obtient par transformation de Fourier et par un calcul classique (6) peut s'écrire :

$$\rho \left[\{x_i\} \right] = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \; \pi^{n-2/2}} \int_0^\infty \varphi_A \left[\frac{i}{2} \sigma^2 \lambda^2 \right] \lambda^{n/2} J_{n-2/2}(\lambda\pi) d\lambda$$

(2-8)

où $J_k(x)$ est la fonction de Bessel d'ordre k.

En fait, il est souvent plus commode d'utiliser une méthode indiquée dans la référence (4) et qui consiste à partir directement de l'équation (2-5). Conditionnellement à une valeur de A donnée, on a une f. a. gaussienne dont la loi de probabilité s'écrit, compte tenu de l'équation (2-6),

$$p_a(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \frac{1}{(\sqrt{a}\;\sigma)^n} \exp - \frac{1}{2} \frac{1}{a\,\sigma^2} \sum_1^n{}_i \; x_i^2$$

(2-9)

de sorte que la loi a priori s'obtient par :

$$p_B(x_1 \ldots x_n) = \int_0^\infty p_a(x_1 \ldots x_n) \; p(a) \, da \qquad (2\text{-}10)$$

Evidemment, on retrouve les expressions classiques de la loi de Gauss en supposant que A n'est pas aléatoire, c'est-à-dire que $\varphi_A(u) = e^{iau}$.

Dans la suite de ce paragraphe, nous allons supposer que A est aléatoire et possède une loi de probabilité exponentielle, c'est-à-dire que :

$$\varphi_A(u) = \frac{1}{1 - iu} \quad \text{ou} \quad p(a) = e^{-a} \tag{2-11}$$

Comme nous le verrons, cette loi permet des calculs relativement aisés, mais peut également apparaître dans certains phénomènes physiques. On sait, en effet, que si $\sqrt{A}$ obéit à une loi de Rayleigh (amplitude instantanée d'un phénomène gaussien à bande étroite), A possède une f. c. définie par l'équation (2-9). On peut donc considérer que X(t) est modulé par l'amplitude d'un bruit gaussien à bande étroite. Une telle situation apparaît dans certains problèmes d'Optique Statistique.

En utilisant les équations (2-9), (2-10) et p(a) donné par (2-11), ainsi que la définition des fonctions de Bessel K (z) (7), on obtient simplement :

$$p_B\left[\{x_i\}\right] = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\,\sigma)^n} \cdot 2 \cdot \left[\frac{\sum_1^n {}_i\, x_i^2}{2\,\sigma^2}\right]^{\frac{2-n}{4}} K_{\frac{n}{2}-1}\left[2\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{2\,\sigma^2}}\right] \tag{2-12}$$

Nous allons maintenant utiliser ces expressions pour étudier le problème de la détection d'un signal certain dans un bruit correspondant au modèle étudié ici.

III. - APPLICATION A LA DETECTION.

Supposons qu'on veuille étudier le problème de la détection d'un signal certain dans un bruit du type étudié au paragraphe précédent.

Si $A(t)$ est une constante non aléatoire, ce bruit est gaussien et blanc et on sait que le récepteur optimal est alors le filtrage adapté, c'est-à-dire un système réalisant des opérations linéaires sur les observations.

Supposons maintenant que $A(t)$ soit aléatoire et, par exemple, défini par la loi exponentielle (2-11). Cette situation peut correspondre à la détection d'un signal dont la durée est petite devant τ_a

Si l'on applique le critère du rapport (S/B), on retrouve évidemment le filtrage adapté, puisque le résultat est indépendant de la nature statistique du bruit parasite. Mais on sait également que cette théorie ne fournit pas le récepteur idéal qui doit construire le rapport de vraisemblance.

Admettons tout d'abord que l'observation du signal soit constituée par la connaissance de n échantillons. Dans ce cas, le rapport de vraisemblance s'obtient en utilisant l'équation (2-12) et peut s'écrire :

$$L\left[\{x_i\}\right] = \frac{p_{S+B}\left[\{x_i\}\right]}{p_B\left[\{x_i\}\right]}$$

$$= \left(\frac{r}{r'}\right)^{\frac{n}{2}-1} \frac{K_{\frac{n}{2}-1}\left[\sqrt{\frac{2}{\sigma^2}}\; r'\right]}{K_{\frac{n}{2}-1}\left[\sqrt{\frac{2}{\sigma^2}}\; r\right]} \qquad (3\text{-}1)$$

avec

$$r^2 = \sum_1^n {}_i \; x^2 \qquad \text{et} \qquad r'^2 = \sum_1^n {}_i \; (x_i - s_i)^2 \tag{3-2}$$

De toute évidence, ce rapport de vraisemblance, d'ailleurs très difficile à calculer, n'est pas une fonction linéaire des observations $\{x_i\}$ et par conséquent le filtrage adapté n'est pas l'opération de détection optimale.

Pour la discussion, il est intéressant d'avoir une autre expression de $L\left[\{x_i\}\right]$. En reprenant les équations (2-9) et (2-10), où l'on suppose pour simplifier $\sigma = 1$, on voit alors que l'on peut écrire :

$$L\left[\{x_i\}\right] = \frac{\displaystyle\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{n/2} \exp - \frac{\sum (x_i - s_i)^2}{2a} \; p(a)\, da}{\displaystyle\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{n/2} \exp - \frac{\sum x_i^2}{2a} \; p(a)\, da} \tag{3-3}$$

En faisant un changement de variables du type :

$$a = u \sum \alpha_i^2 \tag{3-4}$$

où α_i est $(x_i - s_i)$ pour le numérateur et x_i pour le dénominateur, il vient :

$$L\left[\{x_i\}\right] = \left[\frac{\sum x_i^2}{\sum (x_i - s_i)^2}\right]^{\frac{n}{2} - 1} R\left[\{x_i\}\right] \tag{3-5}$$

où $R\left[\{x_i\}\right]$ est le rapport des intégrales :

$$R\left[\{x_i\}\right] = \frac{\displaystyle\int_0^\infty u^{-n/2} \exp - \frac{1}{2u} \; p\left[u \sum (x_i - s_i)^2\right] du}{\displaystyle\int_0^\infty u^{-n/2} \exp - \frac{1}{2u} \; p\left[u \sum x_i^2\right] du} \tag{3-6}$$

La fonction $u^{-n/2} \; e^{-\frac{1}{2u}}$ est nulle à l'origine et possède un maximum au point $u_o = \frac{1}{n}$. Donc, si n est assez grand et p(a) suffisamment régulière (par exemple bornée et non nulle au voisinage de l'origine), on a approximativement :

$$R\left[\{x_i\}\right] = \frac{p\left[\sum \frac{(s_i - x_i)^2}{n}\right]}{p\left[\sum \frac{x_i^2}{n}\right]} \tag{3-7}$$

Pour se faire une idée du rapport de vraisemblance, supposons le signal très petit. Dans ce cas, on peut écrire comme d'autres auteurs (8) (9) :

$$L\left[\{x_i\}\right] = 1 + \sum_i s_i \frac{\partial L}{\partial s_i} \tag{3-8}$$

qui, en utilisant les équations (3-6) et (3-7) peut s'écrire :

$$L\left[\{x_i\}\right] = 1 + \sum_{1}^{n} {}_i \; s_i \, x_i \left\{ \frac{n-2}{\sum x_i^2} - \frac{2}{n}\left[\frac{1}{p}\frac{dp}{da}\right]_{a = \frac{\sum x_i^2}{n}} \right\} \tag{3-9}$$

Si la dérivée logarithmique est bornée (ce qui est le cas pour la loi exponentielle) et n assez grand, on a une expression approximative du rapport de vraisemblance:

$$L\left[\{x_i\}\right] = 1 + (n-2)\ \frac{\sum s_i x_i}{\sum x_i^2} \qquad (3\text{-}10)$$

Dans le cas du bruit gaussien stationnaire, le dénominateur $\sum x_i^2$ n'apparaît pas, et $\sum s_i x_i$ est une approximation du filtrage adapté. Pour notre cas, on voit qu'il faut diviser cette sortie par une estimation au moyen des échantillons x_i de l'énergie du bruit. C'est une opération assez semblable à celle effectuée par un contrôle automatique de gain.

Naturellement, dans ce travail préliminaire nous supposons toujours que n est fini. Les problèmes assez délicats de passage à la limite seront abordés dans une étude plus générale.

Références.

(1) B. PICINBONO et J. POUGET, Communication au Congrès de Théorie de l'Information, Janvier 1968, Ellenville, N.Y.

(2) A.M. VERSHIK, Theory of Probability and its applications, 9, 353, (1964).

(3) I.F. BLAKE et I.B. THOMAS, I.E.E.E. Trans. Inf. Theory, IT, 14, 12, 1968.

(4) B. PICINBONO, Spherically invariant and compound gaussian stochastic processes, à paraître.

(5) E. MOURIER, Ann. Télécom., 7-8, 169, (1964).

(6) Voir réf. (3), formule (5).

(7) G.N. WATSON, Theory of Bessel Functions, p. 183, formule 15.

(8) P. RUDNICK, J. Appl. Phys., 32, 140, (1961).

(9) F. BRYNX, J. Acoust. Soc. Amer., 34, 289, (1962).