DEUXIÈME COLLOQUE
SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL
ET SES APPLICATIONS
NICE - 5 AU 10 MAI 1969

LES REPARTITIONS PONCTUELLES MARKOVIENNES ; ESTIMATIONS ET TESTS CONCERNANT LEURS LOIS DE PROBABILITE.

R. FORTET et M. KAMBOUZIA
(Paris)

RESUME :

Soit $\mathcal{L}$ la loi de probabilité d'une répartition ponctuelle aléatoire $R = \{0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots \leq \tau_\alpha \leq \tau_{\alpha+1} \leq \cdots\}$ sur $[0,+\infty)$, pour laquelle on pose, pour tout $t \in [0,+\infty)$,

$$N(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq \tau_1 \ ; \\ n & \text{si} \quad \tau_n < t \leq \tau_{n+1} \quad (n = 1,2,3,\ldots) \ . \end{cases}$$

L'article détermine la structure de $\mathcal{L}$ nécessaire et suffisante :

1°) Pour que R soit Markovienne, c'est à dire pour que la fonction aléatoire $N(t)$ soit Markovienne sur $[0,+\infty)$.

2°) Pour que R soit cumulative, c'est à dire pour que, pour tout $T > 0$ fixé et pour tout entier $n > 0$, la loi de probabilité de $\{\tau_1,\ldots,\tau_n\}$ conditionnelle quand $N(T) = n$, soit la loi uniforme sur le domaine : $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \ldots \leq \tau_n < T$.

Il est montré que, si R est cumulative et n'est pas un processus de Poisson, l'observation même indéfiniment prolongée d'une seule réalisation de R ne permet pas d'inférence convergente sur sa loi $\mathcal{L}$.

DEUXIÈME COLLOQUE
SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL
ET SES APPLICATIONS
NICE - 5 AU 10 MAI 1969

LES REPARTITIONS PONCTUELLES MARKOVIENNES ; ESTIMATIONS ET TESTS CONCERNANT LEURS LOIS DE PROBABILITE.

R. FORTET et M. KAMBOUZIA
(Paris)

SUMMARY : Let $\mathcal{L}$ be the probability law of a random points distribution $R = \{0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_\alpha \leq \tau_{\alpha+1} \leq \dots\}$ over $[0,+\infty)$; for every $t \in [0,+\infty)$, it is put :

$$N(t) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad t \leq \tau_1 \quad ; \\ n & \text{if} \quad \tau_n < t \leq \tau_{n+1} \quad (n = 1,2,3,\dots). \end{cases}$$

The paper determines the necessary and sufficient structure of $\mathcal{L}$:

1°) For R to be Markovian, that is to say for the random function $N(t)$ to be Markovian over $[0,+\infty)$.

2°) For R to be cumulative ; R is said to be cumulative, if for every fixed $T > 0$ and every positiv integer n, the probability law of $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$ conditionnal when $N(T) = n$ is the uniform law over the domain : $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_n$.

It is shown that : if R is cumulative, and if R is not a Poisson process, the observation of a unique realization of R over $[0,T]$, even if T is arbitrary large, does not permit any convergent inference on $\mathcal{L}$.

LES REPARTITIONS PONCTUELLES MARKOVIENNES ; ESTIMATIONS ET TESTS CONCERNANT LEURS LOIS DE PROBABILITE.

R. FORTET et M. KAMBOUZIA (Paris).

1°)-DEFINITION DES REPARTITIONS PONCTUELLES MARKOVIENNES :

Soit $\{U_1, U_2, \ldots, U_\alpha, \ldots\}$ une suite dénombrable ordonnée de variables aléatoires U_α $(\alpha = 1,2,3,\ldots)$ non-négatives. Posons :

$$\begin{aligned} &G_1(u) = \Pr(U_1 < u) \quad , \\ &G_{\alpha+1}(u_1 u_2, \ldots, u\,; u) = \Pr(U_{\alpha+1} < u / U_1 = u_1, U_2 = u_2, \ldots, U_\alpha = u_\alpha) \\ &\qquad (\alpha = 1,2,3,\ldots) \quad ; \end{aligned} \tag{1,1}$$

et faisons la restriction que :

$$G_{\alpha+1}(u_1, u_2, \ldots, u_\alpha ; +0) = 0 \quad \forall \alpha \geqq 1, u_1, u_2, \ldots, u_\alpha \geqq 0. \tag{1,2}$$

Posons :

$$\mathcal{T}_1 = U_1 \quad , \quad \mathcal{T}_\alpha = \sum_{\beta=1}^{\alpha} U_\beta \quad (\alpha = 1,2,3,\ldots) \quad ; \tag{1,3}$$

$$\left.\begin{aligned} &F_1(u) = G_1(u) \quad , \\ &F_{\alpha+1}(\tau_\alpha ; u) = \Pr(U_{\alpha+1} < u / \mathcal{T}_\alpha = \tau_\alpha) \quad (\alpha = 1,2,3,\ldots) \quad ; \end{aligned}\right\} \tag{1,4}$$

$$N(t) = \left\{\begin{aligned} &0 \quad \text{si} \quad \mathcal{T}_1 \geqq t \quad , \\ &n \quad \text{si} \quad \mathcal{T}_n < t \leqq \mathcal{T}_{n+1} \quad (n = 1,2,3,\ldots) \end{aligned}\right\} \quad (t \geqq 0) \tag{1,5}$$

A la restriction (1,2) près, le système $R = \{\mathcal{T}_\alpha \; ; \; \alpha = 1,2,3,\ldots\}$ des $\mathcal{T}_\alpha$ constitue la répartition ponctuelle aléatoire sur le demi-axe des temps $t \in [0, +\infty)$ la plus générale.

La signification, par rapport à cette répartition ponctuelle aléatoire, de la fonction aléatoire $N(t)$ est évidente ; nous dirons que la répartition ponctuelle aléatoire est Markovienne, si $N(t)$ est Markovienne ; c'est à dire si quels que soient :

- l'entier $n \geq 1$,
- $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n < t < t' < +\infty$,
- l'entier $n' \geq n$,

$$\Pr\{N(t') = n'/N(t) = n \;,\; \mathcal{T}_1 = \tau_1, \mathcal{T}_2 = \tau_2, \dots \mathcal{T}_n = \tau_n\} = \Pr\{N(t') = n'/N(t) = n\} \tag{1,6}$$

Pour que $N(t)$ soit Markovienne, il faut que :

1°) Pour tout $\alpha \geq 1$,

$$G_{\alpha+1}(u_1, \dots, u_\alpha \;;\; u) = F_{\alpha+1}(\tau_\alpha \;;\; u) \;; \tag{1,7}$$

2°) Pour tout $\alpha \geq 1$, $F_{\alpha+1}(\tau_\alpha \;;\; u)$ est de la forme :

$$F_{\alpha+1}(\tau_\alpha \,,\, u) = 1 - \frac{H_{\alpha+1}(\tau_\alpha + u)}{H_{\alpha+1}(\tau_\alpha)} \;, \tag{1,8}$$

où $H_{\alpha+1}(x)$ est une fonction monotone non-croissante sur $x \in [0,+\infty)$, avec : $H_{\alpha+1}(+\infty) = 0$, et $H_{\alpha+1}(+0) < +\infty$. Bien entendu, $H_{\alpha+1}(x)$ n'intervient dans (1,8) qu'à un coefficient de proportionnalité près.

1°) et 2°) sont intuitifs et faciles à établir rigoureusement ; bornons-nous à indiquer sommairement comment on peut, une fois admis 1°), établir 2°) :

Soit $L_\alpha(\tau) = \Pr(\mathcal{T}_\alpha < \tau)$ la fonction de répartition de $\mathcal{T}_\alpha$ ($\alpha = 1,2,3,\dots$) ; pour $0 \leq \tau \leq t < t'$, et $d\tau > 0$, on a :

$$\Pr\{\tau \leq \mathcal{T}_n < \tau + d\tau, N(t) = n, N(t') = n\} = d\,L_n(\tau)\,[1 - F_{n+1}(\tau, t' - \tau)] \;; \tag{1,9}$$

mais on a aussi :

$$\begin{aligned}\Pr\{\tau \leq \mathcal{T}_n < \tau + d\tau, N(t) = n, N(t') = n\} &= \Pr\{\tau \leq \mathcal{T}_n < \tau + d\tau, N(t) = n\} \\ &\times \Pr\{N(t') = n/\mathcal{T}_n = \tau \,,\, N(t) = n\} \,, \\ &= d\,L_n(\tau)\,[1 - F_{n+1}(\tau, t - \tau)]\,\Pr\{N(t') = n/\mathcal{T}_n = \tau, N(t) = n\} \;;\end{aligned} \tag{1,10}$$

en égalant (1,9) à (1,10), on obtient :

$$\Pr\{N(t')=n/\mathcal{T}_n=\tau, N(t)=n\} = \frac{1-F_{n+1}(\tau\,;t'-\tau)}{1-F_{n+1}(\tau\,;t-\tau)} \,. \qquad (1,11)$$

Pour que la fonction aléatoire $N(t)$ soit Markovienne, il est nécessaire que le rapport (1,11) soit indépendant de τ $(0\leq\tau\leq t)$, pour tous t,t' fixés $(t < t')$; pour $\tau = t$, le rapport (1,11) vaut d'après (1, 4) :

$$\frac{1-F_{n+1}(t;t'-t)}{1-F_{n+1}(t;+0)} = 1 - F_{n+1}(t\ ;\ t'-t) \ ; \qquad (1,12)$$

pour $\tau = +0$, le rapport (1,11) vaut :

$$\frac{1-F_{n+1}(0,t')}{1-F_{n+1}(0,t)} \,, \qquad (1,13)$$

posons :

$$H_{n+1}(x) = 1 - F_{n+1}(0\ ;\ x) \qquad (x \geq 0) \ ,$$

en égalant (1,12) à (1,13), il vient :

$$F_{n+1}(t\ ;\ t'-t) = 1 - \frac{H_{n+1}(t')}{H_{n+1}(t)} \ ;$$

soit (1,8), en changeant :

- la notation n, en α ;
- la notation t, en τ_α ,
- la notation $(t'-t)$ en u ;

de sorte que : $t' = (t'-t)+t = \tau_\alpha + u$.

Il est d'autre part facile de vérifier que les conditions (1,7) , (1,8) sont suffisantes pour que $N(t)$ soit Markovienne ; nous avons donc le :

Théorème (1,1) : Pour que la fonction aléatoire $N(t)$ définie par (1,5) soit Markovienne, il faut et il suffit que pour tout entier $\alpha \geq 1$ (et avec les notations ci-dessus) :

$$G_{\alpha+1}(u_1, \ldots, u_\alpha \; ; \; u) = F_{\alpha+1}(\tau_\alpha \; ; \; u) \quad ,$$

avec :

$$F_{\alpha+1}(\tau_\alpha \; ; \; u) = 1 - \frac{H_{\alpha+1}(\tau_\alpha + u)}{H_{\alpha+1}(\tau_\alpha)} \quad , \qquad (1,14)$$

où $H_{\alpha+1}(x)$ est une fonction monotone non-croissante de $x \in [0,+\infty)$, avec : $H_{\alpha+1}(+\infty) = 0$, $H_{\alpha+1}(+0) < +\infty$ et qui n'est définie qu'à la proportionnalité près.

Remarque (1,1) : Si les conditions indiquées au Théorème (1,1) sont satisfaites, $N(t)$ est Markovienne quelle que soit $F_1(u)$; il nous sera commode pour la suite de poser :

$$F_1(u) = 1 - H_1(u) \quad . \qquad (1,15)$$

Remarque (1,2) : Les répartitions ponctuelles aléatoires Markoviennes sont souvent appelées "processus de naissances" (sans décès, ni émigrations, ni immigrations).

Remarque (1,3) : Pour les répartitions ponctuelles aléatoires que nous considérons, l'instant 0 de début de la répartition, est un instant priviligié.

2°)-OPERATEUR INFINITESIMAL ASSOCIE :

Désignons par $\mathcal{E}$ l'ensemble des entiers finis et ≥ 0 ; posons :

$$p_k^j(t,\tau) = \Pr\{N(\tau)=k / N(t)=j\} \quad (t<\tau \; ; \; t,\tau \in [0,+\infty)) ; j,k \in \mathcal{E} \quad ;$$

$$P(t,\tau) = \text{matrice d'éléments } p_k^j(t,\tau) \quad (j,k \in \mathcal{E}) \quad .$$

$$\delta^j_k = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \ , \\ 1 & \text{si } j = k \ , \end{cases} \qquad (j,k \in \mathcal{E}) .$$

I = matrice identique, d'éléments δ^j_k ;

Θ = matrice nulle, d'éléments tous nuls ;

$P_k(t) = \Pr\{N(t) = k\}$, $k \in \mathcal{E}$, $t \in [0,+\infty)$,

$P(t)$ = matrice d'éléments $P_k(t)$, $k \in \mathcal{E}$, $t \in [0,+\infty)$;

sous certaines conditions d'ailleurs très peu restrictives (pour lesquelles nous renvoyons par exemple à M. FRECHET [1]), le caractère Markovien de $N(t)$ entraine que :

$$\lim_{t \to \tau - 0} P(t,\tau) = I \quad (0 \leq t < \tau) \ , \tag{2,1}$$

$$\lim_{\tau \to t+0} P(t,\tau) = I \quad (0 \leq t < \infty) \ ; \tag{2,2}$$

et que :

$$\lim_{\Delta t \to +0} \frac{P(t,t+\Delta t)-I}{\Delta t} = Q(t) \quad (0 \leq t) \tag{2,3}$$

existe ; nous désignerons par $q^j_k(t)$ $(j,k \in \mathcal{E})$ les éléments de la matrice $Q(t)$, dont on sait qu'elle représente <u>l'opérateur infinitésimal associé</u> , on a d'ailleurs :

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t,\tau) + Q(t)\, P(t,\tau) = \Theta \ , \tag{2,4}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} P(t,\tau) = P(t,\tau)\, Q(\tau) \ . \tag{2,5}$$

On a aussi :

$$P_k(+0) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \ , \\ 0 & \text{si } k > 0 \ . \end{cases}$$

On sait que dans ces conditions, la donnée de $Q(t)$ détermine $P(t,\tau)$,

– soit par l'équation différentielle (2,4) complétée par la condition initiale (2,1) ;

– soit par l'équation différentielle (2,5) complétée par la condition initiale (2,2).

On peut donc dire que la loi de probabilité $\mathcal{L}$ de R ou de la fonction aléatoire $N(t)$ est déterminée :

– par $\{Q(t)\ ,\ t \in [0,+\infty)\}$;

– ou encore par le système des fonctions $H_\alpha(x)$, $\alpha = 1,2,3,\ldots$ La relation entre ces deux modes de description de $\mathcal{L}$ se déduit de (2,3), d'après laquelle, en supposant les $H_\alpha(x)$ dérivables :

$$q_k^j(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{H_{j+1}(t)} \frac{d}{dt} H_{j+1}(t) & \text{si } k = j \\ - \frac{1}{H_{j+1}(t)} \frac{d}{dt} H_{j+1}(t) & \text{si } k = j+1 \\ 0 & \text{dans tout autre cas.} \end{array} \right\} \qquad (2,6)$$

3°)-TESTS ET ESTIMATIONS SUR LA LOI DE PROBABILITE $\mathcal{L}$ DE $N(t)$:

Supposons que l'on observe une réalisation de R sur $[0,T]$, où $T > 0$ à une valeur fixée ; cela revient à dire que l'on observe une réalisation $n(t)$ de $N(t)$ sur $[0,T]$; quelle information cette observation S apporte-t-elle sur la loi de probabilité $\mathcal{L}$ de $N(t)$?

La question analogue pour un processus de Markov homogène quelconque, est résolue par diverses publications (parmi lesquelles on peut citer R. FORTET [1] et BUI-TRONG-LIEU [1]) ; on peut en résumer les résultats en disant que : sous des conditions très larges, les processus de Markov homogènes possèdent des propriétés ergodiques, qui assurent l'existence de tests, ou d'estimateurs, convergents lorsque $T \to +\infty$.

Mais ici nous avons affaire à une fonction aléatoire $N(t)$ qui est Markovienne, mais qui, sauf dans des cas de dégénérescence sans intérêt, <u>n'est pas homogène</u> ; la question posée est donc à étudier ; nous allons maintenant aborder cette étude.

Considérons une répartition ponctuelle aléatoire R, non nécessairement Markovienne ; posons :

$$\tau_1=u_1 \ , \ \tau_2=u_1+u_2,\ldots,\tau_\alpha = u_1+u_2+\ldots+u_\alpha,\ldots \ ;$$

$$\overline{H}_1(u) = H_1(u) \ , \ \overline{H}_{\alpha+1}(\tau_1,\ldots,\tau_\alpha;u)=1-G_{\alpha+1}(u_1,\ldots,u_\alpha;u) \ ;$$

pour alléger l'exposé, nous supposerons que les fonctions $\overline{H}_\alpha(\tau_1,\ldots,\tau_\alpha;x)$ $(\alpha=1,2,\ldots)$ sont dérivables en x sur $[0,+\infty)$, mais le Lecteur vérifiera sans peine que nos conclusions restent valables sans cette hypothèse.

Remarquons que l'observation S est constituée par : la valeur prise par $N(T)$; et par les valeurs prises par $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \ldots, \mathcal{T}_{N(T)}$. Pour des valeurs données de n et de $\tau_1, \tau_2,\ldots,\tau_n$, considérons la probabilité $\mathcal{P}$ que :

$$N(T) = n \ ,$$

$$\tau_\alpha \leq \mathcal{T}_\alpha < \tau_\alpha + d\tau_\alpha \quad (d\tau_\alpha > 0 \ ; \ \alpha = 1,2,\ldots,n) \ ;$$

pour $d\tau_\alpha \to +0$ $(\alpha = 1,2,\ldots,n)$, $\mathcal{P}$ est équivalente à :

$$p_n(\tau_1,\ldots,\tau_n)\, d\tau_1, d\tau_2,\ldots,d\tau_n \ ,$$

où :

$$p_n(\tau_1,\ldots,\tau_n) = \overline{H}_{n+1}(\tau_1,\ldots,\tau_n;T-\tau_n) \prod_{\alpha=1}^{n} \left[-\frac{d}{d\tau_\alpha}\overline{H}_\alpha(\tau_1,\ldots,\tau_{\alpha-1};\tau_\alpha-\tau_{\alpha-1})\right] . \quad (3,1)$$

<u>Remarque (3,1)</u> : Si R est Markovienne, et d'après le Théorème (1,1), (3,1) se réduit à :

$$p_n(\tau_1,\dots,\tau_n) = H_{n+1}(T) \prod_{\alpha=1}^{n} \left\{ - \frac{\frac{d}{d\tau_\alpha} H_\alpha(\tau_\alpha)}{H_{\alpha+1}(\tau_\alpha)} \right\} \; ; \qquad (3,2)$$

(3,2) peut aussi s'obtenir en suivant la méthode de R. FORTET [1], ou de BUI-TRONG-LIEU [1] : cette méthode donne l'expression de $p_n(\tau_1,\dots,\tau_n)$ à partir de $Q(t)$, expression dont on peut déduire (3,2) à l'aide de (2,6).

REPARTITIONS PONCTUELLES CUMULATIVES :

De (3,1), on peut tirer quelques applications évidentes ; par exemple, supposons que la loi $\mathcal{L}$ dépende d'un paramètre θ ; pour fixer les idées, supposons plus précisément que θ est un paramètre numérique unidimensionnel ; (3,1) permet immédiatement de former l'"équation de vraisemblance" relative à θ.

Mais la question la plus intéressante à se poser semble être la suivante, naturellement suggérée par la forme du second membre de (3,1), et surtout de (3,2).

Disons que la répartition ponctuelle R est cumulative si : quel que soit $T > 0$, quel que soit l'entier $n > 0$, la loi de probabilité de $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$, conditionnelle quand $N(T)=n$, est la loi uniforme sur le domaine : $0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots < \tau_n < T$; ce qui revient à dire que $p_n(\tau_1,\dots,\tau_n)$ ne dépend pas de $\tau_1,\dots,\tau_n$, mais seulement de n.

Nous appellerons (C) la classe des lois $\mathcal{L}$ pour lesquelles R est cumulative.

Cherchons des conditions nécessaires pour que la répartition ponctuelle R, a priori non-nécessairement Markovienne, soit cumulative. Considérons $p_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$, d'abord dans le cas $n = 1$:

$$p_1(\tau_1) = \overline{H}_2(\tau_1, T-\tau_1) \cdot \left\{ - \frac{d}{d\tau_1} H_1(\tau_1) \right\} \; ; \qquad (3,3)$$

si $p_1(\tau_1)$ ne dépend pas de τ_1, $\overline{H}_2(\tau_1; T-\tau_1)$ est le quotient d'une fonction $A(T)$ de T seul, par une fonction $B(\tau_1)$ de τ_1 seul :

$$\overline{H}_2(\tau_1 \; ; \; T-\tau_1) = \frac{A(T)}{B(\tau_1)} \quad ,$$

soit en posant : $T - \tau_1 = u$,

$$\overline{H}_2(\tau_1 \; ; \; u) = \frac{A(\tau_1+u)}{B(\tau_1)} \quad ;$$

mais $\overline{H}_2(\tau_1 \; ; +0) = 1$, donc : $B(\tau_1) \equiv A(\tau_1)$; de sorte que en posant $A(x) = H_2(x)$, $\overline{H}_2(\tau_1 \; ; \; u)$ est de la forme :

$$\overline{H}_2(\tau_1 \; ; \; u) = \frac{H_2(\tau_1+u)}{H_2(\tau_1)} \quad ;$$

$p_1(\tau_1)$ a donc pour expression :

$$p_1(\tau_1) = H_2(T) \times \left(- \frac{\frac{d}{d\tau_1} H_1(\tau_1)}{H_2(\tau_1)} \right) \quad ;$$

il est donc nécessaire que :

$$H_2(\tau_1) = - \frac{d}{d\tau_1} H_1(\tau_1) \times \rho_2 \quad ,$$

où ρ_2 est une constante ; mais puisque $H_2(x)$ n'intervient qu'à la proportionnalité près, on peut prendre $\rho_2 = 1$.

Raisonnons maintenant par récurrence ; supposons prouvé qu'il existe $(n-1)$ fonctions $H_2(x),\ldots,H_n(x)$ telles que :

$$\overline{H}_{\alpha+1}(\tau_1,\ldots,\tau_\alpha ; \; u) = \frac{H_{\alpha+1}(\tau_\alpha+u)}{H_{\alpha+1}(\tau_\alpha)} \qquad (\alpha = 1,2,\ldots,n-1) \quad ,$$

et que :

$$H_{\alpha+1}(x) = (-1) \frac{d}{dx} H_\alpha(x) \quad ,$$

alors :

$$p_n(\tau_1,\ldots,\tau_n) = \overline{H}_{n+1}(\tau_1,\ldots,\tau_{n-1},\tau_n ; T-\tau_n) - \frac{d}{d\tau_n} H_n(\tau_n) \; ;$$

pour que $p_n(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ soit, pour tout T, indépendant de $\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n$, il faudra visiblement que $\overline{H}_{n+1}(\tau_1,\ldots,\tau_{n-1},\tau_n ; u)$ soit de la forme :

$$\overline{H}_{n+1}(\tau_1,\ldots,\tau_{n-1}, \tau_n ; u) = \frac{H_{n+1}(\tau_n+u)}{H_{n+1}(\tau_n)} , \qquad (3,3)$$

avec la fonction $H_{n+1}(x)$ définie par :

$$H_{n+1}(x) = (-1) \frac{d}{dx} H_n(x) . \qquad (3,4)$$

Maintenant, observons que $H_1(x)$ est ≥ 0 et monotone non-croissante ; raisonnons encore par récurrence, supposons prouvé que $H_1(x),H_2(x),\ldots,H_n(x)$ sont ≥ 0 et monotones non-croissantes, alors : $-\frac{d}{dx} H_n(x)$ est ≥ 0, donc selon (3,4) $H_{n+1}(x)$ est ≥ 0 ; mais alors selon (3,3), $H_{n+1}(x)$ est monotone non-croissante, puisque, en u, $\overline{H}_{n+1}(\tau_1,\ldots,\tau_n) ; u)$ est monotone non-croissante.

On tire alors de (3,4) que pour tout $\alpha > 0$:

$$(-1)^{\alpha} \frac{d}{dx^{\alpha}} H_1(x) = H_{\alpha+1}(x) \geq 0 \quad ;$$

d'ailleurs $H_1(x)$ est ≥ 0 ; donc $H_1(x)$ doit être une fonction <u>complètement monotone</u> (cf. par exemple R. FORTET [2]) sur]0,+∞) ; compte-tenu des propriétés des fonctions complètement monotones, compte-tenu de ce que $H_1(+0) = 1$, $H_1(+\infty) = 0$, on obtient aisément le :

<u>Théorème (3,1)</u> : Pour qu'une répartition ponctuelle aléatoire soit cumulative, il est nécessaire et suffisant qu'elle soit Markovienne, et qu'il existe une fonction de répartition $K(y)$ sur $y \in (0,+\infty)$ telle que :

$$K(+0) = 0 \quad , \quad K(+\infty) = 1 \quad ,$$

et que pour tout $\alpha = 0,1,2,\ldots,$

$$H_{\alpha+1}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xy}\, y^{\alpha}\, d\,K(y) \quad , \tag{3,5}$$

où les $H_{\alpha+1}(x)$ sont les fonctions introduites au Théorème (1,1).

4°)-LOI DE PROBABILITE DE $N(T)$ DANS LE CAS D'UNE REPARTITION PONCTUELLE CUMULATIVE :

Pour une répartition ponctuelle cumulative, $p_n(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ se réduit à :

$$p_n(\tau_1,\ldots,\tau_n) = H_{n+1}(T) \quad ; \tag{4,1}$$

on en déduit pour la probabilité $P_n(0,T) = \Pr\{N(T) = n\}$, que :

$$P_n(0,T) = \frac{T^n}{n!}\, H_{n+1}(T) \quad ;$$

soit d'après (3,4) :

$$P_n(0,T) = \int_0^{+\infty} e^{-Ty}\, \frac{(Ty)^n}{n!}\, dK(y) \quad ; \tag{4,2}$$

la fonction caractéristique $\phi(0,T|\omega) = E\{e^{i\omega N(T)}\}$ de $N(T)$ est donc égale à :

$$\phi(0;T|\omega) = \int_0^{+\infty} e^{(e^{i\omega}-1)Ty}\, dK(y) \quad . \tag{4,3}$$

Posons :

$$\mu = \int_0^{+\infty} y\, dK(y) \quad , \quad \mu^2 + \sigma^2 = \int_0^{+\infty} y^2\, dK(y) \quad , \tag{4,4}$$

en supposant que les intégrales (4,4) sont convergentes. On déduit de (4,3) :

$$E\{N(T)\} = \mu\, T \quad , \tag{4,5}$$

et pour la variance $\mathcal{V}\{N(T)\}$ de $N(T)$:

$$\mathcal{V}\{N(T)\} = \mu T + \sigma^2 T^2 \quad . \tag{4,6}$$

<u>Cas où</u> $\sigma = 0$: $\sigma = 0$ si et seulement si la répartition de masse décrite par la fonction de répartition $K(y)$, se réduit à une masse 1 placée à l'abscisse $y = \mu$, alors (3,4) et (1,14) montrent que la répartition ponctuelle aléatoire est un <u>processus de Poisson homogène</u>, de densité moyenne μ . Alors, $N(T)$ obéit à la loi de Poisson de paramètre μT ; si l'on pose :

$$N(T) = \mu T + \sqrt{\mu T}\, L \quad , \tag{4,7}$$

asymptotiquement lorsque $T \to +\infty$, L obéit à la loi de Laplace d'espérance mathématique nulle et d'écart type égal à 1 .

<u>Cas général</u> $\sigma \neq 0$: Dans le cas général où $\sigma^2 > 0$ (avec : $\sigma^2 < +\infty$) , posons :

$$N(T) = \mu T + \sqrt{\mu T + \sigma^2 T^2}\,.\, V \quad ; \tag{4,8}$$

d'après (4,3), la fonction caractéristique de V tend lorsque $T \to +\infty$, vers :

$$e^{-i\frac{\mu}{\sigma}\omega} \cdot \int_0^{+\infty} e^{i\frac{\omega}{\sigma}y}\, dK(y) \quad , \tag{4,9}$$

et cette convergence est uniforme en ω sur tout intervalle fini ; or (4,9) est la fonction caractéristique de la fonction de répartition (en v) $K(\mu+\sigma v)$; on a donc asymptotiquement lorsque $T \to +\infty$:

$$\Pr(V < v) \sim K(\mu + \sigma v) \quad . \tag{4,10}$$

Quel que soit $0 \leq \sigma \leq +\infty$, on tire de (4,2) le :

<u>Théorème (4,1)</u> : Pour une répartition cumulative ,la loi de probabilité de $\frac{N(T)}{T}$ tend, lorsque $T \to +\infty$, vers la loi de probabilité sur $[0,+\infty)$ définie par la fonction de répartition $K(y)$.

Loi de probabilité de $N(t_o+T) - N(t_o)$:

Considérons une répartition ponctuelle Markovienne R .

Soient $t_o \geq 0$ un instant fixé, et $T > 0$ une durée fixée ; supposons que l'on observe R sur l'intervalle $[t_o, t_o+T]$; l'observation $S_{t_o}(T)$ correspondante est constituée par :

- la valeur n prise par $N(t_o+T) - N(t_o)$,

- les emplacements $\tau'_1, \tau'_2, \ldots, \tau'_n$ des n points de la répartition ponctuelle appartenant à $]t_o, t_o+T]$, nous supposons $\tau'_1, \tau'_2, \ldots, \tau'_n$ numérotés par valeurs croissantes.

Si m est la valeur prise par $N(t)$, $\tau'_1, \tau'_2, \ldots, \tau'_n$ ne sont autres que les valeurs prises par $\mathcal{T}_{m+1}, \mathcal{T}_{m+2}, \ldots, \mathcal{T}_{m+n}$ respectivement ; mais notons bien que la valeur m prise par $N(t_o)$ n'est pas observée.

De (4,1), on déduit aisément que :

Théorème (4,2) : Dans le cas d'une répartition ponctuelle cumulative, $N(t_o+T) - N(T)$ est un résumé exhaustif de l'observation $S_{t_o}(T)$; et $N(t_o+T) - N(T)$ obéit à la même loi de probabilité, définie par (4,2) et (4,3), que $N(T)$.

Tests et estimations pour une répartition ponctuelle cumulative :

Limitons-nous dorénavant aux répartitions ponctuelles cumulatives.

Une conséquence particulière du Théorème (4,2) est que : si t_o est inconnu, l'observation $S_{t_o}(T)$ n'apporte aucune information sur la valeur de t_o , dont l'estimation est donc impossible.

Dans le même ordre d'idées, supposons connu que $t_o = 0$, de sorte que l'observation $S_{t_o}(T)$ n'est autre que l'observation désignée plus haut par S .

L'intérêt de distinguer la catégorie particulière des répartitions ponctuelles cumulatives, réside en ce que pour tout $T > 0$, $N(T)$ - ou, c'est équivalent, $N(T)/T$ - est un résumé de S , exhaustif pour la classe (C) de lois $\mathcal{L}$.

Cette exhaustivité est à première vue une agréable simplification ; mais la valeur Y de $N(T)/T$ est une information très limitée ; nous allons faire la constation suivante :

Sachant que $\mathcal{L} \in (C)$ et que R n'est pas un processus de Poisson homogène, mais $\mathcal{L}$ étant par ailleurs partiellement ou totalement inconnue, toute inférence sur $\mathcal{L}$ fondée sur l'observation sur $[0,T]$ d'une seule réalisation de R , comporte une probabilité d'erreur qui ne tend pas vers 0 lorsque $T \to +\infty$.

Par exemple, supposons que $K(y) = K(\theta | y)$ dépende d'un paramètre θ ; posons nous d'abord le

Problème P_1 : Soient θ_1 et θ_2 deux valeurs données distinctes de θ ; posons pour $\alpha = 1,2$:

$$\mu_\alpha = \int_0^{+\infty} y \, d_y \, K(\theta_\alpha | y) \quad ,$$

$$\mu_\alpha^2 + \sigma_\alpha^2 = \int_0^{+\infty} y^2 \, d_y \, K(\theta_\alpha | y) \quad ,$$

et supposons que $\sigma_\alpha \neq 0$ pour $\alpha = 1$ et 2 .

Soit $\mathcal{H}_1$ l'hypothèse que $\theta = \theta_1$ et $\mathcal{H}_2$ l'hypothèse que $\theta = \theta_2$; et soit à discriminer entre les hypothèses $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$, supposées équiprobables à priori.

Il résulte du Théorème (4,1) que ce Problème 1 est, asymptotiquement pour $T \to +\infty$, équivalent au problème P_1^∞ suivant : une variable aléatoire Y de $Y \in [0,+\infty)$ a pour fonction de répartition, soit $K(\theta_1 | y)$ (hypothèse $\mathcal{H}_1^\infty$) , soit $K(\theta_2 | y)$ (hypothèse $\mathcal{H}_2^\infty$); connaissant une - et une seule - réalisation y de Y , discriminer entre les hypothèses $\mathcal{H}_1^\infty$ et $\mathcal{H}_2^\infty$.

Naturellement, la meilleure solution de P_1^∞ est exprimée par la règle suivante :

$$\text{si} \quad \frac{d_y K(\theta_1 | y)}{d_y K(\theta_2 | y)} > 1 \text{ , adopter l'hypothèse } \mathcal{H}_1^\infty \; ;$$

$$\text{si} \quad \frac{d_y K(\theta_1 | y)}{d_y K(\theta_2 | y)} < 1 \text{ , adopter l'hypothèse } \mathcal{H}_2^\infty \; .$$

Il est donc clair que la meilleure solution de P_1 comporte une probabilité d'erreur qui ne tend pas vers 0 lorsque $T \to +\infty$, et dont on peut d'ailleurs facilement évaluer la limite lorsque $T \to +\infty$. Posons nous maintenant le

Problème P_2 : Soit à estimer la valeur de θ supposée inconnue.

Il résulte du Théorème (4,1) que P_2 est, asymptotiquement lorsque $T \to +\infty$, équivalent au problème P_2^∞ suivant : une variable aléatoire Y $Y \in [0,+\infty)$ a pour fonction de répartition $K(\theta | y)$, où θ a une valeur fixée mais inconnue θ_o ; on suppose, en posant :

$$\mu = \int_0^{+\infty} y \, d_y K(\theta_o | y) \quad , \quad \mu^2 + \sigma^2 = \int_0^{+\infty} y^2 \, d_y K(\theta_o | y) \; ,$$

que : $\sigma^2 > 0$. Connaissant une - et une seule - réalisation y de Y , estimer la valeur de θ_o .

Il est clair d'après P_2^∞ , qu'il ne peut exister pour P_2 , un estimateur convergent stochastiquement vers θ_o lorsque $T \to +\infty$. Le seul type de test admettant une solution convergente semble être le suivant :

Problème P_3 : Soient ω un nombre positif donné ; $K(y)$ une fonction de répartition donnée sur $[0,+\infty)$, telle que :

$$\mu = \int_0^{+\infty} y \, d_y \, K(y)$$

et que si l'on pose :

$$\mu^2 + \sigma^2 = \int_0^{+\infty} y^2 \, d_y \, K(y) \ ,$$

on ait : $\sigma^2 > 0$.

Soit $\mathcal{H}_o$ l'hypothèse que $N(t)$ est un processus de Poisson homogène de densité moyenne μ ; et $\mathcal{H}$ l'hypothèse que $N(t)$ est une répartition ponctuelle cumulative, de loi déterminée par (3,4) avec pour $K(y)$ la fonction donnée.

Soit à discriminer entre les hypothèse $\mathcal{H}_o$ et $\mathcal{H}$.

Asymptotiquement lorsque $T \to +\infty$, P_3 est équivalent au problème P_3^{∞} suivant : soit Y une variable aléatoire qui dans l'hypothèse $\mathcal{H}_o^{\infty}$ est presque-sûrement égale à μ , et dans l'hypothèse $\mathcal{H}^{\infty}$ a pour fonction de répartition $K(y)$; connaissant une - et une seule - réalisation y de Y , discriminer entre les hypothèses $\mathcal{H}_o^{\infty}$ et $\mathcal{H}^{\infty}$.

En supposant que μ est un point de continuité pour $K(y)$ il est clair que la discrimination objet de P_3^{∞} , peut être effectuée avec une probabilité d'erreur nulle ; par conséquent, la discrimination objet de P_3 peut être effectuée (et il est facile de préciser comment) de telle sorte que la probabilité d'erreur soit infiniment petite si $T \to +\infty$.

5°)-EXEMPLE DES PROCESSUS DE POLYA :

Les processus de Polya sont un des rares exemples de répartition ponctuelle aléatoire non-stationnaire explicitement considérés dans la littérature ; ils ont en outre reçu quelques applications , on les a par exemple proposés pour modèles dans des problèmes de surveillance.

Les processus de Polya sont habituellement définis de la façon suivante (cf. A.T. BHARUCHA-REID (1)) :

Soit μ et σ deux constantes positives quelconques ; nous poserons : $a = \frac{\sigma^2}{\mu^2}$; on appelle processus de Polya $P(\mu,a)$, la répartition ponctuelle aléatoire Markovienne dont l'opérateur infinitésimal est défini par :

$$q_k^j(t) = \begin{cases} -\mu \dfrac{\mu^2+\sigma^2 j}{\mu^2+\sigma^2 \mu t} = -\mu \dfrac{1+aj}{1+a\mu t} & \text{si} \quad k = j \ , \\ +\mu \dfrac{\mu^2+\sigma^2 j}{\mu^2+\sigma^2 \mu t} = +\mu \dfrac{1+aj}{1+a\mu t} & \text{si} \quad k = j+1 \ , \\ 0 & \text{dans tout autre cas.} \end{cases} \tag{5,1}$$

L'intégration, par exemple de (2,5) avec (2,2) , avec les $q_k^j(t)$ définis par (5,1) , donne sans difficulté :

$$p_k^j(t,\tau) = \frac{\Gamma(\frac{1}{a}+k)}{\Gamma(\frac{1}{a}+j)} \frac{[a\mu(\tau-t)]^{k-j}}{(k-j)!} \frac{(1+a\mu t)^{\frac{1}{a}+j}}{(1+a\mu\tau)^{\frac{1}{a}+k}}$$

$$(0 \le t < \tau \ ; k \ge j) \quad . \tag{5,2}$$

D'après (2,6), les fonctions $H_{\alpha+1}(x)$ ($\alpha = 0,1,2,\ldots$) sont données, à un coefficient de proportionnalité près, par :

$$H_{\alpha+1}(x) = (1 + a\mu x)^{-\frac{1}{a}-\alpha} \quad . \tag{5,3}$$

Avec (1,14), on en déduit facilement la densité de probabilité $\ell_\alpha(t)$ ($t \ge 0$, $\alpha = 1,2,\ldots$) de $\mathcal{T}_\alpha$:

$$\ell_\alpha(t) = \frac{\Gamma(\frac{1}{a}+\alpha)}{\Gamma(\frac{1}{a})} \frac{a^\alpha \mu^\alpha}{(\alpha-1)!} \frac{t^{\alpha-1}}{(1+a\mu t)^{\frac{1}{a}+\alpha}} \quad . \tag{5,4}$$

On remarque que si $a \geq 1$:

$$E(\tau_1) = +\infty ,$$

et par suite :

$$E(\tau_\alpha) = +\infty \quad \text{pour tout} \quad \alpha \geq 1 .$$

Par contre, si $a < 1$, $E(\tau_\alpha)$ est finie et a pour valeur :

$$E(\tau_\alpha) = \frac{\alpha}{\lambda(1-a)} ; \tag{5,5}$$

d'une façon analogue, τ_α n'admet une variance $\mathcal{V}(\tau_\alpha)$ finie que si $a < \frac{1}{2}$, et alors :

$$\mathcal{V}(\tau_\alpha) = \frac{\alpha\,[1+a(\alpha-1)]}{\lambda^2(1-a)^2(1-2a)} . \tag{5,6}$$

Remarque (5,1) : En faisant $\cdot = 0$, c'est à dire $a = 0$, dans (5,1) , on retrouve les formules qui définissent l'opérateur infinitésimal d'un processus de Poisson homogène de densité moyenne λ ; celui-ci peut donc être considéré comme un processus de Polya dégénéré, soit le processus $P(\lambda,+0)$.

Estimation des paramètres λ et a pour un processus $P(\lambda,a)$:

Soit à estimer, à partir de l'observation S , les paramètres λ et a , supposés tous deux inconnus (mais dans l'hypothèse $a > 0$) de $P(\lambda,a)$. Il est facile de constater directement les faits suivants :

1°) $N(T)$ est un résumé exhaustif de S .

2°) Compte-tenu de cette exhaustivité, et en désignant par n la valeur observée de $N(T)$, la méthode du "maximum de vraisemblance" fournit les équations de vraisemblance suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial \mu} P_n^o(0,T) = 0 \quad , \qquad (5,7)$$

$$\frac{\partial}{\partial a} P_n^o(0,T) = 0 \quad . \qquad (5,8)$$

Après réduction, (5,7) s'écrit :

$$n = \mu T \quad ; \qquad (5,9)$$

par conséquent l'estimateur $\hat{\mu}$ de μ fourni par le maximum de vraisemblance est :

$$\hat{\mu} = \frac{N(T)}{T} \quad ; \qquad (5,10)$$

l'espérance mathématique $E(\hat{\mu})$ et la variance $\mathcal{V}(\hat{\mu})$ de $\hat{\mu}$ ont pour valeurs :

$$E(\hat{\mu}) = \mu \quad , \quad \mathcal{V}(\hat{\mu}) = \mu(a\mu + \frac{1}{T}) \quad ; \qquad (5,11)$$

par conséquent, $\hat{\mu}$ est un estimateur <u>sans biais</u>, mais qui ne converge pas stochastiquement vers μ lorsque $T \to +\infty$.

Pourtant, $\hat{\mu}$ est un estimateur de μ, optimal en ce qu'il est à <u>variance minimum</u> (parmi tous les estimatuers sans biais): cela est lié classiquement (cf. C. FOURGEAUD et A. FUCHS [1]) au fait que $\hat{\mu}$ est l'estimateur du "maximum de vraisemblance", et se vérifie directement sans difficulté par le procédé habituel (fondé sur l'inégalité de SCHWARZ).

L'équation (5,8) équivaut à :

$$\log(1+a\mu T) - \frac{1+na}{1+\mu Ta}\, a\mu T + a \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{a}{1+\alpha a} = 0 \quad , \qquad (5,12)$$

si dans (5,12) on remplace μ par la valeur $\frac{n}{T}$ fournie par (5,9), il vient :

$$\log(1+an) - \sum_{\alpha=0}^{n-1} \frac{a}{1+\alpha a} = 0 \quad , \qquad (5,13)$$

à l'aide de la formule de Taylor, le premier membre de (5,13) s'écrit :

$$- \frac{a}{2} \sum_{\alpha=0}^{n-1} \frac{1}{1+(\alpha+\theta_\alpha)a^2} \qquad , \qquad (5,14)$$

où les θ_α $(\alpha = 0,1,\dots,n-1)$ sont des nombres compris entre 0 et 1 , (5,14) est toujours négatif pour $a > 0$, et prend la valeur 0 seulement pour la valeur limite $a = 0$ (cas d'un processus de Poisson $P(\mu,+0)$; aussi, quelle que soit la vraie valeur supposée $\neq 0$ de a , quels que soient n et T , la méthode du maximum de vraisemblance conduirait à estimer que $a = 0$, ce qui n'est évidemment pas admissible.

Ces résultats s'expliquent aisément : d'après (5,3) ,

$$H_1(x) = (1 + a\mu x)^{-\frac{1}{a}} \quad ,$$

et, à un coefficient de proportionnalité près, on a pour tout α :

$$H_{\alpha+1}(x) = (-1)^\alpha \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} H_1(x) \quad ;$$

donc un processus $P(\mu,a)$ est une <u>répartition ponctuelle cumulative</u>, pour laquelle $K(y)$ a la valeur :

$$K(y) = \int_0^y \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{a})} \left(\frac{z}{a\mu}\right)^{\frac{1}{a}-1} e^{-\frac{z}{a\mu}} \, d\left(\frac{z}{a\mu}\right) . \qquad (5,15)$$

On vérifie que, pour $K(y)$ donnée par (5,15), on a :

$$\mu = \int_0^{+\infty} y \, dK(y) \quad , \quad \mu^2 + \sigma^2 = \int_0^{+\infty} y^2 \, dK(y) .$$

Les résultats précédents sont donc des cas particuliers de ceux obtenus au § 4.