



DEUXIÈME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

30/1

NICE - 5 AU 10 MAI 1969

FONCTIONS ALEATOIRES "VOISINES" DE FONCTIONS STATIONNAIRES (SECOND ORDRE).

par

A. BLANC-LAPIERRE, B. KRIVINE, R. SULTAN.

Cet article est une contribution à l'étude de fonctions aléatoires de second ordre "voisines" de la stationnarité. Diverses méthodes de "déstationnarisation" sont considérées (conditionnement de la fonction de départ, transformations linéaires non invariantes dans le temps et, notamment, changement d'horloge...)

On donne un certain nombre de résultats sur les propriétés des moyennes temporelles (aléatoires)

$$\frac{1}{T} \int_{t-T}^t X(\theta, \varepsilon) X^*(\theta - \tau, \varepsilon) d\theta$$

qui interviennent lorsqu'un observateur, percevant la réalisation ε de $X(t, \varepsilon)$, veut déterminer, par l'expérience, les corrélations relatives à X .

This paper is a contribution to the study of almost stationary second order random functions. Several methods for constructing non stationary functions by transformation of stationary ones are studied (conditioning, linear non time invariant transforms and in particular clock changes...).

Several results on the properties of the random time average

$$\frac{1}{T} \int_{t-T}^t X(\theta, \varepsilon) X^*(\theta - \tau, \varepsilon) d\theta \quad \text{are given, which occur in the}$$

correlation measurements.



**DEUXIÈME COLLOQUE
SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL
ET SES APPLICATIONS
NICE - 5 AU 10 MAI 1969**

30/3

FONCTIONS ALEATOIRES
"VOISINES" DE FONCTIONS STATIONNAIRES
(SECOND ORDRE).

par

A. BLANC-LAPIERRE, B. KRIVINE, R. SULTAN.

I. - STATIONNARITE LOCALE ET STATIONNARITE GENERALE.

En observant l'enregistrement de certains bruits, on est tenté, dans un langage qualitatif, de les décrire comme suit : ils donnent l'impression de stationnarité pour des intervalles de temps dont nous désignerons l'ordre de grandeur par T_e (temps local de stationnarité). Sur des intervalles très supérieurs à T_e , il n'y a plus stationnarité : les caractéristiques de second ordre évoluent progressivement. Pour des intervalles de temps supérieurs à $T_g \gg T_e$, [T_g : temps de stationnarité globale], on retrouve une certaine stationnarité globale.

En terme de moyennes temporelles, ce qui précède signifie qu'au sein d'intervalles de longueur T_e , on obtient une stabilisation, par rapport à T , des expressions $\frac{1}{T} \int_{t-T}^t X(\theta) X(\theta - \tau) d\theta$ suffisante pour définir, avec une bonne précision, une fonction de corrélation locale pratiquement indépendante de t au sein de T_e . Mais, celle-ci varie lentement si l'on translate l'intervalle T_e considéré. Cependant, dans un intervalle $T_g (\gg T_e)$, il y a un brassage tel des différentes situations possibles, que, de nouveau, la moyenne temporelle se stabilise définissant ainsi une fonction de corrélation globale.



Si l'on veut définir les corrélations par des moyennes d'ensemble, on est conduit à traduire le "brassage des différentes situations successives possibles" en introduisant un "ensemble d'épreuves" convenable qui, d'une certaine façon, réalise ces situations.

A titre d'exemple, on peut réaliser la situation décrite au premier alinéa en prenant pour bruit

$$X(t, \mathcal{E} \times \mathcal{E}') = A(t, \mathcal{E}'). Y(t, \mathcal{E}) \quad [E\{A\} = E\{Y\} \equiv 0] \quad (1-1)$$

où A et Y sont des fonctions aléatoires respectivement définies sur les catégories d'épreuves indépendantes $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, possédant un ergodisme suffisant et telles que le temps de corrélation τ_A de A soit considérablement plus grand que le temps de corrélation τ_Y de Y. Pour une réalisation particulière de A, c'est-à-dire conditionnellement à une épreuve particulière $\mathcal{E}'$; on se trouve dans la situation du premier alinéa avec

$$T_g \gg \tau_A \gg T_e \gg \tau_Y \quad (1-2)$$

Par contre, sur l'ensemble global $\mathcal{E}' \times \mathcal{E}$, $X(t, \mathcal{E} \times \mathcal{E}')$ sera stationnaire.

II. - CADRE GENERAL.

1. - Fonctions aléatoires de second ordre harmonisables.

Les fonctions aléatoires $X(t)$ considérées ici seront supposées centrées et harmonisables :

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \nu t} dx(\nu) \quad (2-1) \text{ avec } \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |E\{dx(\nu) dx^*(\nu')\}| dM < +\infty \quad (2-2)$$

A ce stade, $X(t)$ n'est pas nécessairement stationnaire ; cependant, certains écarts trop marqués par rapport à la stationnarité, lui



sont interdits. On a, en effet,

$$|\gamma_X(t, t-\tau)| = |E \{X(t) X^*(t-\tau)\}| \leq E \{|X(t)|^2\} < M \quad (2-3)$$

2. - Fonctions aléatoires stationnaires de second ordre. Elles sont caractérisées par le fait que, sauf pour $\nu = \nu'$, $dx(\nu)$ et $dx(\nu')$ sont orthogonaux : toutes les masses complexes $E \{dx(\nu) dx^*(\nu')\}$ sont concentrées sur $\nu = \nu'$ où, d'ailleurs, elles sont $\gg 0$. [Cf. fig (2-1)]

— La stationnarité de second ordre [$\gamma_X(t, t')$ ne dépend que de $t - t' = \tau$] comme, d'ailleurs, la propriété corrélative d'après laquelle $x(\nu)$ est à accroissements orthogonaux, sont des caractères qui résultent d'une compensation sur l'ensemble des épreuves.

Exemples. - a) $X(t) = A \cos 2\pi\nu t$ [prob 1/2] ou $A \sin 2\pi\nu t$ [prob 1/2] (2-4)

[avec A et ν certains] est stationnaire de second ordre par effet de compensation entre ses 2 réalisations.

b) Soit $y(\nu, \varepsilon)$ un "basculeur poissonnien" de densité uniforme ρ_0 [$\varepsilon = \text{épreuve}$] et $\dot{y}(\nu, \varepsilon)$ le processus constitué par la suite de fonctions de Dirac à signes alternés obtenue en "dérivant" $y(\nu, \varepsilon)$ [Cf. fig (2-2)]. Soit, par ailleurs, un tirage au sort entre deux résultats équiprobables ε'_1 et ε'_2 indépendant de $y(\nu)$. Définissons $x(\nu)$ comme suit :

$$\left. \begin{array}{ll} \text{- pour } (\varepsilon'_1, \varepsilon), \text{ on pose} & x(\nu) = 2 \rho_0 \int_0^\nu y(\nu, \varepsilon) d\nu \\ \text{- pour } (\varepsilon'_2, \varepsilon), \text{ on pose} & x(\nu) = y(\nu, \varepsilon) \end{array} \right\} \quad (2-5)$$

On montre [1] que $x(\nu, \varepsilon' \times \varepsilon)$ est à accroissements ortho-



gonaux [ou que $\dot{x}(\nu, \mathcal{E}' \times \mathcal{E})$ est à corrélation microscopique] alors que ceci est faux pour $x(\nu, \mathcal{E}'_1 \times \mathcal{E})$ ou $x(\nu, \mathcal{E}'_2 \times \mathcal{E})$.

— Ce qui précède montre que le caractère stationnaire - ou celui de fonction aléatoire à accroissements orthogonaux - peut être détruit si on se limite à un sous ensemble $\Delta\mathcal{E}$ de l'ensemble total des épreuves $\mathcal{E}$ possibles, ce qui revient à conditionner la fonction aléatoire considérée.

Exemple. - Soit $X(t)$ dérivant d'un processus de Poisson de densité $\rho(t)$. On a :

$$E \{ X(t) X^*(t') \} = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\theta) R(t-\theta) R^*(t'-\theta) d\theta \quad (2-6)$$

aléatoire et

Si $\rho(\theta)$ est, elle-même, stationnaire, alors $X(t)$ est stationnaire pour l'ensemble des réalisations de $\rho(\theta)$. Il ne l'est évidemment pas pour une réalisation particulière [2].

A titre d'exemple, supposons que $\rho(t)$ n'est susceptible que de 2 déterminations : $(\mathcal{E}_1) : \rho(t) = a_1 + 2b \cos 2\pi\Omega t$ [Prob : 1/2] ou $(\mathcal{E}_2) : \rho(t) = a_2 - 2b \cos 2\pi\Omega t$ [Prob : 1/2]. [$a_1, a_2, b > 0$; $a_1 > 2b$; $a_2 > 2b$]. Pour l'ensemble des deux déterminations $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ de ρ , $X(t)$ est stationnaire de second ordre ; il ne l'est pas si on se limite soit à $\mathcal{E}_1$ soit à $\mathcal{E}_2$. La figure (2-3) montre, dans le plan $\nu \times \nu'$, comment les masses $E \{ dx(\nu) dx^*(\nu') \}$ situées hors de $\nu = \nu'$ sont éliminées par compensation.

On remarquera que, pour $a_1 = a_2 = a$, sous des conditions peu restrictives sur R , la moyenne temporelle $\frac{1}{T} \int_{t-T}^t X(\theta) X^*(\theta-\tau) d\theta$ dont il est question en I tendra, aussi bien pour $\mathcal{E}_1$ que pour $\mathcal{E}_2$,



vers $a \int_{-\infty}^{+\infty} R(t-\theta) R(t-\tau-\theta) d\theta$. Un tel ergodisme correspond bien à ce que l'on souhaite pour des phénomènes physiques lorsque l'on cherche à utiliser des processus conditionnés comme modèles de situations conformes à ce qui a été décrit en I. Mais, si $a_1 \neq a_2$, la moyenne temporelle considérée tendra vers $a_1 \int_{-\infty}^{+\infty} R(t-\theta) R(t-\tau-\theta) d\theta$ ou $a_2 \int_{-\infty}^{+\infty} R(t-\theta) R(t-\tau-\theta) d\theta$ selon que l'on a affaire à ε_1 ou ε_2 . De même, pour le processus stationnaire à corrélation microscopique $\dot{x}(v, \varepsilon' \times \varepsilon)$ de l'exemple b, la limite, pour $\Omega \rightarrow \infty$ de

$$\frac{1}{\Omega} \int_v^{v+\Omega} \dot{x}(v', \varepsilon' \times \varepsilon) \dot{x}(v' - \mu, \varepsilon' \times \varepsilon) dv'$$

vaut $4 \rho_0^2 e^{-2 \rho_0 |\mu|}$ sur ε'_1 et $4 \rho_0 \delta(\mu) - 4 \rho_0^2 e^{-2 \rho_0 |\mu|}$ sur ε'_2 .

III. - PERTURBATION DE LA STATIONNARITE.

1. - FORMULES GENERALES. Nous partons d'une fonction aléatoire stationnaire de second ordre $X(t)$ et nous examinons une famille de transformations permettant de "déstationnariser" $X(t)$ c'est-à-dire de construire des modèles de fonctions aléatoires $Z(t)$ dérivées de $X(t)$ et pouvant s'écarter plus ou moins de la stationnarité. Les transformations considérées sont linéaires mais, naturellement, pas invariantes par translation suivant l'axe des t . Nous posons :

$$Z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} M(t, \theta) X(\theta) d\theta \quad (3-1)$$



et

$$\left. \begin{aligned} M(t, \theta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i [\nu t - \nu' \theta]} d_{\nu, \nu'}^2 G(\nu, \nu') \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i [\nu t - \nu' \theta]} g(\nu, \nu') d\nu d\nu' \text{ si } g \text{ existe} \end{aligned} \right\} (3-2)$$

On obtient alors les formules générales suivantes :

$$dz(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d_{\nu, \nu'}^2 G(\nu, \nu')}{d\nu'} dx(\nu') \rightarrow = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} g(\nu, \nu') dx(\nu') \right\} d\nu \quad (3-3)$$

Naturellement, les $dz(\nu)$ ne sont pas orthogonaux et on a :

$$\begin{aligned} E \left\{ dz(\nu_1) dz^*(\nu_2) \right\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d_{\nu_1, \nu'}^2 G(\nu_1, \nu')}{d\nu'} \frac{d_{\nu_2, \nu'}^2 G^*(\nu_2, \nu')}{d\nu'} E \left\{ |dx(\nu')|^2 \right\} \\ &\rightarrow = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\nu_1, \nu') g^*(\nu_2, \nu') E \left\{ |dx(\nu')|^2 \right\} d\nu_1 d\nu_2 \end{aligned} \quad (3-4)$$

2. - CAS PARTICULIERS.

1°) Pour mémoire, si $M(t, \theta) = M(t - \theta)$, la transformation (3-1) est un filtre linéaire et la stationnarité n'est pas perturbée.

2°) Supposons que $M(t, \theta) = H(\theta) \delta(t - \theta)$. (3-5)

Alors, l'opération (3-1) se réduit à la multiplication par $H(t)$. La transformation définie par (3-3) peut être décrite en disant que la "dérivée" $\frac{dz}{d\nu}$ s'obtient, à partir des $dx(\nu)$, par un filtrage linéaire de réponse percussionnelle $h(\nu)$ où h est la transformée de Fourier de $H(t)$. De même, si les masses complexes $E \left\{ dz(\nu_1) dz^*(\nu_2) \right\}$ admettent une densité



$$\frac{E [dz(v_1) dz^*(v_2)]}{dv_1 dv_2},$$

celle-ci se déduit de la distribution des $E [dx(v_1) dx^*(v_2)]$ par application d'un filtrage linéaire de réponse percutive $h(v_1) h^*(v_2)$. [Voir figure (3-1)].

$$3^\circ) \underline{M(t, \theta) = \delta [t + \varphi(t) - \theta]} \text{ soit } Z(t) = X(t + \varphi[t]) \quad (3-6)$$

Il s'agit d'un changement d'horloge. L'application des formules générales conduit à poser :

$$e^{2\pi i \varphi(t) v'} = \int_{(\omega)} e^{2\pi i \omega t} d_{\omega} \ell(\omega, v') = \int_{(\omega)} e^{2\pi i \omega t} \frac{\partial \ell}{\partial \omega} [\omega, v'] d\omega \quad (3-7)$$

D'où

$$g(v, v') = \frac{\partial \ell}{\partial \omega} [v - v', v'] \quad (3-8)$$

et, finalement, comme conséquence de (3-3),

$$dz(v) = \left[\int_{(v')}^{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \ell}{\partial \omega} [v - v', v'] dx(v') \right] dv \quad (3-9)$$

qui définit la loi de "mélange" des $dx(v)$ pour construire $dz(v)$.

A titre d'exemple simple de changement d'horloge, on peut considérer la modulation sinusoïdale du temps définie par

$$\varphi(t) = \Delta \sin 2\pi \Omega t \quad |\Delta| < 1 \quad (3-10)$$

On trouve alors, pour loi de mélange :

$$\begin{aligned} dz(v) = & J_0[2\pi v \Delta] dx(v) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n[2\pi \{v - n\Omega\} \Delta] dx(v - n\Omega) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_n[2\pi \{v + n\Omega\} \Delta] dx(v + n\Omega) \end{aligned} \quad (3-11)$$

La figure (3-2) schématise le sens de la relation (3-10) et visualise



la distribution des masses complexes $E \{dz(v) dz^*(v')\}$ dans le plan $v \times v'$.

Signalons ici une étude d'ensemble, en cours, de M. RAUCH sur la "déstationnarisation" d'une fonction aléatoire par changement d'horloge certain et aussi l'étude de certaines propriétés des changements d'horloges aléatoires [$\varphi(t)$ aléatoire] faite à propos d'un travail sur l'échantillonnage périodique perturbé [3].

Signalons encore, en liaison avec ce qui précède, les travaux de R.A. SILVERMAN sur les "processus aléatoires localement stationnaires" [4] qu'il définit par la condition que leurs covariances $\Gamma(t, t')$ peut être écrite sous la forme suivante :

$$\Gamma(t, t') = \Gamma_1 \left(\frac{t+t'}{2} \right) \Gamma_2(t - t') \quad (3-12)$$

où Γ_1 est une fonction non-négative et Γ_2 une covariance stationnaire.

IV. - MOYENNES TEMPORELLES (APPROCHE PLUS CONCRETE DANS DES CAS PARTICULIERS).

Nous avons déjà noté que la notion de stationnarité faisait intervenir l'ensemble des épreuves. Or, l'expérimentateur ne perçoit qu'une réalisation particulière ϵ ; ses appareils lui révèlent des moyennes temporelles, par exemple du type $\frac{1}{T} \int_{t-T}^t [\] dt$ relatives à cette réalisation. Si certaines conditions ergodiques sont satisfaites, il sera possible, à travers la valeur de la limite de ces moyennes pour $T \rightarrow \infty$, d'atteindre les valeurs de certaines espérances mathématiques. Mais ceci ne présente de l'intérêt pour l'expérimentateur que si les temps T nécessaires à une bonne évaluation de la limite pour $T = \infty$ ne sont pas trop grands compte tenu du temps dont il dispose pour expérimenter et prendre



une décision. En définitive, l'expérimentateur s'intéresse à des moyennes temporelles prises sur un temps fini sur la réalisation qu'il perçoit, c'est-à-dire, s'il s'agit de moyennes du second ordre, à

$$\Psi(t, T, \tau) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t X(\theta, \xi) X^*(\theta - \tau, \xi) d\theta \quad (4-1)$$

Nous allons étudier ces moyennes en ayant présent à l'esprit le souci d'explicitier le plus possible leurs propriétés dans le cas de fonctions aléatoires s'écartant peu de la stationnarité, par exemple pour lesquelles les masses spectrales $E\{dx(\nu) dx^*(\nu')\}$ sont toutes contenues à l'intérieur de la bande B définie par $|\nu' - \nu| < \Delta$ (Voir fig. 4-1).

Nous examinerons successivement les points suivants :

- a) propriétés asymptotiques de $\Psi(t, T, \tau)$ pour $T \rightarrow \infty$. C'est le problème de la détermination de ce que, en I, nous avons appelé la fonction de corrélation globale.
- b) propriétés des filtrées de $X(t, \xi)$ dans un ensemble de canaux de filtrage disjoints. C'est, en particulier, le problème de la détermination expérimentale des spectres.
- c) sensibilité de Ψ par rapport à t. C'est le problème de la stationnarité locale.

Dans chacun de ces cas, nous donnerons divers résultats. Un certain nombre d'entre eux pourront être complétés selon le développement d'études actuellement en cours.

1. - PROPRIETES ASYMPTOTIQUES DE $\Psi(t, T, \tau)$ pour $T \rightarrow \infty$

Nous étendons le problème de façon à préparer déjà le b). Soient $Y_1(t)$ et $Y_2(t)$ les transformées de $X(t)$ dans les filtres linéaires $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ de gains respectifs $G_1(\nu)$ et $G_2(\nu)$ uniformément bornés par $\underline{G}$. Nous introduisons



$$\Psi(t, T, \tau / \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t Y_1(\theta, \varepsilon) Y_2^*(\theta - \tau, \varepsilon) d\theta \quad (4-2)$$

Nous faisons les hypothèses générales suivantes :

$$a) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| E \left\{ dx(v_1) dx^*(v_2) \right\} \right| < M < +\infty \quad (4-3)$$

$$b) \iiint \left| E \left\{ dx(v_1) dx^*(v_2) dx^*(v'_1) dx(v'_2) \right\} \right| < N < +\infty \quad (4-4)$$

On peut donc introduire :

$$\begin{aligned} \Sigma(\mu) &= \int \left| E \left\{ dx(v_1) dx^*(v_2) dx^*(v'_1) dx(v'_2) \right\} \right| \text{ pour } \mu > 0 \\ &\quad |v_1 - v_2| < \mu \text{ et } |v'_1 - v'_2| < \mu \\ &= 0 \text{ pour } \mu < 0 \end{aligned} \quad (4-5)$$

Les résultats essentiels sur les propriétés asymptotiques de Ψ pour $T \rightarrow \infty$ sont donnés dans [5] (Cf. p. 394 et suivantes).

Théorème. - Sous réserve des hypothèses précisées ci-dessus [Cf. (4-3) et (4-4)] et de l'existence de la borne uniforme $\underline{G}$, on peut énoncer les résultats suivants :

1°) Pour t et τ fixés quelconques, $\Psi(t, T, \tau / \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ converge en moyenne quadratique, lorsque $T \rightarrow \infty$, vers :

$$\mathcal{L}(\tau) = \int_{m.q.}^{+\infty} G_1(v) G_2^*(v) e^{2\pi i v \tau} |dx(v)|^2 \quad (4-6)$$

dont l'existence est assurée d'après (4-4).

2°) La condition nécessaire et suffisante pour que, $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ étant deux filtres quelconques, la limite $\mathcal{L}(\tau)$ soit presque



sûrement égale à $E\{\mathcal{L}(\tau)\}$ est que, $\mathcal{D}$ étant un domaine quelconque du plan $v_1 \times v'_1$, on ait :

$$\int_{\mathcal{D}} E\left\{\left[|dx(v_1)|^2 - E\{|dx(v_1)|^2\}\right]\left[|dx(v'_1)|^2 - E\{|dx(v'_1)|^2\}\right]\right\} = 0 \quad (4-7)$$

3°) Le fait de pouvoir trouver un nombre positif η tel que, pour les faibles valeurs ^{positives} de μ , on ait :

$$\left| \sum_{\mu} (\mu) - \sum (+0) \right| \leq \mu^\eta \quad (4-8)$$

constitue une condition suffisante pour que la convergence de Ψ vers $\mathcal{L}(\tau)$ dont il est question en 1°) soit presque sûre.

$\lim_{T \rightarrow \infty} \int$

On remarque que la limite $\mathcal{L}(\tau)$ ne dépend que des éléments $dx(v_1) dx^*(v_2)$ situés sur la bissectrice $\beta [v_1 = v_2]$. Naturellement, le fait que $\mathcal{L}(\tau)$ soit certain ou aléatoire ne dépend, lui aussi, que des éléments de (β) c'est-à-dire, en fait, des seuls $dx(v_1) dx^*(v_2)$ qui influent sur la composante de fréquence nulle de la fonction du temps $Y_1(t) Y_2^*(t-\tau)$. Ceci est très naturel par comparaison avec un résultat classique dans l'étude de la loi des grands nombres pour les fonctions aléatoires stationnaires d'ordre deux [Cf. (6) p. 104 Théorème II].

Tout aussi naturellement, la condition (4-8) qui permet d'affirmer la convergence p. s. de Ψ vers $\mathcal{L}(\tau)$ ne dépend que des $dx(v_1) dx^*(v_2)$ voisins de (β) mais non situés sur (β) .

Il reste à préciser l'ordre de grandeur de T suffisant pour que $\Psi(t, T, \tau/\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ soit assez voisin de sa limite $\mathcal{L}(\tau)$.

On a :



$$\delta = \Psi(t, T, \tau; \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) - \mathcal{L}(\tau) =$$

$$\iint_{\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2} e^{-\pi i(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)T} \frac{\sin \pi(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)T}{\pi(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)T} e^{2\pi i(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)t} e^{2\pi i \mathbf{v}_2 \tau} G_1(\mathbf{v}_1) G_2^*(\mathbf{v}_2) d\mathbf{x}(\mathbf{v}_1) d\mathbf{x}^*(\mathbf{v}_2)$$

(4-9)

L'intégrale double contenue au second membre de (4-9) peut être scindée en deux parties, la première S_b correspondant au domaine $0 < |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| < \varepsilon$ et la seconde S_c à $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| \geq \varepsilon$. On établit immédiatement :

$$E\{|S_b|^2\} \leq [\Sigma(\varepsilon) - \Sigma(+0)] \underline{G}^4 \quad \text{et} \quad E\{|S_c|^2\} \leq \frac{1}{T^2 \varepsilon^2} \Sigma(+\infty) \underline{G}^4$$

(4-10)

On a par ailleurs :

$$E\{|\delta|^2\} \leq E\{|S_b|^2\} + E\{|S_c|^2\} + 2\sqrt{E\{|S_b|^2\} \cdot E\{|S_c|^2\}}$$

(4-11)

Pour pousser plus loin, il faut faire intervenir les propriétés du second ordre de la répartition des éléments $d\mathbf{x}(\mathbf{v}_1) d\mathbf{x}^*(\mathbf{v}_2)$ près de $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$. Supposons, par exemple, que la condition (4-8) de convergence presque sûre soit remplie. Alors, en posant $\lambda = [2, 2+\eta]$ et $\varepsilon = T^{-\lambda}$ ($0 < \lambda < 1$) on établit :

$$E\{|\delta|^2\} < \left[A, T^{-\frac{2\eta}{2+\eta}} \right] \quad (4-12)$$

$$\text{avec } A = \underline{G}^4 \left[1 + \sqrt{\Sigma(+\infty)} \right]^2 \quad (4-13)$$

La relation (4-12) permet d'affirmer que l'on aura, sûrement,

$$E\{|\delta|^2\} < \alpha \quad \text{pour } T > T_\alpha \quad \text{avec}$$

$$T_\alpha = \left[\frac{A}{\alpha} \right]^{-\frac{2+\eta}{2\eta}} \quad (4-14)$$



2. - PROPRIETES DES FILTRES DE $X(t, \xi)$ DANS UN ENSEMBLE DE CANAUX DE FILTRAGE DISJOINTS.

Si l'on se limite à la moyenne temporelle de $X(t, \xi)X^*(t-\tau, \xi)$, il suffit de faire $G_1 \equiv G_2 \equiv 1$ dans les formules données ci-dessus. Exploitions maintenant les possibilités offertes par l'introduction des filtres $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$.

Examinons rapidement la situation perceptible pour la réalisation $\mathcal{E}$, par un observateur disposant du montage schématisé sur la figure (4-2) dans laquelle :

- les filtres $\mathcal{F}_i$ sont des filtres disjoints de bandes Δ_i dont l'ensemble recouvre la bande des fréquences $\nu_0 - \Omega, \nu_0 + \Omega$. Les fonctions $X_i(t)$ sont considérées comme réelles, de même que $X(t)$. Le filtre $\mathcal{F}_i$ passant les deux bandes Δ_i et Δ'_i symétriques par rapport à $\nu = 0$.
- les R_i sont des lignes à retard.
- M est un dispositif qui élabore le produit :

$$Y_{ij}(t, \tau_i, \tau_j) = X_i(t - \tau_i) X_j(t - \tau_j) \quad (4-15)$$

- F est un filtre intégrateur qui peut être du type $\frac{1}{T} \int_{t-T}^t [\] dt$ mais que, pour simplifier, nous traiterons ici comme un filtre passe bas, transmettant, avec un gain 1, les fréquences ν telles que $|\nu| \leq \omega$ et coupant purement et simplement les autres : gain G_F . Nous poserons $\omega = \frac{1}{T}$ pour introduire une durée d'intégration.

On peut concevoir un tableau qui, à chaque instant, afficherait les valeurs $\Psi_{ij}(t, \tau_i, \tau_j)$. Les $\Psi_{ii}(t, 0, 0)$ sont les indications utiles pour la détermination du "spectre instantané". Les $\Psi_{ii}(t, \tau_i, \tau_j)$ correspondent à la détermination de la fonction de corrélation des composantes filtrées. Enfin, les $\Psi_{ij}(t, \tau_i, \tau_j)$ [$i \neq j$] correspondent aux intercorrélations entre composantes disjointes X_i et X_j .



On a :

$$\Psi_{i,j}(t, \tau_i, \tau_j) = \iint_{\Delta_i \Delta_j} G_F(\nu_1 - \nu_2) e^{2\pi i[\nu_1 - \nu_2]t} e^{2\pi i \nu_2 \tau_j} e^{-2\pi i \nu_1 \tau_i} dx(\nu_1) dx^*(\nu_2) \quad (4-16)$$

Seuls apportent une contribution, les $dx(\nu_1) dx^*(\nu_2)$ situés au sein d'une bande B_F [Cf. fig. (4-1)] telle que $\Delta = \omega = \frac{1}{T}$ [Voir fig. (4-3)]. Il en découle que, si la bande B_F est donnée, une "déstationnarisation" ne sera décelable que si elle crée des corrélations dans B_F .

Nous nous intéresserons à :

$$\alpha) E\{\Psi_{i,j}(t, \tau_i, \tau_j)\} = \iint_{\Delta_i \Delta_j} G_F(\nu_1 - \nu_2) e^{2\pi i[\nu_1 - \nu_2]t} e^{2\pi i \nu_2 \tau_j} e^{-2\pi i \nu_1 \tau_i} E\{dx(\nu_1) dx^*(\nu_2)\} \quad (4-17)$$

$$\beta) E\left\{\left|\Psi_{i,j}(t, \tau_i, \tau_j) - E\{\Psi_{i,j}(t, \tau_i, \tau_j)\}\right|^2\right\} =$$

$$\iiint_{\Delta_i \Delta_j \Delta_i \Delta_j} G_F(\nu_1 - \nu_2) G_F^*(\nu'_1 - \nu'_2) e^{2\pi i(\nu_1 - \nu_2)t} e^{-2\pi i(\nu'_1 - \nu'_2)t} e^{-2\pi i \tau_i(\nu_1 - \nu'_1)}$$

$$e^{2\pi i \tau_j(\nu_2 - \nu'_2)} \left\{ E\{dx(\nu_1) dx^*(\nu_2) dx^*(\nu'_1) dx(\nu'_2)\} \right. \\ \left. - E\{dx(\nu_1) dx^*(\nu_2)\} E\{dx^*(\nu'_1) dx(\nu'_2)\} \right\} \quad (4-18)$$

A) - Premier ordre.

a) Si $X(t)$ est stationnaire,



$$E \left\{ \Psi_{i,j}(t, \tau_i, \tau_j) \right\} = 0 \quad \text{pour } i \neq j \quad (4-19)$$

- Pour $i = j$, en désignant par τ la différence des deux retards, on a :

$$E \left\{ \left| \Psi_{ii}(t, \tau) \right|^2 \right\} = \int_{\Delta_i} e^{2\pi i \nu \tau} f(\nu) d\nu \quad (4-20)$$

où $f(\nu)$ est la densité spectrale de $X(t)$.

b) Si $X(t)$ n'est pas stationnaire.

$$E \left\{ \Psi_{i,j}(t, \tau_i, \tau_j) \right\} = \int_{\Delta_i} \int_{\Delta_j} G_F(\nu_1 - \nu_2) e^{2\pi i [\nu_1 - \nu_2] t} e^{2\pi i \nu_2 \tau_j} e^{-2\pi i \nu_1 \tau_i} E \left\{ dx(\nu_1) dx^*(\nu_2) \right\} \quad (4-21)$$

La figure (4-4) visualise la situation en ce qui concerne les contributions possibles des divers domaines dans chacun de ces deux cas (on a supposé les retards nuls ; les carrés complètement noirs représentent des contributions positives).

B. - Fluctuations.

B. KRIVINE étudie ce problème pour divers modèles non stationnaires. Nous nous bornons, ici, à donner quelques indications sur les apparences de corrélation que, dans un cas stationnaire, les fluctuations font apparaître au cours du temps pour $i \neq j$; nous donnerons aussi, dans le même cas, l'expression du carré moyen de l'écart $\Psi_{ii}(t, \tau) - E \left\{ \Psi_{ii}(t, \tau) \right\}$.

a) $i \neq j$.

1° - On notera, d'abord, que, pour une constante d'intégration assez petite (de façon précise, pour $\omega \gg \nu_0 + \Omega$), on a, tout simplement, quels que soient i et j :



$$\Psi_{i,j}(t, \tau_i, \tau_j) = X_i(t - \tau_i) X_j(t - \tau_j) = Y_{ij}(t, \tau_i, \tau_j) \quad (4-22)$$

Si σ_i et σ_j sont les écarts types relatifs aux deux fonctions gaussiennes stationnaires et indépendantes X_i et X_j , Ψ_{ij} se présente, à chaque instant, comme le produit de deux variables gaussiennes indépendantes. On sait que sa densité de probabilité est égale à :

$$f(x) = \frac{1}{\pi \sigma_i \sigma_j} K_0 \left(\frac{x}{\sigma_i \sigma_j} \right) \quad (4-23)$$

où K_0 est la fonction de Bessel d'ordre zéro de second espèce.

2° - Cas général. On trouve :

$$E \left\{ |\Psi_{i,j}(t, \tau_i, \tau_j) - E \{ \Psi_{i,j}(t, \tau_i, \tau_j) \}|^2 \right\} = \iint_{\Delta_i \Delta_j} |G_F(v_1 - v_2)|^2 f(v_1) f(v_2) dv_1 dv_2 \quad (4-24)$$

La fluctuation est indépendante de t , de τ_i et de τ_j (stationnarité et indépendance de deux bandes disjointes dans le cas gaussien). Elle est nulle si les domaines $\Delta_i \times \Delta_j$ et $|v_1 - v_2| < \omega$ sont disjointes. Elle tend vers zéro avec ω (c'est-à-dire si $T \rightarrow \infty$).

b) $\Delta_i = \Delta_j$. On trouve alors :

$$\begin{aligned} E \left\{ |\Psi_{i,i}(t, \tau) - E \{ \Psi_{i,i}(t, \tau) \}|^2 \right\} = \\ \iint_{\Delta_i \Delta_i} |G_F(v_1 - v_2)|^2 f(v_1) f(v_2) dv_1 dv_2 \\ + \iint_{\Delta_i \Delta_i} |G(v_1 - v_2)|^2 e^{2\pi i(v_1 + v_2)\tau} f(v_1) f(v_2) dv_1 dv_2 \end{aligned} \quad (4-25)$$



Si f est borné, $E \left\{ |\Psi_{ii} - E \{ \Psi_{i,i} \}|^2 \right\}$ tend vers zéro lorsque $\omega \rightarrow 0$.

Remarque. - Pour $\omega = \infty$, on a :

$$\begin{aligned} E \left\{ |\Psi_{ii} - E \{ \Psi_{ii} \}|^2 \right\} &= E \left\{ [X_i(t) X_i(t-\tau) - E \{ X_i(t) X_i(t-\tau) \}]^2 \right\} \\ &= E \{ X_i^2(t) X_i^2(t-\tau) \} - [E \{ X_i(t) X_i(t-\tau) \}]^2 = 2 \gamma_{X_i}^2(\tau) + [E \{ X_i^2 \}]^2 \\ &- \gamma_{X_i}^2(\tau) = \gamma_{X_i}^2(\tau) + [E \{ X_i^2 \}]^2 \end{aligned}$$

C'est bien ce que donne (4-25) pour $\omega \rightarrow 0$.

3. - SENSIBILITE DE Ψ PAR RAPPORT A t . Nous nous limitons, ici, à faire une remarque portant sur les moyennes du premier ordre, cette remarque pouvant être complétée par des résultats sur le second ordre.

Supposons que $X(t)$ possède toutes ses masses spectrales $F_1 \{ dx(v_1) dx^*(v_2) \}$ à l'intérieur de la bande B de la figure (4-1). Posons :

$$\Delta \Psi(t, \Delta t, T, \tau) = \Psi(t + \Delta t, T, \tau) - \Psi(t, T, \tau) \quad (4-26)$$

et intéressons nous à

$$\begin{aligned} E \left\{ \Delta \Psi(t, \Delta t, T, \tau) \right\} &= \\ \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i(v_1 - v_2)} e^{2\pi i(v_1 - v_2)t} e^{2\pi i v_2 \tau} \left\{ 1 - e^{2\pi i(v_1 - v_2)T} \right\} \\ &\left\{ e^{2\pi i(v_1 - v_2)\Delta t} - 1 \right\} d^2 \gamma(v_1, v_2) \end{aligned}$$



D'où

$$|E\{\Delta\Psi\}| \leq \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\pi|v_1-v_2|} \left| \sin \pi (v_1-v_2)T \right| \left| \sin \pi (v_1-v_2)\Delta t \right| d^2\gamma(v_1, v_2) |$$

(4-27)

Des majorations simples permettent d'écrire

$$|E\{\Delta\Psi\}| \leq \text{plus petite des valeurs} \begin{cases} 2\pi \cdot (\Delta t) \cdot \Delta \cdot M & (4-28a) \\ 2 (\Delta t) M / T & (4-28b) \end{cases}$$

[Cf. figure (4-5)]. La figure (4-5a) représente, en fonction de T , la majoration de $|E\{\Delta\Psi\}|$ conforme à (4-28) ; la figure (4-5b) représente, toujours en fonction de T , le glissement Δt que l'on peut admettre pour être sûr que $|E\{\Delta\Psi\}|$ reste $< \varepsilon$. La région I correspond à une stabilité locale de $E\{\Psi(t, T, \tau)\}$ lorsqu'on fait varier t au sein d'un intervalle Δt qui peut être d'autant plus grand que la largeur 2Δ de B est plus petite. Si, pour des valeurs de T comprises dans Δt , on a un effet de filtrage par intégration suffisant pour que $\Psi(t, T, \tau)$ diffère peu de $E\{\Psi(t, T, \tau)\}$, alors on se trouve dans la situation évoquée en I dans laquelle une fonction de corrélation locale peut être définie. Cette fonction n'est autre que $E\{\Psi(t, T, \tau)\}$. Elle varie de façon appréciable si t se déplace de façon à sortir de l'intervalle de stabilité Δt . La région II correspond à la tendance de $\Psi(t, T, \tau)$, pour $T \rightarrow \infty$, vers une limite en moyenne quadratique, qui, d'ailleurs, n'est autre que $\mathcal{L}(\tau)$ [Voir (4-6)] à condition de faire ici, $G_1 \equiv G_2 \equiv 1$ dans son expression. Naturellement, cette tendance entraîne que $E\{\Psi(t, T, \tau)\} \rightarrow E\{\mathcal{L}(\tau)\}$.



BIBLIOGRAPHIE.

- (1) A. BLANC-LAPIERRE. - Sur un problème de compensation de corrélation dans le cas de fonctions aléatoires ou de suites de variables aléatoires de second ordre. Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, t. 266, p. 1063-1065.
- (2) L. MANDEL. - Fluctuations of Light beams. Progress in Optics, Ed. E. Wolf, vol. 2, p. 181, North Holland Publishing Co, Août 1963.
- (3) A. BLANC-LAPIERRE. - Echantillonnage et détermination des moyennes temporelles dans le cas des fonctions aléatoires stationnaires d'ordre 2. Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, t. 264, p. 1170-1173.
- Remarques sur certains problèmes d'échantillonnage aléatoire liés à la détermination des moyennes temporelles. Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, t. 267, p. 517-520.
- La détermination de moyennes temporelles par échantillonnage dans le cas des fonctions aléatoires stationnaires d'ordre deux. A paraître dans les Annales des Télécommunications.
- (4) R. A. SILVERMAN. - Locally stationary Random Processes. I.R.E. Transactions on Information Theory - IT 3, n°3, pp. 182-187 (1957).



- A Matching Theorem for Locally Stationary
Random Processes. Communication on Pure and Applied
Mathematics, vol. XII, 373-383 (1959).

- (5) A. BLANC-LAPIERRE et R. FORTET. - Théorie des
Fonctions Aléatoires. Masson Editeur, Paris 1953.
- (6) A. BLANC-LAPIERRE et R. BRARD. - Les fonctions aléa-
toires stationnaires et la loi des grands nombres. Bull.
Soc. Math. 1946, p. 102.

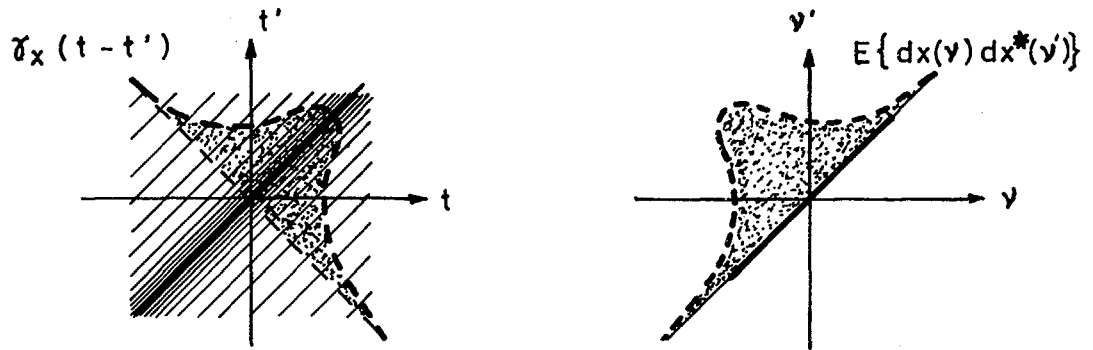


Fig. (2 - 1)

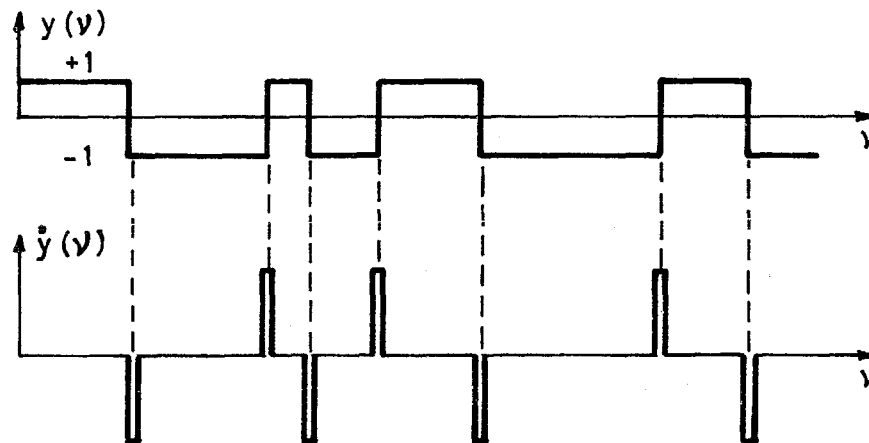
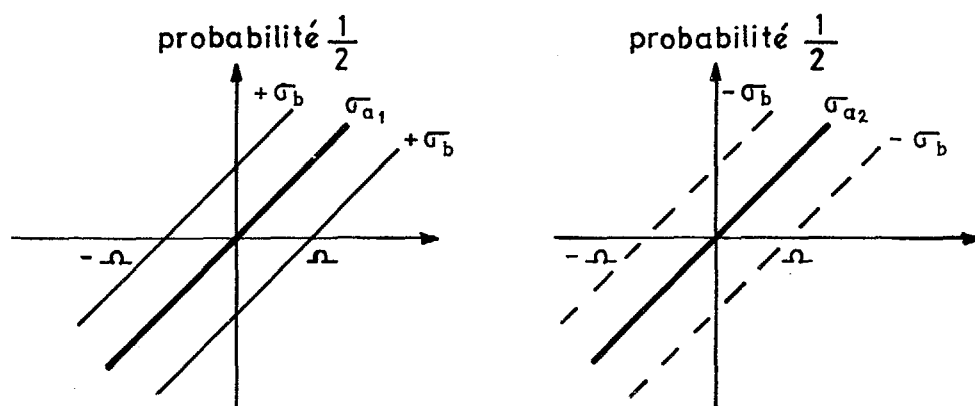


Fig. (2 - 2)



densités linéiques : $\sigma_{a_1} = a_1 |G(v)|^2$, $\sigma_{a_2} = a_2 |G(v)|^2$

$\sigma_b = b G(v) G^*(v')$

[G gain lié à R]

Fig.(2 - 3)

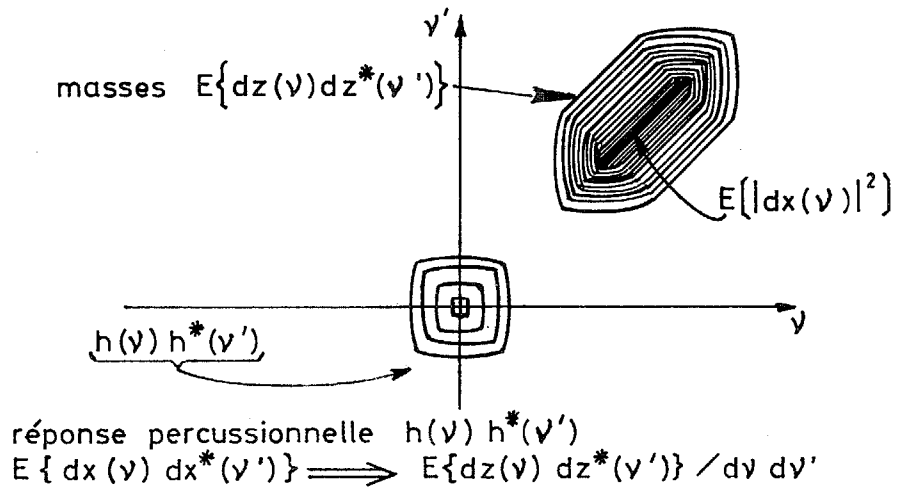


Fig. (3 - 1)

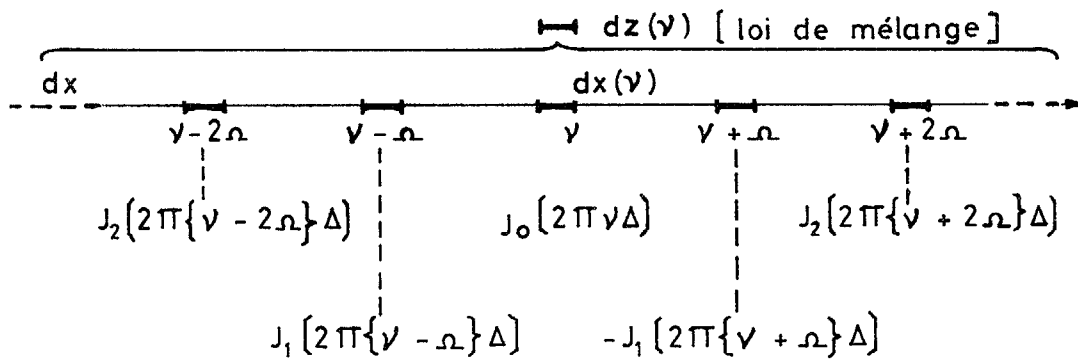
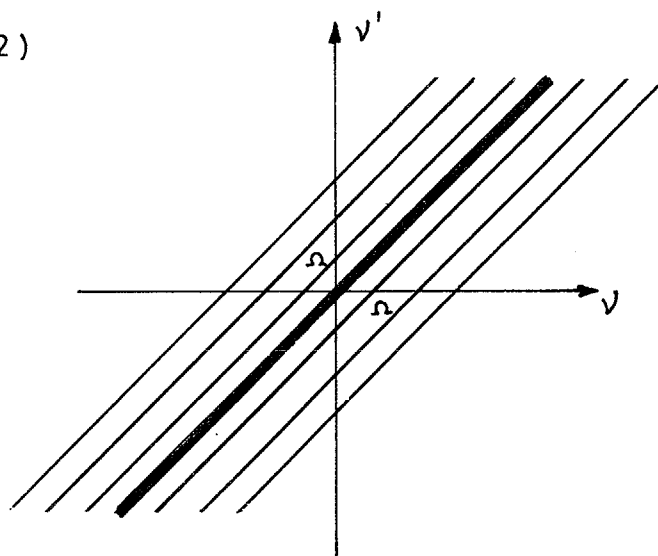


Fig. (3 - 2)



distribution linéique des masses $E\{dz(v)dz^*(v')\}$

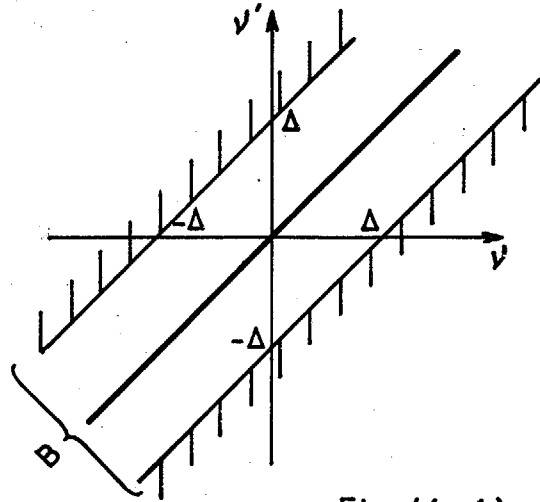


Fig. (4 - 1)

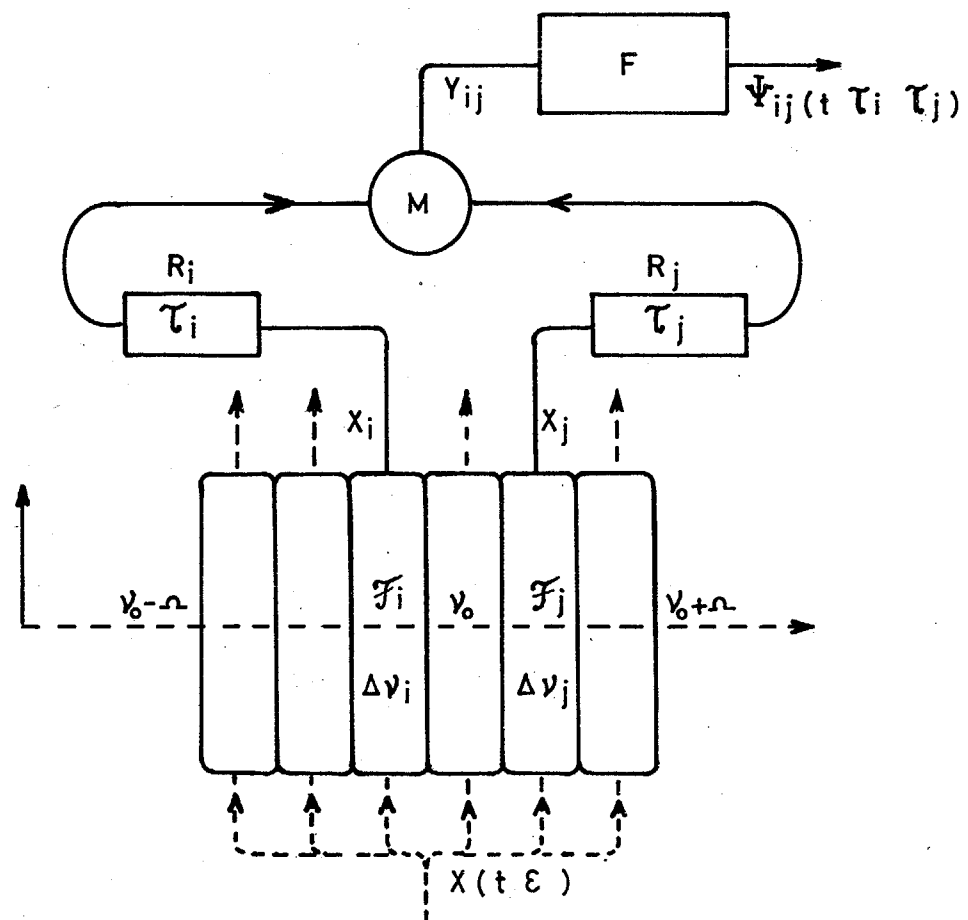


Fig. (4 - 2)

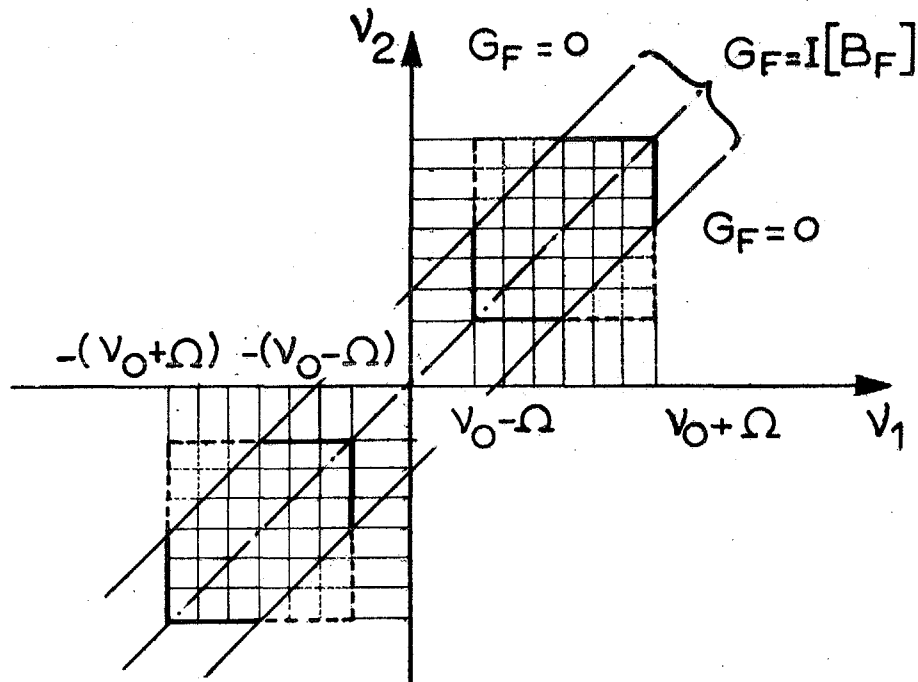


Fig (4-3)

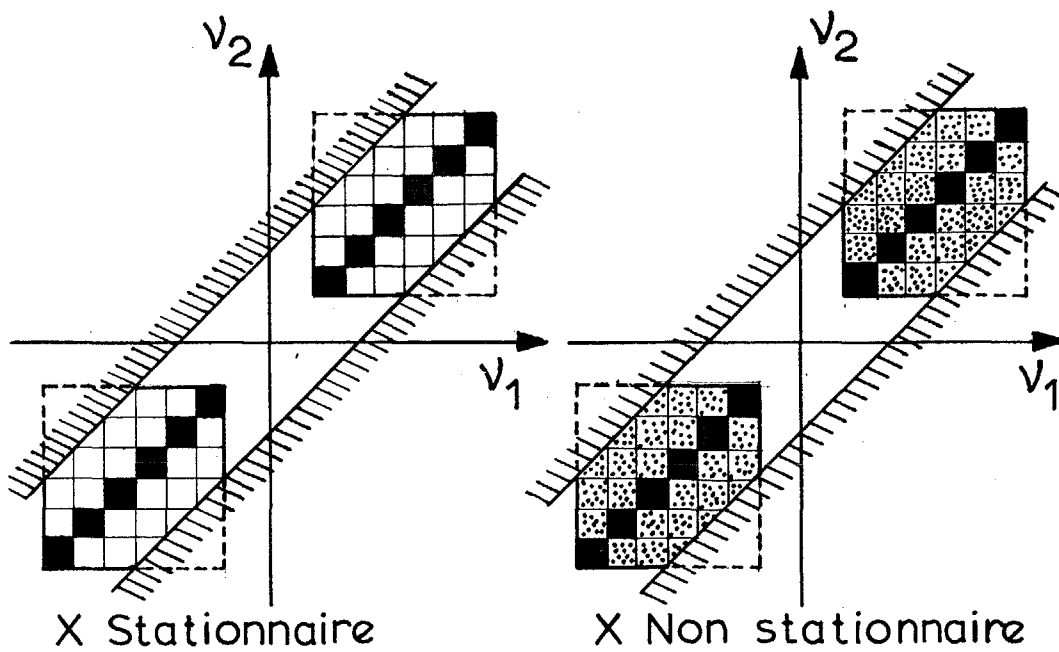


Fig (4-4)

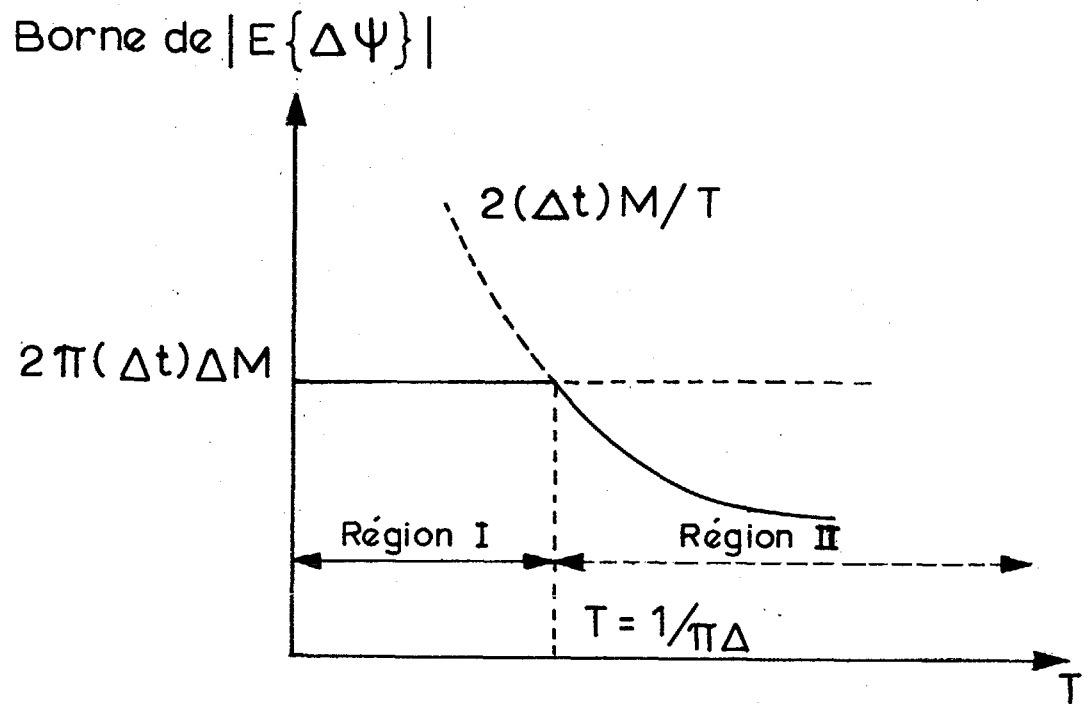


Fig (4-5 a)

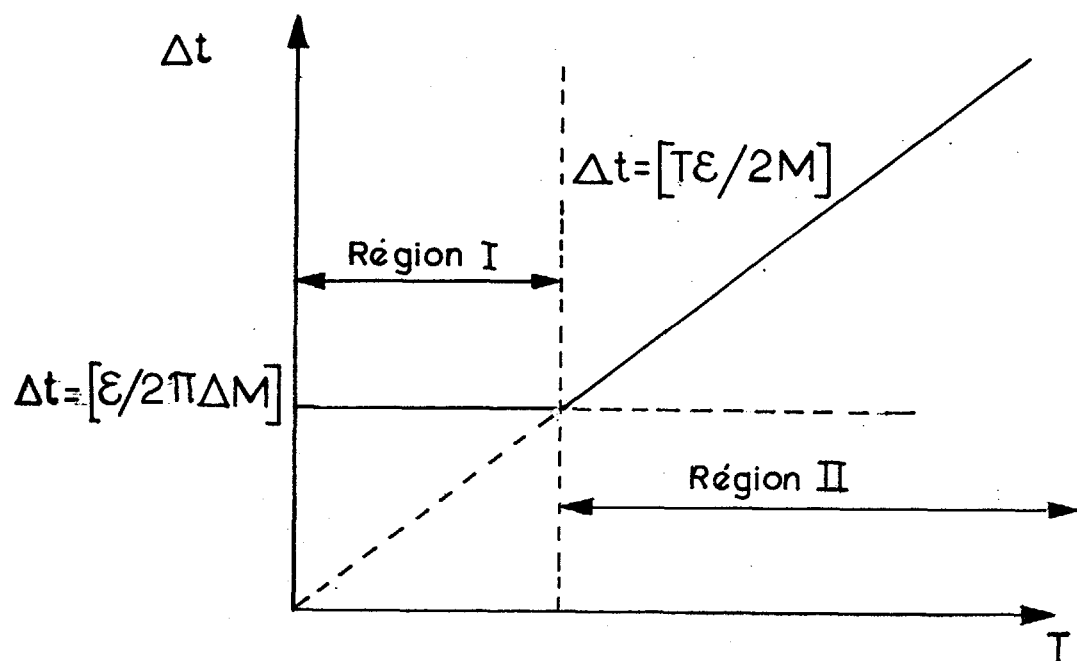


Fig (4-5 b)

FONCTIONS ALEATOIRES "VOISINES" DE FONCTIONS STATIONNAIRES (SECOND ORDRE)

par A. Blanc-Lapierre, B. Krivine, R. Sultan.

APPENDICE I.

CONDITION POUR QUE LA TRANSFORMATION $Z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} M(t, \theta) X(\theta) d\theta$ CONSERVE LA STATIONNARITE DE SECOND ORDRE.

Les filtres linéaires (transformations dans lesquelles M ne dépend que de $t-\theta$) ne sont pas les seules transformations de ce type qui conservent la stationnarité du second ordre. En se reportant aux relations de la page 7, on peut établir le résultat suivant (xx) :

Pour que la transformation (3-1) conserve la stationnarité de second ordre, il faut et il suffit que les éléments $d_{\nu, \nu'}^2 G(\nu, \nu')$ intervenant dans (3-2) soient, dans le plan $\nu \times \nu'$, localisés sur une courbe $\mathcal{C}$ (qui peut d'ailleurs se diviser en un certain nombre d'arcs $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots$) définie comme suit : $\mathcal{C}$ se projette sur l'axe ν' suivant un domaine $e(\nu')$ qui peut être un intervalle ou un ensemble d'intervalles disjoints ; sur $e(\nu')$, $\mathcal{C}$ est donnée par une équation $\nu = \varphi(\nu')$ de telle sorte qu'à toute valeur $\nu' \in e(\nu')$ corresponde une et une seule valeur de ν [Cf. fig. (Ap.I-1)] .

Alors, si les $dx(\nu)$ sont orthogonaux entre eux (c'est-à-dire si $X(t)$ est stationnaire de second ordre), il en est de même des $dz(\nu)$

(x) Voir : A. Blanc-Lapierre, B. Krivine et R. Sultan - Transformations linéaires conservant la stationnarité de second ordre (à paraître).

(xx) sous certaines conditions de régularité et de convergence précisées dans la note (x).



[ce qui entraîne la stationnarité de second ordre de $Z(t)$].

Si, sur $\mathcal{C}$, les éléments complexes $d^2_{\nu, \nu'} G(\nu, \nu')$ admettent une densité linéique $\sigma(\nu')$, alors on a :

$$M(t, \theta) = \int_{e(\nu')} e^{2\pi i [\varphi(\nu')t - \nu'\theta]} \sigma(\nu') d\nu' \quad (\text{Ap. I-1})$$

Donnons quelques exemples de fonction $M(t, \theta)$ correspondant à diverses situations $[e(\nu'), \sigma(\nu'), \varphi(\nu')]$.

a) fonction φ parabolique et $e(\nu') = [-\infty < \nu' < +\infty]$

$$\varphi(\nu') = \nu_0 + k \nu' + c \nu'^2 \quad (\text{Ap. I-2})$$

Posons :

$$R(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(\nu') e^{2\pi i \nu' \theta} d\nu' \quad (\text{Ap. I-3})$$

On trouve :

$$M(t, \theta) = e^{2\pi i \nu_0 t} R[kt - \theta] \otimes \frac{1}{\sqrt{ct}} \frac{1}{1-i} \exp \left[-i \pi \theta^2 / 2ct \right] \quad (\text{Ap. I-4})$$

où $\otimes$ désigne une convolution.

Si l'effet de courbure est nul $[c=0]$, $M(t, \theta)$ se réduit au produit du terme $e^{2\pi i \nu_0 t}$ indépendant de θ par le terme $R[kt - \theta]$ qui se "propage" avec la vitesse k .

On retrouve le cas particulier du filtre linéaire en faisant

$$\nu_0 = c = 0 \text{ et } k = 1.$$



b) masses $d^2_{\nu, \nu'} G(\nu, \nu')$ comprises dans une étroite bande de fréquences ν' soit $e(\nu') = (\nu'_0 - \Delta\nu, \nu'_0 + \Delta\nu)$ avec $\Delta\nu \ll |\nu_0|$ [Cf. fig. (Ap.I-2a)]. La relation (Ap. I-3) devient alors :

$$R(\theta) = \int_{\nu'_0 - \Delta\nu}^{\nu'_0 + \Delta\nu} \sigma(\nu') e^{2\pi i \nu' \theta} d\nu' = e^{2\pi i \nu'_0 \theta} R_E(\theta) \quad (\text{Ap.I-3bis})$$

avec

$$R_E(\theta) = \int_{\nu'_0 - \Delta\nu}^{\nu'_0 + \Delta\nu} \sigma(\nu') e^{2\pi i (\nu' - \nu'_0) \theta} d\nu'$$

$R(\theta)$ est ainsi mis sous la forme du produit de l'exponentielle $e^{2\pi i \nu'_0 \theta}$ correspondant à la fréquence centrale par la fonction $R_E(\theta)$ à variations beaucoup plus lentes qui joue le rôle d'une enveloppe.

Dans $e(\nu')$, nous pouvons poser :

$$\varphi(\nu') \approx \varphi(\nu'_0) + k(\nu' - \nu'_0) + c(\nu' - \nu'_0)^2 \quad (\text{Ap.I-5})$$

On a alors :

$$M(t, \theta) \approx e^{2\pi i [\varphi(\nu'_0)t - \nu'_0 \theta]} R_E[kt - \theta] \otimes \frac{1}{\sqrt{ct}} \frac{1}{1-i} \exp[-i\pi\theta^2/2ct] x \quad (\text{Ap.I-6})$$

L'évolution, au cours du temps t , de la fonction $M(t, \theta)$ de θ , correspond à une situation analogue à celle qui est considérée pour introduire la vitesse de phase et la vitesse de groupe :



$$2\pi i [\varphi(v'_0)t - v'_0 \theta]$$

a) Le terme e correspond à l'onde porteuse. Elle se propage à la vitesse de phase $\varphi(v'_0)/v'_0$.

b) Le terme $R_E [kt - \theta]$ correspond à l'enveloppe. Elle se propage à la vitesse de groupe $k = \frac{d\varphi(v')}{dv'} \quad (v' = v'_0)$.

c) Le troisième terme introduit des distorsions tendant à déformer la situation décrite en se basant uniquement sur a) et b). On peut montrer que l'influence de ce dernier terme est négligeable pour $t \ll [1/c \Delta v^2]$.

La figure (Ap.I-2b) visualise ces résultats en représentant la situation pour la partie réelle de $M(t, \theta)$.



30/32

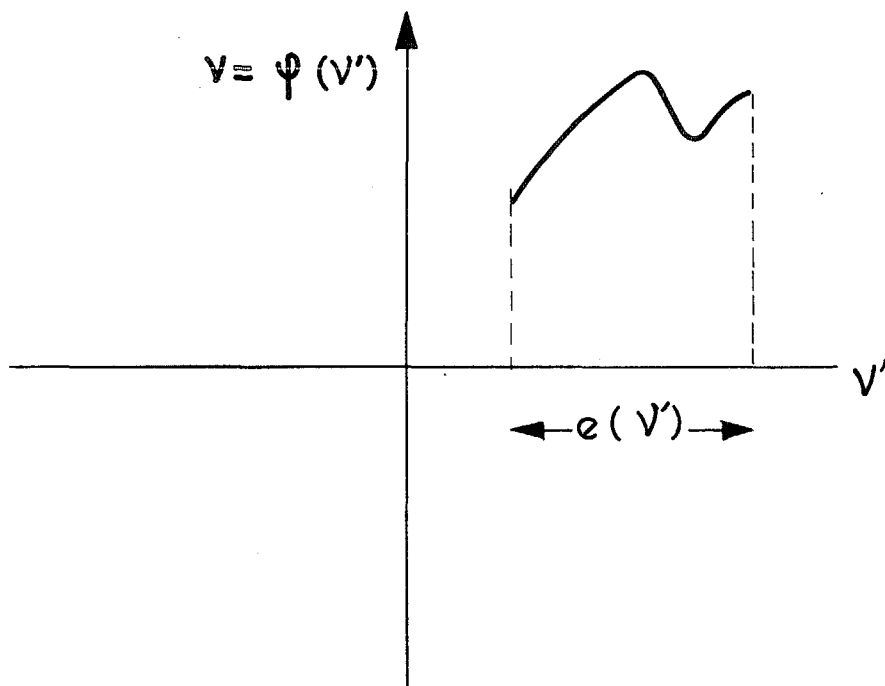


Fig ApI-1

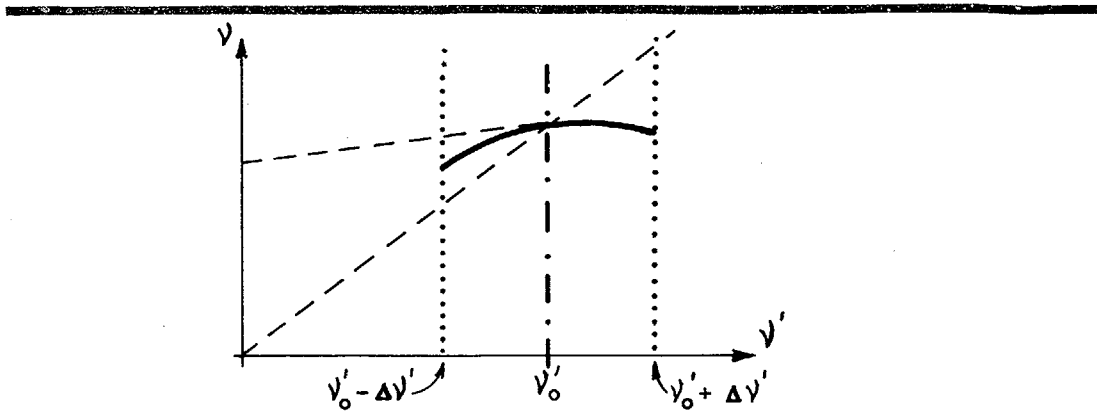


Fig. (Ap I - 2a)

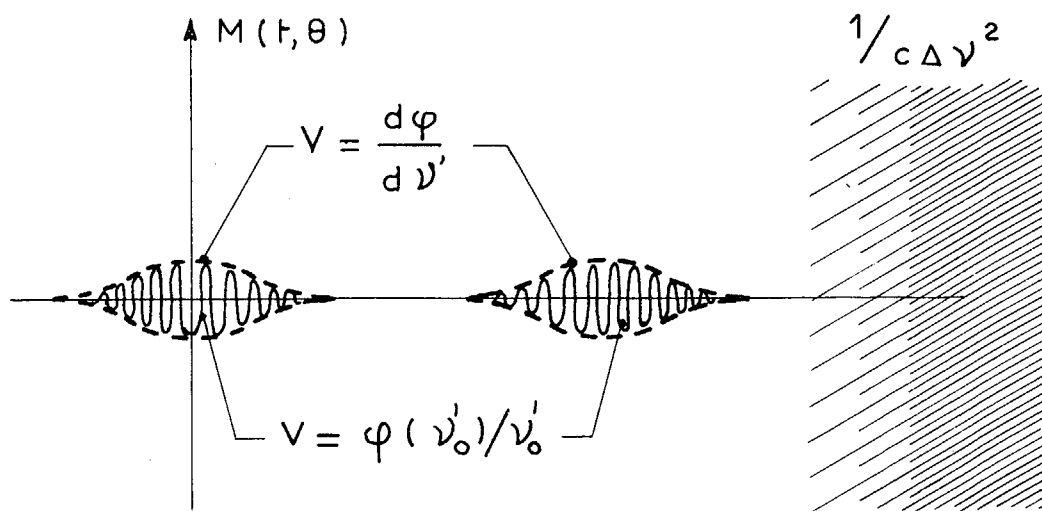


Fig.(Ap I - 2b)