



DEUXIÈME COLLOQUE
SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL
ET SES APPLICATIONS
NICE - 5 AU 10 MAI 1969

26/ 1

ANALYSE SPECTRALE PAR CORRELATION

J. MAX - J.M. FAUQUE

RESUME

La densité spectrale d'un signal qui représente la répartition de sa puissance sur l'axe des fréquences est une fonction de première importance, constamment utilisée dans tout ce qui touche le traitement du signal (identification de processus, analyse de vibrations, etc...).

Parmi toutes les méthodes possibles de calcul de cette fonction, la méthode par corrélation (calcul de la fonction de corrélation + transformation de Fourier) est très séduisante par sa simplicité et ses performances.



DEUXIÈME COLLOQUE
SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL
ET SES APPLICATIONS
NICE - 5 AU 10 MAI 1969

26/3

ANALYSE SPECTRALE PAR CORRELATION

J. MAX - J.M. FAUQUE

1 - DENSITES SPECTRALES ENERGETIQUES

La mesure des densités spectrales énergétiques (ou densité spectrale de puissance, ou spectre de puissance) est une opération que l'on rencontre de plus en plus fréquemment dans beaucoup de domaines. Il peut s'agir de la densité spectrale énergétique d'un signal aussi bien que de la densité spectrale énergétique d'interaction de deux signaux (ou interspectre).

Rappelons quelques domaines d'application parmi les principaux :

- étude des phénomènes vibratoires
- étude des caractéristiques dynamiques de systèmes
- physique nucléaire (étude de milieux, de plasmas ...)
- astrophysique, radioastronomie
- sonar, radar
- médecine, biologie
- etc...

Dans beaucoup de ces domaines il s'avère de plus en plus indispensable de pouvoir obtenir en temps réel la densité spectrale énergétique.



Rappelons que, effectuer l'analyse spectrale d'un signal, c'est (en supposant que le temps soit la variable indépendante) rechercher sa distribution en puissance (ou en énergie) en fonction de la fréquence. $S(\nu)$ est appelée densité spectrale énergétique

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(\nu) d\nu \text{ est l'énergie (ou la puissance) totale du signal}$$

$$\int_{\nu_1}^{\nu_2} S(\nu) d\nu \text{ est l'énergie (ou la puissance) contenue dans la bande } \nu_1, \nu_2.$$

On montre que $S(\nu)$ est transformée de Fourier de la fonction de corrélation $C(\tau)$.

Si l'on a affaire à un signal unique

$$S_{xx}(\nu) \rightleftharpoons C_{xx}(\tau)$$

Si l'on a affaire à deux signaux

$$S_{xy}(\nu) \rightleftharpoons C_{xy}(\tau)$$

2 - MESURE DE LA DENSITÉ SPECTRALE

Il existe trois approches possibles pour obtenir la densité spectrale énergétique

- Analyse directe
- Calcul de la transformée de Fourier du signal
- Mesure de la fonction de corrélation et transformation de Fourier de celle-ci.



3 - ANALYSE SPECTRALE DIRECTE Fig. 1

3.1 -

On fait passer le signal $x(t)$ dans un filtre dont la réponse impulsionnelle $h_{\nu_0, B}(t)$ a une transformée de Fourier qui se rapproche le plus possible du filtre idéal, c'est-à-dire qui ait la valeur 1 dans l'intervalle $\nu_0 - B/2$, $\nu_0 + B/2$ et qui soit nulle à l'extérieur

$$h_{\nu_0, B}(t) \iff H_{\nu_0, B}(\nu)$$

Soit $x_F(t)$ le signal ainsi filtré, on fait passer ce signal $x_F(t)$ dans un quadrateur qui donne $[x_F(t)]^2$, puis dans un intégrateur qui délivre en sortie

$$\frac{1}{T} \int_0^T [x_F(t)]^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) * h_{\nu_0, B}(t)]^2 dt$$

On voit que l'on a, d'après le théorème de PARSEVAL

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) * h_{\nu_0, B}(t)]^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\nu) \cdot |H_{\nu_0, B}(\nu)|^2 d\nu$$

donc

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) * h_{\nu_0, B}(t)]^2 dt = \int_{\nu_0 - B/2}^{\nu_0 + B/2} S_{xx}(\nu) d\nu = S_{xx}(\nu_0, B)$$

Bien entendu, physiquement, on n'intègre pas sur des durées infinies, on n'obtient donc pas la valeur exacte de $S_{xx}(\nu_0, B)$ mais une estimation.

On peut calculer, en première approximation,



l'erreur due aux limites d'intégration. Ceci a été fait notamment par Julius BENDAT.

Il faut évidemment répéter ces opérations de filtrage, quadrature, intégration, pour autant de valeurs de ν que l'on désire de points sur le spectre $S_{xx}(\nu)$ qui est obtenu ainsi sous forme échantillonnée.

Le fait de répéter cette opération N fois pour avoir N points du spectre, nécessite un enregistrement préalable des signaux et exclut évidemment d'opérer en temps réel.

3.2 -

Si l'on veut opérer en temps réel, cela peut se faire soit par batterie de filtre, soit par compression de temps.

3.2.1 - Analyseurs de D.S.E. à batteries de filtres (fig. 2)

Il faut réaliser N filtres de largeur de bandes B rigoureusement égales et dont les fréquences centrales $\nu_0, \nu_1, \nu_2 \dots \nu_N$ soient réglables, les gains de tous ces filtres étant rigoureusement égaux.

C'est là une solution qui présente d'énormes difficultés de réalisation et dont l'application ne peut être envisagée que dans quelques cas très particuliers.

3.2.2 - Analyseurs de D.S.E. à compressions de temps (fig. 3)

On code le signal à l'entrée et on l'échantillonne ; on emmagasine dans une mémoire un



nombre L d'échantillons. On relit ensuite cette mémoire à très grande vitesse, on décode le signal pour le rendre analogique et on le fait passer dans un filtre. Si le filtre est unique, ce qui est le plus simple, on relit N fois le contenu de la mémoire à N vitesses différentes, on obtient N points du spectre.

On peut également filtrer la sortie numérique de la mémoire dans un filtre numérique. Un inconvénient de ce dernier dispositif est que, à cause de la compression de temps, la bande de fréquence des signaux que l'on peut traiter est faible (0 - 20 kHz).

Par ailleurs, la mémoire ayant une faible capacité, il faut répéter plusieurs fois l'opération en intégrant chaque résultat dans un intégrateur extérieur.

Un autre inconvénient de ce système est que, si l'on veut mesurer ainsi des interspectres, il faut doubler une partie importante de l'appareil.

4 - CALCUL DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER DES SIGNAUX

Nous ne citons cette méthode que pour mémoire, car elle est bien connue (Fast-Fourier-Transform) et que, par ailleurs, elle ne peut pas, en général, permettre un traitement en temps réel.

Signalons, sur ce sujet, les travaux très importants de Madame CONNES, de l'observatoire de Meudon.



5 - ANALYSE DE DENSITES SPECTRALES ENERGETIQUES PAR CORRELATION

5.1 - Principe de la méthode

C'est une application directe du théorème de WIENER-KINCHINE qui lie fonction de corrélation et densité spectrale énergétique.

5.1.1 - Cas d'un signal unique

$x(t)$ a pour fonction d'autocorrélation

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t-\tau) dt$$

on démontre que la transformée de Fourier de $C_{xx}(\tau)$ est la densité spectrale énergétique de $x(t)$

$$S_{xx}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{xx}(\tau) e^{-2\pi j\nu\tau} d\tau$$

La fonction d'autocorrélation étant toujours paire $S_{xx}(\nu)$ se réduit à

$$S_{xx}(\nu) = 2 \int_0^{\infty} C_{xx}(\tau) \cos 2\pi\nu\tau d\tau$$

5.1.2 - Cas de deux signaux

A $x(t)$ et $y(t)$ correspondent deux fonctions d'intercorrélation

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y(t-\tau) dt$$

$$C_{yx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y(t) x(t-\tau) dt$$



avec la relation $C_{xy}(\tau) = C_{yx}(-\tau)$ il suffit donc de considérer une seule fonction d'intercorrélation.

Toujours en vertu du théorème de WIENER-KINCHINE, la transformée de Fourier de $C_{yx}(\tau)$ que l'on appelle l'interspectre $S_{yx}(\nu)$ est :

$$S_{xy}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{xy}(\tau) e^{-2\pi j \nu \tau} d\tau$$

qui se décompose en partie réelle et partie imaginaire

$$R_{xy}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{xy}(\tau) \cos 2\pi \nu \tau d\tau$$

$$I_{xy}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{xy}(\tau) \sin 2\pi \nu \tau d\tau$$

Rappelons, à titre d'exemple que si l'on excite un système avec un signal $x(t)$ dont la fonction d'autocorrélation est assimilable à une impulsion de Dirac, l'intercorrélation

$$C_{yx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) x(t-\tau) dt$$

est la réponse impulsionnelle $h(t)$ tandis que l'interspectre $S_{yx}(\nu)$ qui est la transformée de Fourier de $h(t)$ est la fonction de transfert isochrone du système.



5.2 - Fonctions de corrélations de signaux échantillonnés

En réalité, la plupart des corrélations utilisables de nos jours fonctionnent par des techniques numériques ou hybrides, donc par échantillonnage des signaux.

5.2.1 - Théorème de Schannon

Soit ν_n la plus haute fréquence contenue dans les signaux $x(t)$ et $y(t)$, c'est-à-dire que $S_{xx}(\nu)$ et $S_{yy}(\nu)$ peuvent être considérés comme nuls pour $|\nu| \geq \nu_M$, on montre qu'il suffit d'échantillonner le signal à une fréquence $F_e \geq 2\nu_M$ pour ne rien perdre de l'information qu'il contient.

On peut reconstituer $x(t)$ et $y(t)$ à partir de leurs échantillons espacés de $T_e \leq \frac{1}{2\nu_M}$ par les relations :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e) \frac{\sin \pi F_e (t - kT_e)}{\pi F_e (t - kT_e)}$$

$$y(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} y(lT_e) \frac{\sin \pi F_e (t - lT_e)}{\pi F_e (t - lT_e)}$$

$y(t - \tau)$ s'écrira donc

$$y(t - \tau) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} y(lT_e) \frac{\sin \pi F_e (t - \tau - lT_e)}{\pi F_e (t - \tau - lT_e)}$$



5.2.2.- Fonction de corrélation

Par définition, on peut écrire

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) y(t-\tau) dt$$

d'où

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_k x(kT_e) \frac{\sin \pi F_c(t-kT_e)}{\pi F_c(t-kT_e)} \sum_e y(eT_e) \frac{\sin \pi F_c(t-\tau-eT_e)}{\pi F_c(t-\tau-eT_e)} dt$$

qui s'écrit

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_k x(kT_e) \sum_e y(eT_e) \int_{-T/2}^{T/2} \frac{\sin \pi F_c(t-kT_e)}{\pi F_c(t-kT_e)} \cdot \frac{\sin \pi F_c(t-\tau-eT_e)}{\pi F_c(t-\tau-eT_e)} dt$$

ou

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_k x(kT_e) \sum_e y(eT_e) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi F_c(t-kT_e)}{\pi F_c(t-kT_e)} \cdot \frac{\sin \pi F_c(t-\tau-eT_e)}{\pi F_c(t-\tau-eT_e)} dt$$

en utilisant les propriétés des fonctions $\frac{\sin x}{x}$ on obtient

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=-N}^N x(kT_e) y[(k-m)T_e] \frac{\sin \pi F_c(\tau - mT_e)}{\pi F_c(\tau - mT_e)}$$

et si $\tau = mT_e$

$$C_{xy}(mT_e) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_k x(kT_e) y[(k-m)T_e]$$



On voit donc que, à partir de signaux échantillonnés, on peut SANS INTERPOLER CES ECHANTILLONS, calculer exactement les fonctions de corrélations. En particulier, en ne considérant que la somme des produits des échantillons des 2 fonctions, on obtient les fonctions de corrélations échantillonnées à la même cadence que les signaux.

5.3. Densités spectrales

Par définition

$$S_{xy}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{xy}(\tau) e^{-2\pi j\nu\tau} d\tau$$

L'opération qui vient le plus naturellement à l'esprit consiste à, d'abord, interpoler la fonction de corrélation échantillonnée. Cette interpolation est choisie parmi celles qui sont facilement réalisables (interpolation du 1er ou 2e ordre).

On multiplie ensuite cette fonction de corrélation interpolée par les fonctions $\cos 2\pi\nu\tau$ et $\sin 2\pi\nu\tau$, pour les différentes valeurs de ν désirées.

Une telle opération est difficile à réaliser, que ce soit par voie analogique, par voie hybride, ou par voie numérique.

Nous allons montrer qu'il est RIGOREUSEMENT INUTILE D'INTERPOLER LA FONCTION DE CORRELATION ECHANTILLONNEE $C_{xy}(\tau)_{ech} = \frac{1}{T_e} \sum_m C_{xy}(mT_e) \delta(\tau - mT_e)$ et qu'il EST TOUT AUSSI INUTILE DE DISPOSER DES FONCTIONS SINUS ET COSINUS SOUS FORME QUASI CONTINUE



(définies par un très grand nombre de points en numérique, ou réalisées sous forme analogique).

Nous avons vu que

$$C_{xy}(\tau) = \sum_m C_{xy}(mT_e) \frac{\sin \pi F_c (\tau - mT_e)}{\pi F_c (\tau - mT_e)}$$

d'où

$$S_{xy}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_m C_{xy}(mT_e) \frac{\sin \pi F_c (\tau - mT_e)}{\pi F_c (\tau - mT_e)} e^{-2\pi j v \tau} d\tau$$

$$S_{xy}(v) = \sum_m C_{xy}(mT_e) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi F_c (\tau - mT_e)}{\pi F_c (\tau - mT_e)} e^{-2\pi j v \tau} d\tau$$

avec bien entendu

$$S_{xy}(v) \equiv 0 \quad \forall v \notin [-F_H, +F_H]$$

$$\text{et } F_c = \frac{1}{T_e} \gg 2 F_H$$

considérons l'expression $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi F_c (\tau - mT_e)}{\pi F_c (\tau - mT_e)} e^{-2\pi j v \tau} d\tau$

c'est la transformée de Fourier de $\frac{\sin \pi F_c (\tau - mT_e)}{\pi F_c (\tau - mT_e)}$

mais la transformée de Fourier de

$\frac{\sin \pi F_c \tau}{\pi F_c \tau}$ est $\frac{1}{F_c} \Pi_{F_c/2}(v)$, Π étant la fonction projectrice



$\frac{1}{F_c} \text{rect}_{F_c/2}(v)$ est égal à $\frac{1}{F_c}$ pour $v \in \left[-\frac{F_c}{2}, \frac{F_c}{2}\right]$

nulle pour $v \notin \left[-\frac{F_c}{2}, \frac{F_c}{2}\right]$

donc la transformée de Fourier de $\frac{\sin \pi F_c (\tau - mT_c)}{\pi F_c (\tau - mT_c)}$

sera $\frac{1}{F_c} \text{rect}_{F_c/2}(v) e^{-2\pi j v m T_c}$

pour $v \in \left[-\frac{F_c}{2}, \frac{F_c}{2}\right]$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi F_c (\tau - mT_c)}{\pi F_c (\tau - mT_c)} e^{-2\pi j v \tau} d\tau = \frac{1}{F_c} e^{-2\pi j v m T_c}$$

donc dans l'intervalle $-\frac{F_c}{2} < v < \frac{F_c}{2}$

$$S_{xy}(v) = \frac{1}{F_c} \sum_m C_{xy}(mT_c) e^{-2\pi j v m T_c}$$

et puisque $S_{xy}(v) \equiv 0 \quad \forall v \notin \left[-\frac{F_c}{2}, \frac{F_c}{2}\right]$

on peut écrire, sans restrictions

$$S_{xy}(v) = \frac{1}{F_c} \sum_m C_{xy}(mT_c) e^{-2\pi j v m T_c}$$

ou, pour les parties réelles et imaginaires

$$\Re_{xy}(v) = \frac{1}{F_c} \sum_m C_{xy}(mT_c) \cos 2\pi v m T_c$$



$$J_{xy}(\nu) = \frac{1}{T_e} \sum_m C_{xy}(mT_e) \sin 2\pi \nu m T_e$$

D'où le résultat capital :

pour obtenir la valeur exacte de la densité spectrale correspondant à la fréquence ν il suffit de faire la somme des produits, échantillon à échantillon, de la fonction de corrélation échantillonnée et de la fonction $\sin 2\pi \nu \tau$ (ou $\cos 2\pi \nu \tau$) échantillonnée à la même cadence de $C_{xy}(\tau)$.

IL EST DONC INUTILE D'INTERPOLER LA FONCTION DE CORRELATION.

Il suffit de considérer les points successifs de $C_{xy}(mT_e)$ et de les multiplier chacun par la valeur correspondante de la fonction cosinus $2\pi \nu m T_e$ (ou de la fonction sinus). fig. 4.

5.4 - Remarques

5.4.1.

La fonction de corrélation n'est pas connue pour des valeurs du retard τ allant de $-\infty$ à $+\infty$.

Les corrélateurs donnent un nombre de points limite correspondant à autant de retard différents.

Avec un corrélateur à n points, l'intervalle entre chaque point étant T_e , la fonction de corrélation est connue de $-\tau_M$ à $+\tau_M$ avec $\tau_M = (n-1) T_e$.



Si la fonction de corrélation est connue dans l'intervalle $-\tau_M, \tau_M$, de valeur $2(n-1)T_e = 2NT_e$ on démontre que la finesse d'analyse ne peut être meilleure que $\frac{1}{2NT_e}$.

On a donc intérêt à avoir $2NT_e$ aussi grand que possible ; N étant fixé on ne peut agir que sur T_e ; il faudra prendre T_e aussi grand que possible, donc F_e aussi petit que possible, F_e restant compatible avec le théorème de Shannon.

Aussi curieux que cela paraisse, pour obtenir le spectre avec la meilleure définition possible, on a intérêt à avoir sur la fonction de corrélation des points aussi espacés que possible (fig. 5).

5.4.2 -

Puisque la finesse d'analyse la meilleure est d'environ $\frac{1}{2NT_e} = \frac{1}{2(n-1)T_e}$ il est inutile de

calculer le spectre pour des fréquences inférieures à $\frac{1}{2(n-1)T_e}$ ou $\frac{1}{2nT_e}$ qui est peu différent.

La plus basse fréquence analysée sera

$$f_1 = \frac{1}{2nT_e}$$

(N.B. Nous avons pris $\frac{1}{2nT_e}$ au lieu de $\frac{1}{2(n-1)T_e}$ parce que le nombre n , nombre de points du corrélateur est le plus souvent un nombre "rond" (50, 100, 150, 200)).

Donc le 1er point du spectre sera :



$$S_{xy}(v_1) = S_{xy}\left(\frac{1}{2nT_e}\right)$$

Pour la même raison, il est inutile de chercher des points du spectre espacés de moins de $\frac{1}{2nT_e}$ le second point sera donc

$$S_{xy}(v_2) = S_{xy}\left(\frac{2}{2nT_e}\right)$$

puisque, par définition $S_{xy}(v) \equiv 0$ pour $|v| \geq \frac{F_e}{2}$ on s'arrêtera, dans le calcul des différents points, à la fréquence γ_k telle que

$$v_2 = \frac{k}{2nT_e} = \frac{1}{2T_e}$$

d'où $r = n$

avec un corrélateur à n points, on peut donc calculer n points du spectre.

5.4.3.

La plus basse fréquence à considérer étant

$$v_1 = \frac{1}{2nT_e}, \text{ on aura, pour la partie réelle du spectre}$$

par exemple,

$$\Re_{xy}(v_1) = \Re_{xy}\left(\frac{1}{2nT_e}\right) = T_e \sum_m C_{xy}(mT_e) \cos 2\pi \frac{1}{2nT_e} mT_e$$

le nombre de valeurs distinctes de m étant $2n-1$

$$(m = -(n-1), -(n-2) \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots (n-2), n-1.)$$

Ces valeurs vont couvrir une période entière du cosinus (ou du sinus) échantillonné à la fréquence $F_e = \frac{1}{T_e}$.



Pour la fréquence suivante $\frac{2}{2n T_e}$, on aura

$$R_{xy}(v_2) = R_{xy}\left(\frac{2}{2n T_e}\right) = T_e \sum_m C_{xy}(m T_e) \cos \frac{2\pi}{2n} \cdot 2m$$

on voit que les $2n-1$ valeurs de $\cos \frac{2\pi}{2n} \cdot 2m$ fait partie de l'ensemble des $2n-1$ valeurs de $\cos \frac{2\pi}{2n} \cdot m$.

Il en serait de même pour toute autre valeur de la fréquence v_k à laquelle correspond

$$\cos \frac{2\pi}{2n} \cdot Km$$

Si donc on dispose en mémoire des $2n-1$ valeurs de $\cos \frac{2\pi}{2n} \cdot m$, on dispose par le fait même de toutes les valeurs de $\cos \frac{2\pi}{2n} \cdot Km$ (ou sinus $\frac{2\pi}{2n} \cdot Km$).

On conçoit l'importance de cette remarque qui, au moyen d'une table contenant $2n$ valeurs de la fonction cosinus $\frac{2\pi}{2n} \cdot m$ pour m entier tel que $|m| \leq n$, permet de générer toutes les fonctions cosinus ou sinus nécessaire à l'obtention du spectre.

Les propriétés de symétrie des fonctions sinus et cosinus permettent d'ailleurs de ne mettre en mémoire que n ou même $\frac{n}{2}$ valeurs distinctes.

C'est la raison pour laquelle on a défini la $\frac{1}{2}$ période du cosinus sur un nombre pair (n) et non sur $n-1$.



5.5 - Réalisation

5.5.1 - Principe de réalisation du transformateur de Fourier associé aux corrélateurs automatiques en temps réel

La plupart des corrélateurs automatiques en temps réel donnent simultanément un certain nombre de points de la fonction de corrélation correspondant à des retards positifs.

Pour obtenir des retard négatifs, il suffit de permuter les entrées du corrélateur puisque

$$C_{xy}(-\tau) = C_{yx}(\tau).$$

Mais la connaissance de $C(\tau)$ pour $\tau \geq 0$ est suffisante dans de nombreux cas

- s'il s'agit d'une fonction d'autocorrélation, celle-ci étant paire $C(-\tau) = C(\tau)$
- s'il s'agit d'une fonction d'intercorrélation représentant la réponse impulsionnelle d'un système, $C(-\tau) \equiv 0$
- s'il s'agit d'une fonction d'intercorrélation quelconque, on traitera d'abord $C(\tau)$ puis $C(-\tau)$ et on fera la somme des transformées de Fourier (fig. 6).

On voit que, considérant n points de la fonction de corrélation pour des retards positifs, on peut admettre que les n points correspondent à la connaissance de $2n-1$.

De ce fait, pour la fréquence la plus basse,



$\frac{1}{2n T_e}$, au lieu d'avoir une période de la fonction cosinus (ou sinus) répartie sur $2n$ points, il suffit d'une demi-période répartie sur n points.

Il suffira donc d'avoir en mémoire n points de la fonction cosinus pour générer toutes les fréquences nécessaires, tant du cosinus que du sinus.

La figure 7 montre comment, à partir de n échantillons du cosinus on obtient la fréquence ν_1 , en lisant les n points un par un, dans l'ordre 0, 1, 2, 3 ...

On obtient la fréquence ν_2 en les lisant 2 par 2 soit 0, 2, 4, 6 ...

On obtient la fréquence ν_r en les lisant de r en r soit 0, r , $2r$, ...

La figure 8 donne le schéma synoptique succinct du transformateur de Fourier.

5.5.2 - Générateur de cosinus (ou de sinus)

La valeur des n points de la fonction cosinus sont mis en mémoire une fois pour toutes et on attaque cette mémoire par l'adresse de l'échantillon cherché.

Nous avons choisi de mettre le cosinus en mémoire par mots de 8 bits. (Cette mémoire est une matrice à diodes, très prochainement nous utiliseront des mémoires mortes en technique LSI). A chaque adresse correspond donc un mot de 8 bits qui se traduit par



l'état des 8 sorties de la mémoire.

5.5.3 - Multiplieur hybride

Le multiplieur hybride est constitué par un réseau de résistances qui fait office de diviseur potentiométrique ; ce réseau possède 8 entrées ; chacune de ces entrées est commandée par l'un des 8 bits de sortie de la mémoire et selon que ce bit a pour valeur 0 ou 1, la résistance correspondante est mise au potentiel de la masse ou au potentiel $C(m T_e)$.

5.5.4. Intégrateur

C'est un intégrateur analogique qui est attaqué par la sortie du multiplieur qui lui délivre la suite des potentiels $C(m T_e)$. $\cos \frac{\pi}{n} k m$ à la fin

d'une séquence de n multiplications, correspondant à une même valeur de r , la tension de sortie représente la valeur $S(\sqrt{r})$; cette valeur est mise en mémoire, l'amplification intégrateur est remis à zéro et une nouvelle séquence commence qui donnera la valeur suivante $S(\sqrt{r_{k+1}})$.

5.5.5 - Fonction de pondération

Dans le cas défavorable où l'on veut analyser une densité spectrale d'une part très étendue en fréquences et d'autre part présentant des "pics" étroits, le pouvoir séparateur peut être insuffisant et le graphe $S(\nu)$ que l'on obtient présente des oscillations parasites qui peuvent prêter à confusion.

L'application d'une fonction de pondération sur la fonction de corrélation, si elle n'accroît pas



le pouvoir séparateur, a du moins l'intérêt de lisser ces oscillations parasite, on saura alors que tous les pics que l'on obtient correspondent à la réalité.

La fonction de pondération vaut 1 pour le premier point $C(0)$ et 0 pour le dernier (τ_M) ; entre ces points, nous avons adopté la loi

$$\frac{\sum_{m=0}^M \pi \frac{m \tau_c}{\tau_H}}{\pi \frac{m \tau_c}{\tau_H}} \quad \text{(pondération de Fauque-Berthier)}$$

On réalise cette pondération en utilisant un atténuateur à affaiblissement variable, la progression de l'adresse des échantillons de la fonction de corrélation entraîne la progression de l'affaiblissement suivant la loi désirée ; cet atténuation variable est réalisée au moyen d'une seconde "mémoire morte" et d'un second multiplieur hybride.

5.5.6 - Temps de calcul approximatif de la transformée de Fourier de la fonction de corrélation

Dans le cas d'un corrélateur à 200 points :

- durée d'une multiplication : 1 μ s
- durée du calcul d'un point du spectre : 200 μ s
- pour 200 points du spectre : 40 ms

S'il faut aussi calculer la partie imaginaire on a un temps de calcul total de 80 ms.

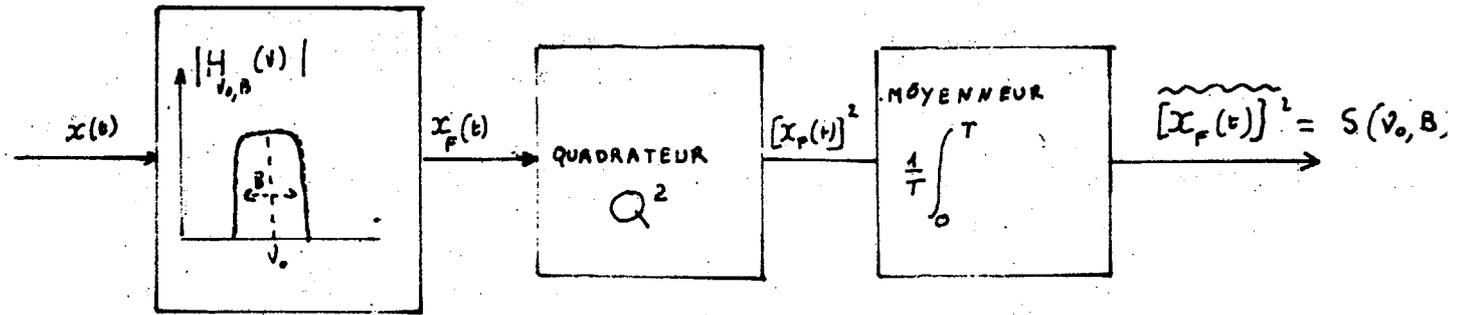


Fig 1

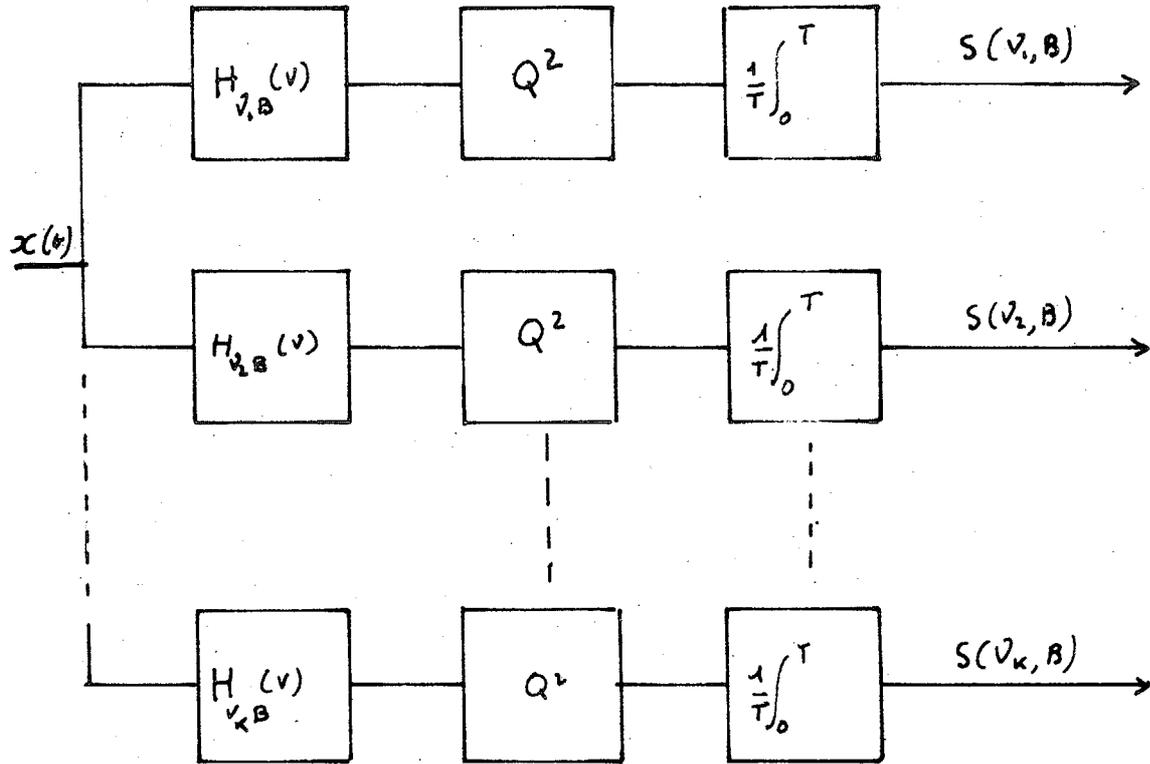


Fig 2

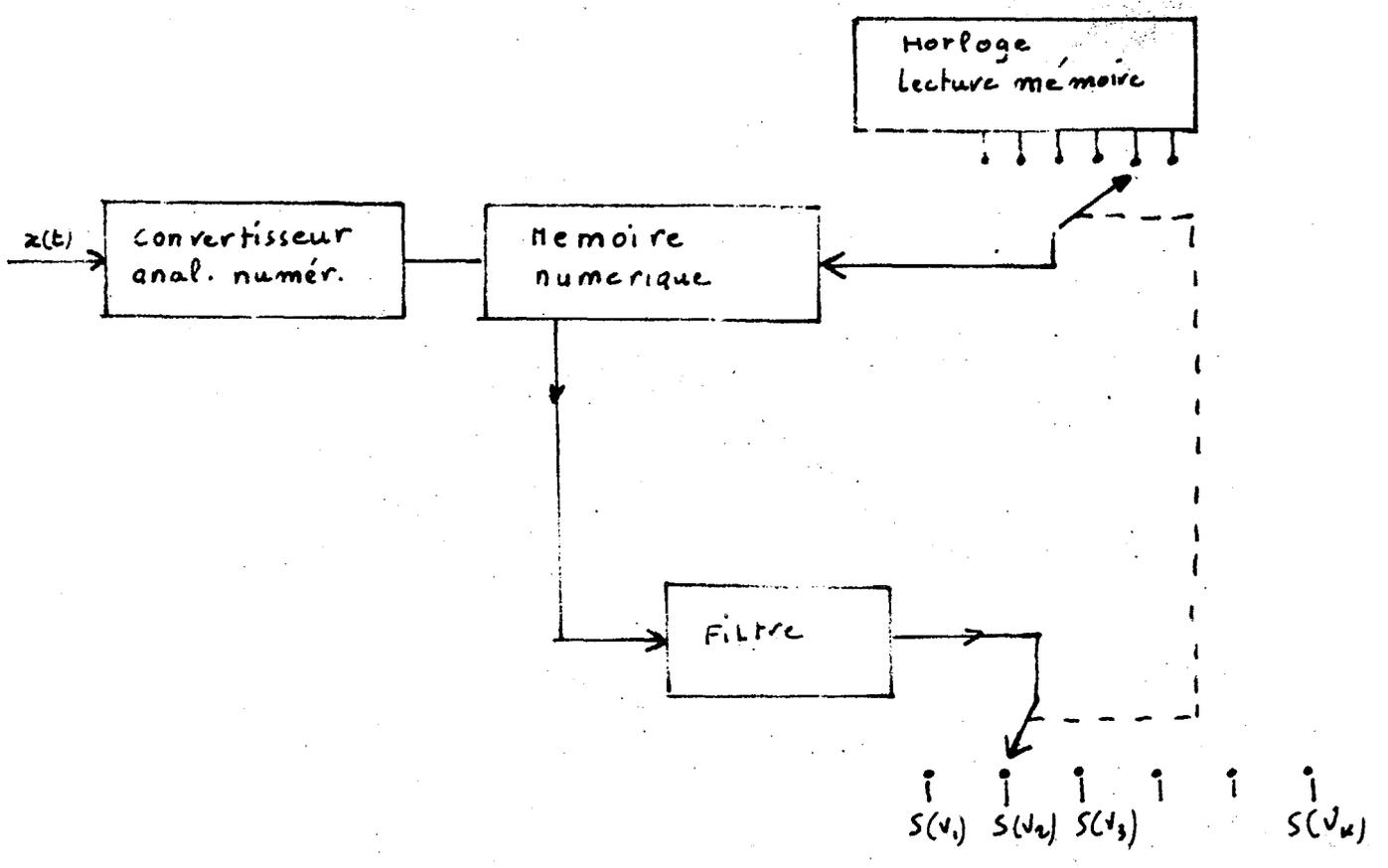


Fig 3



26/26

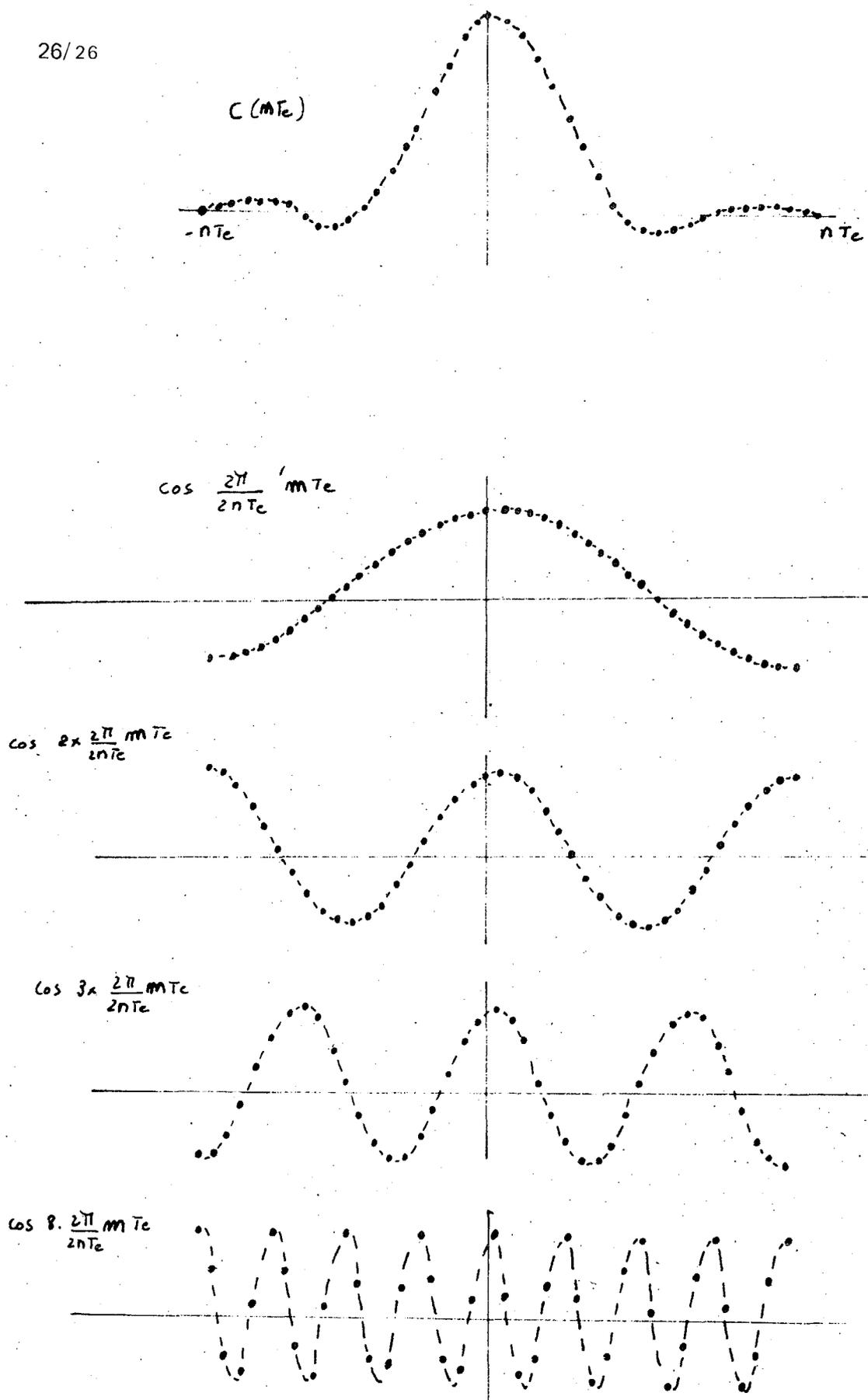


Fig 4

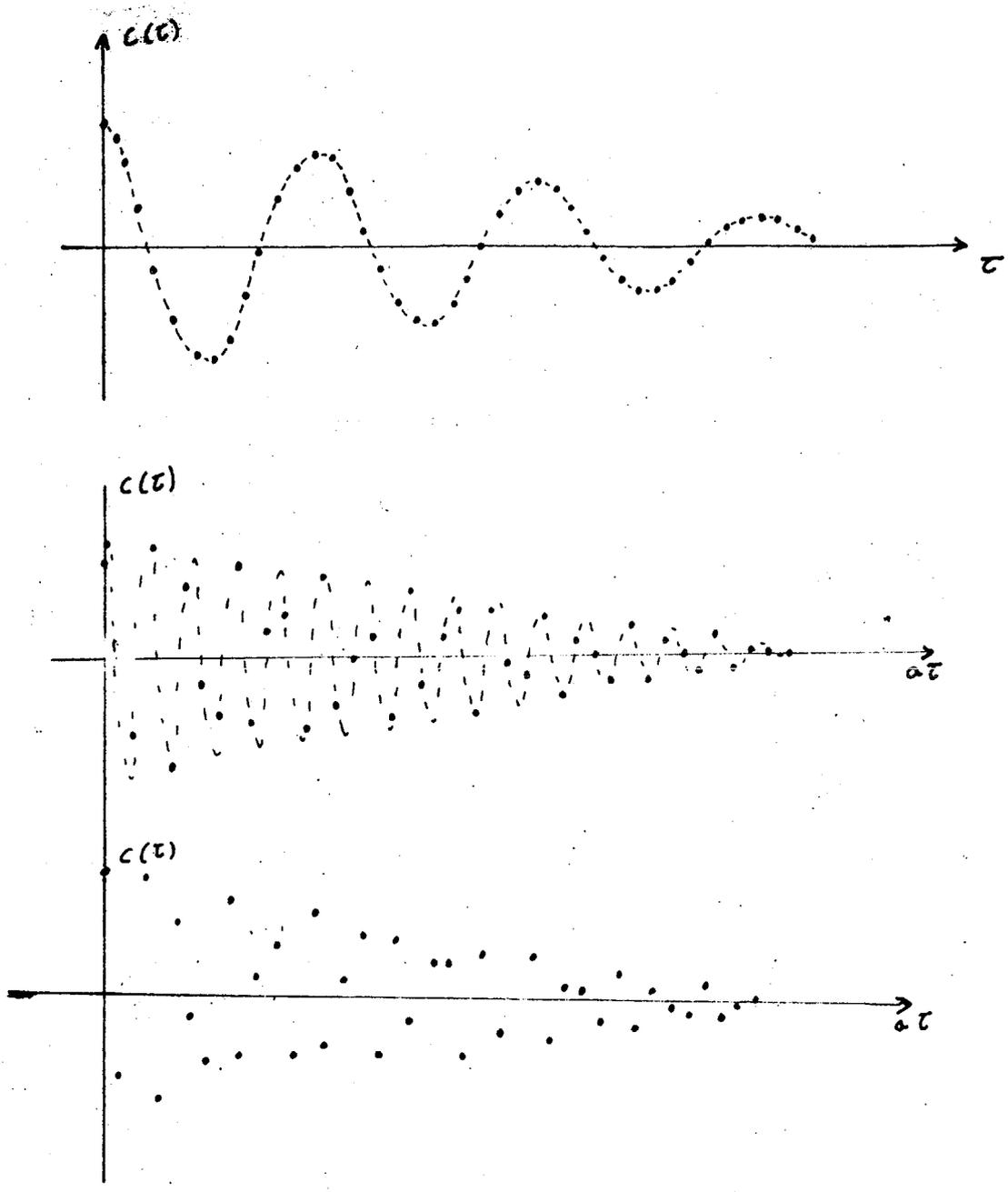


Fig 5

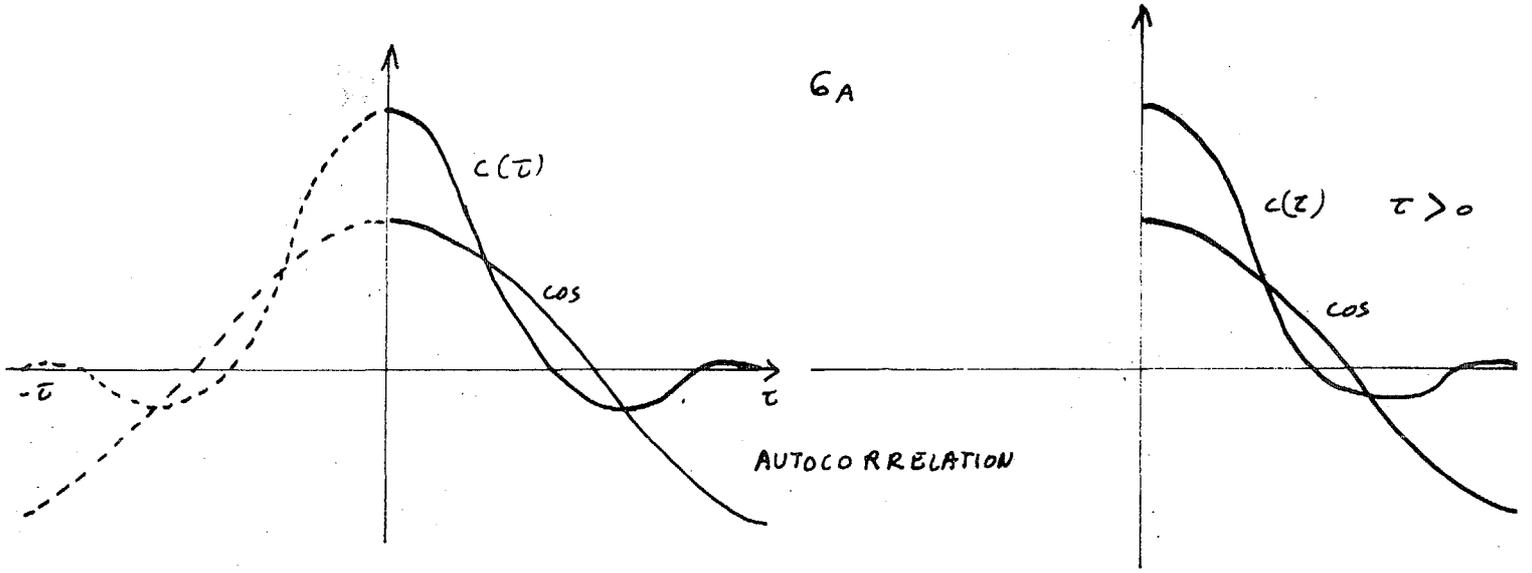
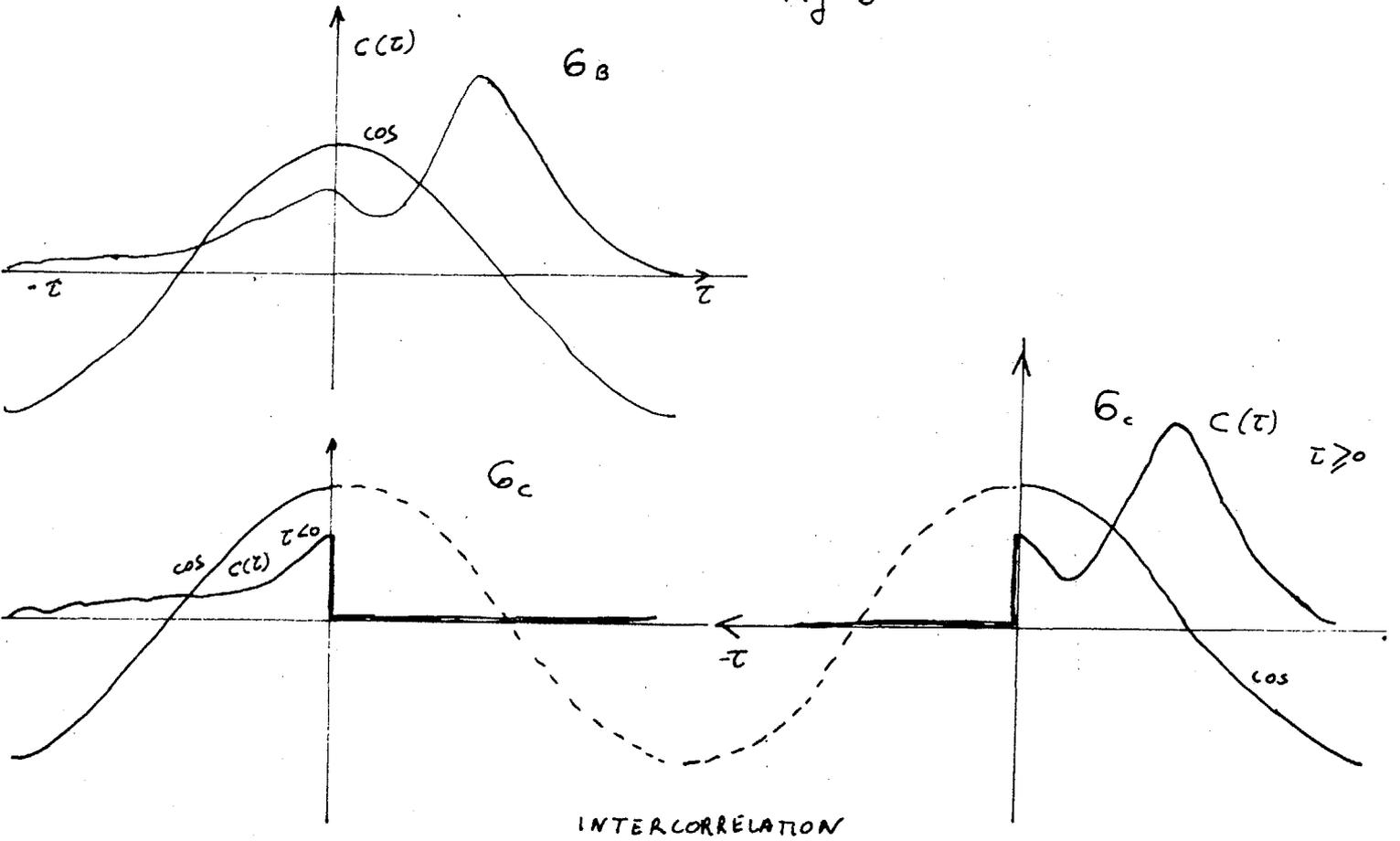


Fig 6



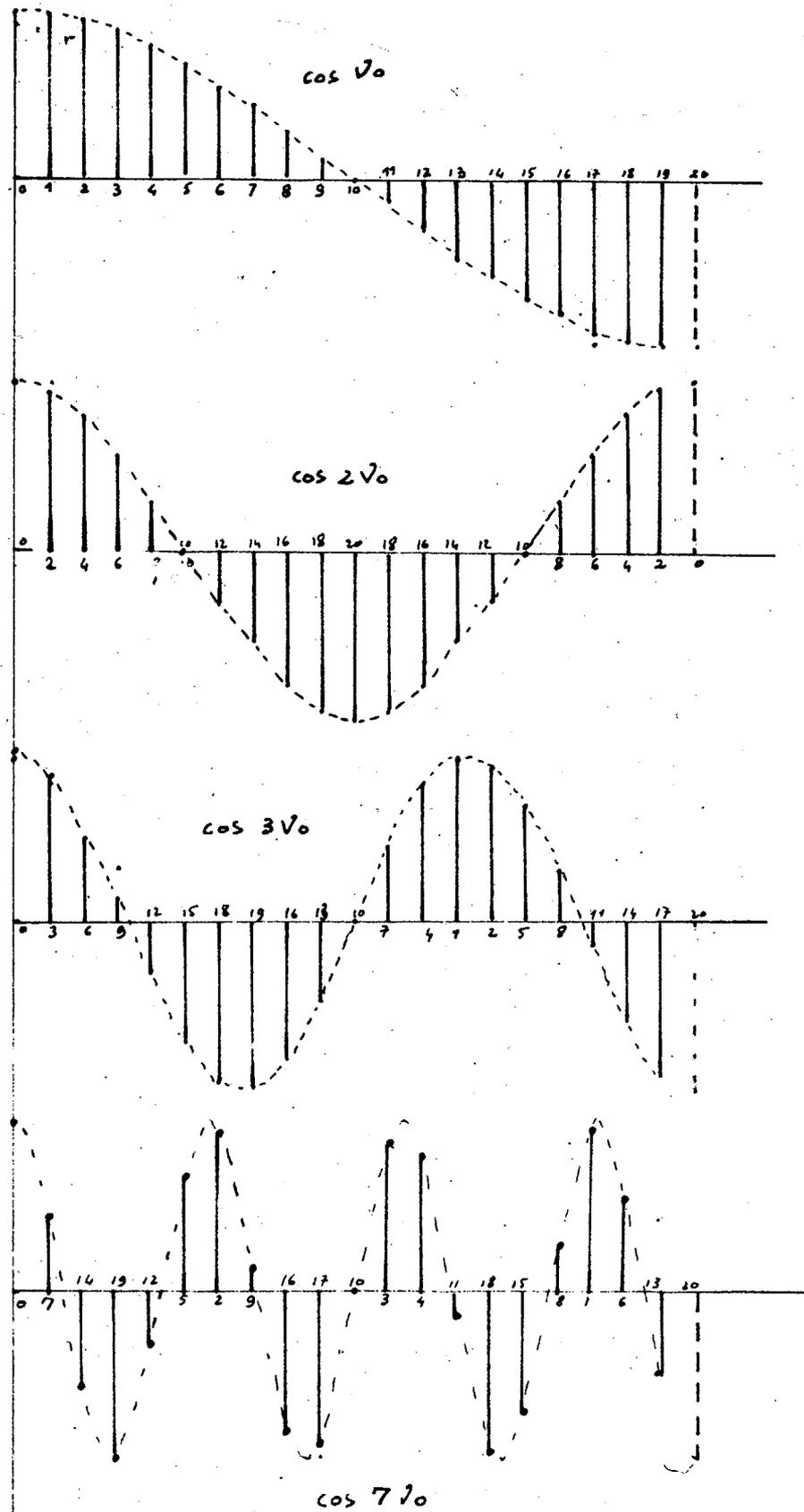


Fig 7

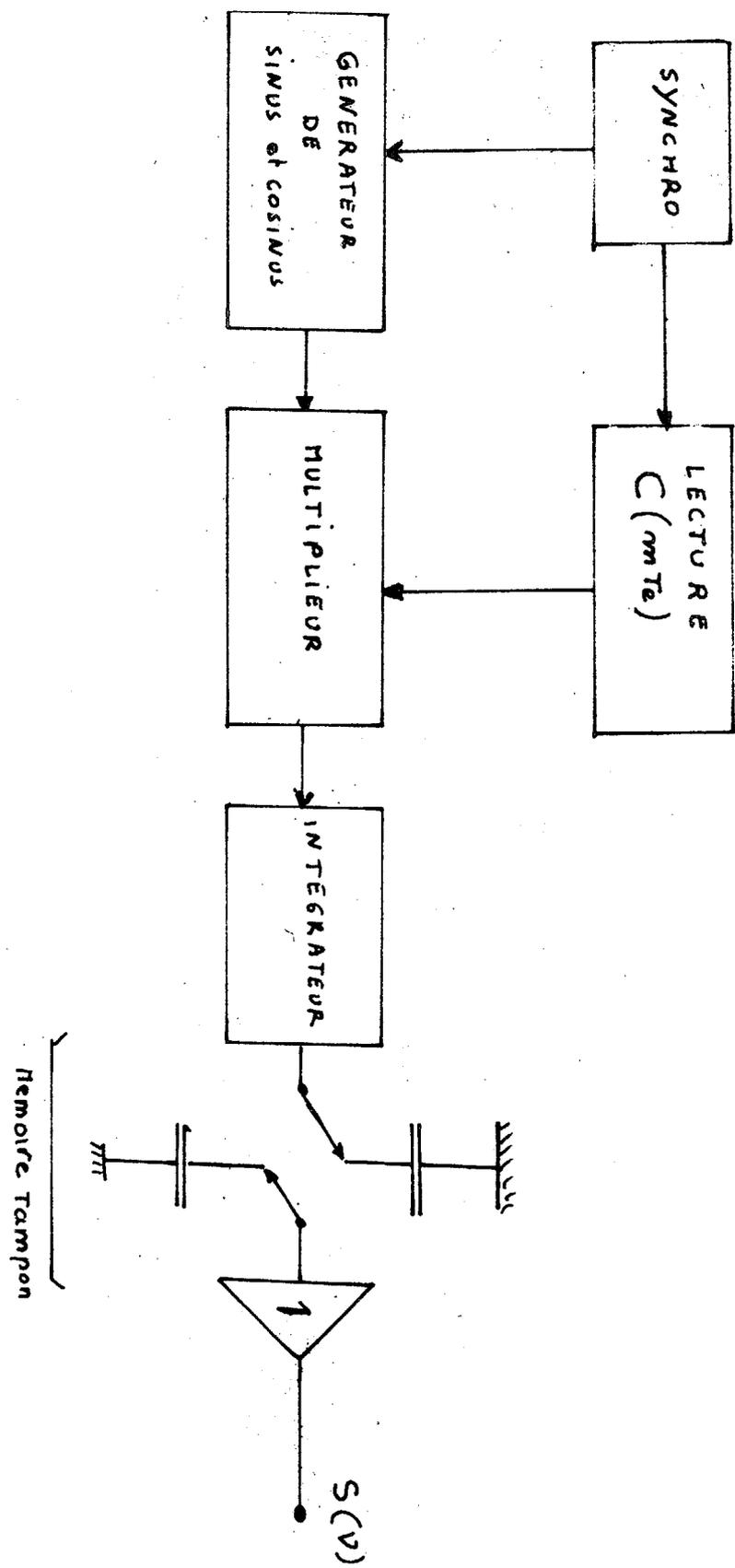


Fig 8