



DEUXIÈME COLLOQUE
SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL
ET SES APPLICATIONS
NICE - 5 AU 10 MAI 1969

25/1

DETECTION NUMERIQUE SYNCHRONE DES SIGNAUX FAIBLES

--

par J. OSWALD

Directeur Technique Adjoint

CIT - Compagnie Industrielle des Télécommunications

R E S U M E.

L'auteur expose le principe d'un système de détection synchrone des signaux faibles au milieu de bruit, reposant sur une analyse de la phase instantanée de l'onde reçue. Cette dernière est échantillonnée et échantillonnée à des intervalles de temps multiples de la période du signal, suffisamment grands devant le rayon de corrélation de bruit. Le procédé, qui repose sur un critère de détection particulier (probabilité de fausse alarme) permet de réaliser un analyseur (ou diviseur de bande) dépourvu de filtres et ne comportant que des organes numériques.

- oOo -



DEUXIÈME COLLOQUE
SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL
ET SES APPLICATIONS

25/3

NICE - 5 AU 10 MAI 1969

SYNCHRONOUS DIGITAL DETECTION OF SMALL SIGNALS

by J. R. OSWALD

Assistant of the Technical Manager
CIT - Compagnie Industrielle des Télécommunications

S U M M A R Y .

A method of synchronous detection of signals, applicable to very small signal to noise ratio is proposed, the principle of which is an analysis of the instantaneous phase of the received wave.

After complete amplitude limitation, the wave is sampled at time intervals which are multiples of the period of the signal, but large enough to avoid any correlation between the noise samples.

The proposed method, making use of a particular criterium for the detection (false alarm probability) is convenient for the design of a digital type wave analyser (partition of the frequency band) without any use of linear filter.

- oOo -



DETECTION NUMERIQUE SYNCHRONE DES SIGNAUX FAIBLES.

INTRODUCTION.

Parmi les nombreux procédés qui ont été proposés pour détecter les signaux de faible amplitude au milieu d'un bruit intense, figure en bonne place le procédé d'autocorrélation. L'inconvénient de ce procédé est toutefois que l'amplitude relative du signal de sortie est proportionnelle au carré du rapport signal/bruit mesuré à l'entrée : l'efficacité diminue donc très rapidement dans le cas des petits signaux (rapports signal/bruit inférieurs à l'unité). Si, au lieu d'effectuer une autocorrélation on fait une corrélation du signal avec une onde engendrée localement (copie), le rapport signal/bruit n'intervient plus que par sa première puissance, ce qui est beaucoup plus favorable.

Une simplification importante apportée aux procédés de corrélation ou d'autocorrélation consiste à écrêter le signal, ce qui revient à ne tenir compte que de sa polarité. En effet, on peut ainsi réaliser les retards au moyen de registres à décalage, simples et peu coûteux, et plus généralement faire usage de circuits logiques ou numériques plus commodes à manier que les circuits dits "analogiques". L'écrêtage du signal est d'autant plus justifié que l'amplitude de l'onde utile devient rapidement négligeable devant celle du bruit : la grandeur la plus significative n'est plus l'amplitude instantanée, ou encore la puissance utile, mais plutôt la variation de la polarité, ou si l'on préfère, les passages par zéro du signal quasi aléatoire qui entre dans le récepteur.



DETECTION NUMERIQUE SYNCHRONNE DES SIGNAUX FAIBLES.

Le procédé qui est étudié ci-après repose entièrement sur l'analyse de la phase instantanée du signal reçu. A cet égard, il se rapproche des procédés de détection par échantillonnage qui ont déjà fait l'objet d'exposés et de publications antérieurs. Mais alors que ces procédés constituent un cas particulier d'autocorrélation, avec écrêtage, celui qui va être décrit n'est qu'un cas particulier de la détection synchrone : on se contente de vérifier, à des intervalles de temps convenables, c'est-à-dire en synchronisme avec la fréquence du signal utile, la polarité de l'onde composée de ce même signal mélangé au bruit. Si l'on a affaire à un bruit pur (gaussien), la "phase instantanée" est distribuée uniformément ; d'une façon encore plus sommaire, on peut dire que les polarités d'échantillons non corrélés entre eux sont équiprobables. La présence, au milieu de bruit, d'un signal périodique de faible amplitude a pour effet de modifier la distribution uniforme de la phase ; il en résulte que les polarités d'échantillons successifs ont une probabilité supérieure à $\frac{1}{2}$ d'être positives lorsque le signal est lui-même positif, et supérieure à $\frac{1}{2}$ d'être négatives lorsque le signal est négatif.

Ce principe d'une détection synchrone de signaux écrêtés, réalisable par des méthodes purement numériques, peut être mis en oeuvre avec profit dans la conception d'un analyseur, ou diviseur de bande, entièrement dépourvu de filtres linéaires.



DETECTION NUMERIQUE SYNCHRONE DES SIGNAUX FAIBLES.

I. HYPOTHESES ET DEFINITION DES SIGNAUX.

On suppose que le signal sinusoïdal, dont la durée T peut être de 50 à 300 ms environ, appartient à une bande de fréquences de l'ordre de ± 200 Hz, en raison de l'effet "DOPPLER". Après changement de fréquence, l'ensemble bruit+signal est situé par exemple dans la bande 2000 ± 500 Hz (1500 - 2500), si l'on admet que le bruit a un spectre large et n'est pas limité strictement par le filtre d'entrée du récepteur.

Soit ω_a la fréquence du signal sinusoïdal $s(t)$; on pourra écrire :

$$(1) \quad s(t) = r \cos (\omega_a t + \Psi) \quad (r \text{ et } \Psi \text{ constants}).$$

Par hypothèse, la fréquence ω_a est assez peu différente de la fréquence centrale ω_0 , car la largeur de bande relative est faible ; on posera donc :

$$\omega_a = \omega_0 + \delta\omega$$

et $s(t)$ pourra s'écrire :

$$(2) \quad s(t) = r \cos [\omega_0 t + \sigma(t)]$$

avec

$$(3) \quad \sigma(t) = \delta\omega t + \Psi$$

Le bruit $b(t)$ est supposé gaussien, "blanc" et stationnaire, par souci de simplification ; mais ces hypothèses restrictives n'excluent pas nécessairement un fonctionnement convenable du dispositif dans le cas où elles ne sont pas satisfaites. (C'est l'expérience qui pourra le montrer).



Dans la représentation classique des signaux à spectre limité à la bande $\omega_0 \pm \Omega$, le bruit $b(t)$ peut être mis sous la forme :

$$(4) \quad b(t) = \sum_k [x_k \cos \omega_0 t - y_k \sin \omega_0 t] u_k(t)$$

avec

$$u_k(t) = \frac{\sin \Omega (t-t_k)}{\Omega (t-t_k)}, \quad t_k = k \frac{\pi}{\Omega}$$

x_k et y_k sont aléatoires, laplaciens, de même écart type σ et non corrélés entre eux (et même indépendants, puisque laplaciens). Dans ces conditions, la somme $s(t) + b(t)$ est aléatoire, mais non stationnaire, puisque $s(t)$ est périodique et certain.

Nous examinerons donc pour commencer le comportement de $s + b$ au voisinage d'un instant quelconque t_k .

II. LOI DE PROBABILITE DE LA PHASE INSTANTANEE A UN INSTANT DONNE.

A un instant donné t_k , le signal $s(t)$ a pour valeur $r \cos [\omega_0 t_k + \theta(t_k)]$ et le bruit se réduit au terme d'ordre k de la somme (4). Il en résulte que leur somme peut être représentée par une expression de même type :

$$(5) \quad s(t) + b(t) = X_k \cos \omega_0 t - Y_k \sin \omega_0 t \quad \text{pour } t \neq t_k.$$

avec :

$$(6) \quad \begin{cases} X_k = x_k + a_k \\ Y_k = y_k + b_k \end{cases}$$



DETECTION NUMERIQUE SYNCHRONE DES SIGNAUX FAIBLES.

$$(7) \quad \begin{cases} a_k = r \cos \theta(t_k) \\ b_k = r \sin \theta(t_k) \end{cases}$$

a_k et b_k sont des constantes (pour $t = t_k$) alors que x_k et y_k sont des variables aléatoires laplaciennes.

En supprimant l'indice k pour alléger l'écriture, on va rechercher la loi de probabilité de la phase φ , telle que :

$$(8) \quad \begin{cases} X = \rho \cos \varphi \\ Y = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

En effet, si l'on suppose que l'onde reçue est convenablement échantillonnée, son amplitude instantanée ρ n'intervient plus, et c'est seulement sa phase instantanée φ qui joue un rôle dans la détection.

Le calcul, d'ailleurs élémentaire, est reproduit dans l'annexe I. Si l'on désigne par σ l'écart type du bruit, on trouve que la densité de probabilité de la phase φ a pour valeur :

$$(9) \quad \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2} \sin^2(\varphi - \theta)} \frac{r}{\sigma} \cos(\varphi - \theta) \mathcal{I}\left[\frac{r}{\sigma} \cos(\varphi - \theta)\right]$$

En désignant par $\mathcal{I}(u)$ la fonction d'erreur incomplète :

$$\mathcal{I}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{a^2}{2}} da$$



DETECTION NUMERIQUE SYNCHRONE DES SIGNAUX FAIBLES.

Le cas envisagé ici est celui des faibles rapports signal/bruit $\frac{r}{\sigma}$; pour $\frac{r}{\sigma} < 0,75$, la formule (9) se réduit pratiquement à :

$$(10) \quad \frac{1}{2\pi} \left[1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{r}{\sigma} \cos (\varphi - \theta) \right]$$

(10) donne bien la répartition uniforme de la phase $\left(\frac{d\varphi}{2\pi} \right)$, pour $r = 0$. Lorsqu'un signal apparaît, la probabilité d'une phase instantanée $\varphi = \theta$ (phase du signal pur) est plus grande que celle d'une phase opposée ($\varphi = \theta + \pi$). La distribution se concentre d'autant plus dans la direction privilégiée $\varphi = \theta$ que le rapport signal/bruit $\frac{r}{\sigma}$ est plus grand.

III. PROBABILITES D'UNE POLARITE POSITIVE ET D'UNE POLARITE NEGATIVE.

Au voisinage de l'instant $t = t_k$, la somme $s + b$ équivaut à :

$$s + b = \rho \cos (\omega_0 t_k + \varphi_k).$$

Il en résulte que l'échantillon prélevé à l'instant t_k est positif ou négatif suivant que :

$$-\frac{\pi}{2} < \omega_0 t_k + \varphi_k < \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{2} < \omega_0 t_k + \varphi_k < \frac{3\pi}{2}.$$

On en déduit, à partir de (10), les probabilités p et q de polarités positive et négative à l'instant $t = t_k$.



DETECTION NUMERIQUE SYNCHRONE DES SIGNAUX FAIBLES.

$$(11) \left\{ \begin{aligned} p &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2} - \omega_0 t_k}^{\frac{\pi}{2} - \omega_0 t_k} \left[1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{r}{\sigma} \cos(\varphi - \theta) \right] d\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{r}{\sigma} \cos(\omega_0 t_k + \theta). \\ q &= \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2} - \omega_0 t_k}^{\frac{3\pi}{2} - \omega_0 t_k} \left[1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{r}{\sigma} \cos(\varphi - \theta) \right] d\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{r}{\sigma} \cos(\omega_0 t_k + \theta). \end{aligned} \right.$$

qu'on peut aussi écrire, d'après (3) :

$$(12) \left\{ \begin{aligned} p &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{r}{\sigma} \cos(\omega_a t_k + \psi) \\ q &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{r}{\sigma} \cos(\omega_a t_k + \psi) \end{aligned} \right.$$

(12) met en évidence le "biais" apporté par le signal à l'équiprobabilité ($p = q$) des polarités que l'on trouve évidemment en présence de bruit seulement.

C'est cette propriété qui peut être mise à profit pour identifier la présence d'un signal.

IV. PRINCIPE DE LA DETECTION.

Dans les expressions (12), la phase instantanée $\omega_a t_k + \psi$ du signal intervient directement. Si l'examen de la



polarité du signal est fait d'une façon "synchrone", l'intervalle d'analyse étant un multiple de la période $\frac{2\pi}{\omega_a}$ du signal, on aura toujours une probabilité nettement différente de $\frac{1}{2}$ de trouver une polarité donnée. Mais en réalité, ni la phase initiale Ψ , ni la fréquence ω_a du signal ne sont connues (en particulier en raison de l'effet DÖPPLER). Nous verrons un peu plus loin comment on peut surmonter cette difficulté.

Admettons provisoirement que ω_a et Ψ sont connus, et que les prélèvements sont effectués aux instants où $\cos(\omega_a t_k + \Psi) = 1$ (amplitude maximale du signal pur). Si l'intervalle de prélèvements, multiple de la période du signal, est grand devant le "rayon de corrélation" du bruit, les échantillons peuvent être considérés comme indépendants, et l'intégration dans le temps équivaut, comme dans l'hypothèse stationnaire, à l'addition des prélèvements sur le corps d'épreuve.

Si l'on effectue donc n prélèvements de polarité dans les conditions indiquées ci-dessus, et qu'on additionne les termes en donnant la valeur 1 aux échantillons positifs et la valeur -1 aux échantillons négatifs, on trouvera en moyenne :

$$(13) \quad U = n p - n q = n \frac{r}{\sigma \sqrt{2\pi}}$$

En contrepartie, l'écart type de la loi binomiale (p, q), répétée n fois, est, comme il est bien connu :

$$(14) \quad V = \sqrt{n p q} = \frac{1}{2} \sqrt{n} \quad \text{car } p q \neq \frac{1}{4} \quad \text{si } \frac{r}{\sigma} \text{ petit.}$$



DETECTION NUMERIQUE SYNCHRONE DES SIGNAUX FAIBLES.

Le rapport $\frac{U}{V}$ joue, pour le détecteur, le rôle du rapport signal/bruit à la sortie, et il vaut :

$$(15) \quad \frac{U}{V} = \frac{2}{\pi} \frac{r}{\sigma} \sqrt{n}$$

(15) montre que le rapport signal/bruit à l'entrée intervient non pas par son carré, mais à la première puissance, et que l'addition des polarités les plus probables multiplie ce rapport par le facteur \sqrt{n} , n étant le nombre d'épreuves, ce qui est un résultat tout à fait classique dans les problèmes de ce genre.

Ce résultat n'est guère surprenant : en ajoutant "en phase" les polarités des échantillons de l'onde, on ne fait évidemment intervenir $\frac{r}{\sigma}$ qu'au premier degré ; par surcroît, le principe employé est tout simplement celui de la "détection synchrone", réduit à son expression la plus simple.

La principale complication vient du fait que la fréquence du signal reçu est inconnue. On est donc conduit à faire une analyse, en divisant la bande en zones suffisamment étroites pour que les variations relatives de fréquence puissent être négligées.

Précisons ce point sur un exemple numérique.

Soit $f_0 = 2000$ Hz la fréquence centrale de la bande, $\tau = 2$ ms l'intervalle minimal au bout duquel le coefficient de corrélation du bruit peut être considéré comme nul ou négligeable. Une alternance de la fréquence f_0 dure 250 μ s. Pour $f = f_0 + 10$ Hz (écart de 0,5 %), le nombre d'alternances est passé de 200



à 201 au bout d'un temps de 50 ms. On peut donc dire que pendant une durée de 50 ms, la phase reste "stable" pour les fréquences ne différant pas de f_0 de plus de 0,5 %.

La répartition de la bande totale de fréquences en $2 \times 8 + 1 = 17$ zones de 20 Hz (± 170 Hz) ou $2 \times 9 + 1 = 19$ zones de 20 Hz (± 190 Hz) est donc compatible avec des durées d'intégration de 50 ms.

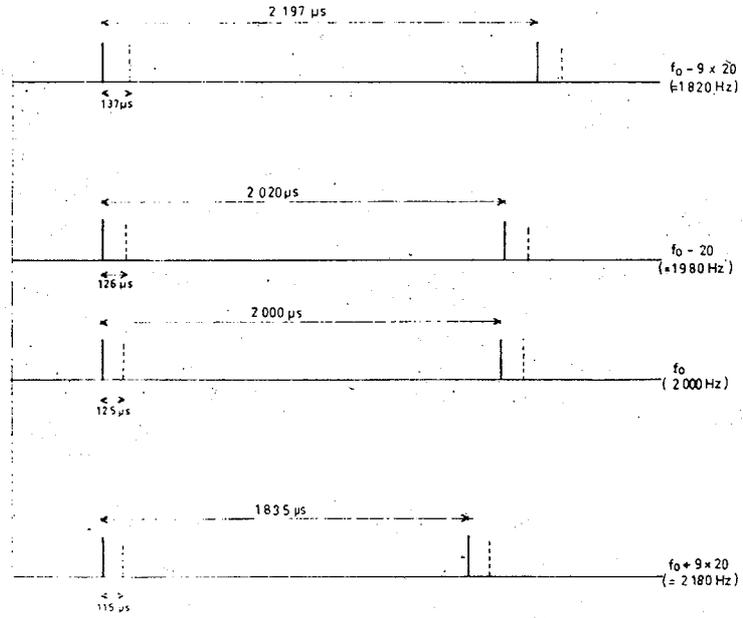
Si l'on échantillonne le signal toutes les 2 ms, on aura $n = 25$ échantillons pendant l'intervalle de 50 ms, d'où $\sqrt{n} = 5$ et un "gain" de 14 dB.

En fractionnant la bande, on voit donc qu'il est possible d'utiliser un oscillateur pour chaque zone élémentaire. Néanmoins, la phase initiale du signal étant inconnue, on risque d'échantillonner systématiquement à des instants t_k tels que $\cos(\omega_a t_k + \Psi) \approx 0$. Cet inconvénient peut être éliminé, comme il est bien connu, en effectuant deux détections différentes, avec des signaux en quadrature. Bien entendu, ce dispositif de lever de doute a l'inconvénient de multiplier par 2 le nombre d'organes.

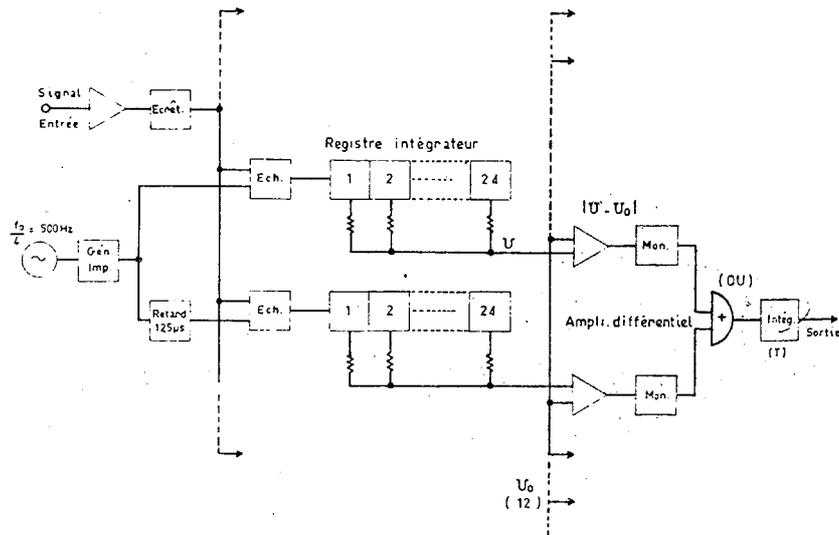
La figure 1 représente la répartition des échantillons dans le temps, pour les divers canaux, et la figure 2 est un schéma de principe succinct de l'analyseur. Pour chaque canal de 20 Hz de largeur de bande, on engendre les deux séquences d'impulsions en quadrature données sur la figure 1. Le signal est échantillonné, puis intégré sur une durée de 50 ms environ. L'intégration peut être réalisée par méthode analogique ou numérique ; dans ce dernier



DETECTION NUMERIQUE SYNCHRONE DES SIGNAUX FAIBLES.



INTERVALLES D'ANALYSE POUR LES DIFFERENTES ZONES NET 1398
 (en traits pointillés, prélèvements "en quadrature") Figure:1



PRINCIPE SUCCINCT DE L'ANALYSEUR NET 1398
 (17 ou 19 voies identiques à la voie centrale représentée seule sur la figure) Figure: 2



DETECTION NUMERIQUE SYNCHRONE DES SIGNAUX FAIBLES.

cas, un registre permet de compter les impulsions positives. Après intégration, un amplificateur différentiel fournit l'écart entre le nombre d'impulsions positives et le nombre moyen trouvé en présence de bruit seul (dans l'exemple choisi, 12). Il y a lieu de définir un seuil : sa détermination fait l'objet de l'annexe II. C'est la *valeur absolue* de l'écart qui compte, il faut donc redresser pour ne pas tenir compte du signe de $U-U_0$. La somme des deux voies en quadrature peut être faite par méthode analogique ou numérique ; dans ce dernier cas, on utilise un circuit "OU" classique. Si le signal a une durée T supérieure à 50 ms, on peut avoir avantage à l'intégrer sur cette durée avant affichage sur un tube cathodique (dont le balayage peut être très semblable à celui des tubes actuels).

En résumé, l'analyseur comporte n voies qui ne diffèrent que par la fréquence de l'échantillonnage. Sur chacune de ces voies, une détection synchrone de la polarité permet d'évaluer la différence entre le nombre d'échantillons négatifs et le nombre d'échantillons positifs de l'onde reçue ; si cette différence est jugée significative, on admet la présence d'un signal, et dans l'autre hypothèse, on admet que le bruit est seul présent.

Un tel système allie, aux avantages bien connus de la détection synchrone, ceux des systèmes numériques à écrêtage qui sont d'une mise en oeuvre facile et économique.

- oOo -



DETECTION NUMERIQUE SYNCHRONNE DES SIGNAUX FAIBLES.

A N N E X E I

LOI DE PROBABILITE DE L'ARGUMENT D'UN VECTEUR DONT
LES DEUX COMPOSANTES SONT LA SOMME D'UNE CONSTANTE ET D'UNE
VARIABLE ALEATOIRE LAPLACIENNE.

Soit un vecteur (X, Y) défini par :

$$X = a + x$$

$$Y = b + y$$

a, b , sont des constantes, x et y des variables aléatoires laplaciennes indépendantes, de même variance σ^2 . x et y ont donc respectivement pour densité de probabilité :

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad p(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$$

Posons :

$$X = \rho \cos \varphi, \quad a = r \cos \theta$$

$$Y = \rho \sin \varphi, \quad b = r \sin \theta$$

X et Y ont évidemment pour densité de probabilité :

$$P(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad P(Y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(Y-b)^2}{2\sigma^2}}$$

Puisque X, Y , sont indépendantes, la densité liée est $P(X)P(Y)$ soit :

$$P(X)P(Y) = \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{(X-a)^2 + (Y-b)^2}{2\sigma^2}}$$



DETECTION NUMERIQUE SYNCHRONE DES SIGNAUX FAIBLES.

Or :

$$\begin{aligned}(X-a)^2 + (Y-b)^2 &= X^2 + Y^2 - 2(aX+bY) + a^2 + b^2 \\ &= \rho^2 - 2\rho r(\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi) + r^2 = \rho^2 - 2\rho r \cos(\varphi - \theta) + r^2 \\ &= [\rho - r \cos(\varphi - \theta)]^2 + r^2 \sin^2(\varphi - \theta)\end{aligned}$$

La densité liée de ρ et φ peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{[\rho - r \cos(\varphi - \theta)]^2 + r^2 \sin^2(\varphi - \theta)}{2\sigma^2}} &= \frac{D(X, Y)}{D(\rho, \varphi)} \\ &= \frac{\rho}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{[\rho - r \cos(\varphi - \theta)]^2 + r^2 \sin^2(\varphi - \theta)}{2\sigma^2}}\end{aligned}$$

La loi de probabilité en φ s'obtient en intégrant par rapport à ρ de 0 à ∞ , c'est donc :

$$\text{Prob.}(\varphi) = \frac{e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}\sin^2(\varphi - \theta)}}{2\pi\sigma^2} \int_0^{+\infty} \rho e^{-\frac{[\rho - r \cos(\varphi - \theta)]^2}{2\sigma^2}} d\rho$$

En posant $\rho = r \cos(\varphi - \theta) + \sigma u$, on obtient facilement :

$$\text{Prob.}(\varphi) = \frac{e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}}{2\pi} + \frac{e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}\sin^2(\varphi - \theta)}}{\sqrt{2\pi}} \frac{r}{\sigma} \cos(\varphi - \theta) \mathcal{I} \left[\frac{r}{\sigma} \cos(\varphi - \theta) \right]$$

avec $\mathcal{I}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{u^2}{2}} du$

Pour $\frac{r}{\sigma}$ petit, Prob. (φ) se réduit pratiquement à :

$$\frac{1}{2\pi} \left[1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{r}{\sigma} \cos(\varphi - \theta) \right]$$



DETECTION NUMERIQUE SYNCHRONE DES SIGNAUX FAIBLES.

La courbe polaire, en φ , est un limaçon de Pascal d'axe θ ;
la densité de probabilité est maximale pour $\varphi = \theta$ et minimale
pour $\varphi = \theta + \pi$.

- oOo -



A N N E X E I I

DETERMINATION DU SEUIL DE DETECTION ($U - U_0$)

Si p est la probabilité de trouver une polarité positive, le nombre moyen de polarités positives est np après n épreuves. On trouve en réalité un nombre v généralement différent de np .

On peut estimer la signification de v à l'aide du théorème de Bernoulli :

$$\text{Prob. } |v - np| < \lambda \sqrt{npq} = \Theta_0(\lambda)$$

qui exprime que la probabilité d'un écart, en valeur absolue, inférieur à $\lambda\sqrt{n}$ fois l'écart type est de l'ordre de $\Theta_0(\lambda)$, où Θ_0 est la fonction d'erreur tronquée :

$$\Theta_0(\lambda) = \frac{1}{2} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Appliquons ce résultat au cas de l'alternative (p, q) répétée n fois, avec, pour fixer les idées, $n = 24$, $\sqrt{n} = 5$.

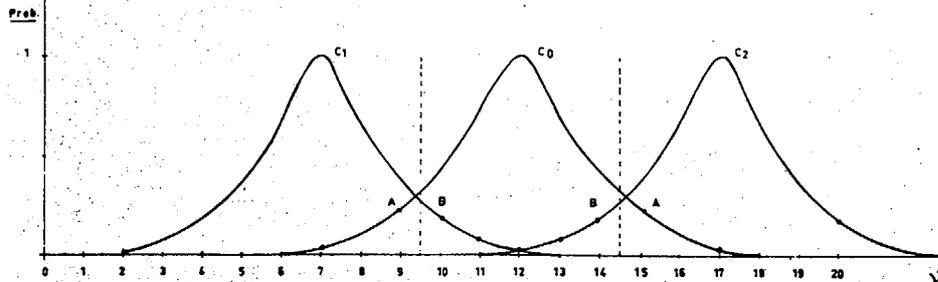
lère hypothèse : *Le bruit est seul présent.*

Dans ce cas, $p = q = \frac{1}{2}$, $np = 12$, $\sqrt{npq} = 2,5$.

Si l'on trouve par exemple $v = 11$, $|v - np| = 1$, la probabilité que l'écart soit supérieur à 1 est $1 - \Theta_0(0,4) = 0,69$. On peut ainsi tracer la courbe désignée par C_0 sur la figure 3, et



DETECTION NUMERIQUE SYNCHRONE DES SIGNAUX FAIBLES.



Probabilité que le nombre d'épreuves donnant une polarité positive soit inférieur (courbe croissante) ou supérieur (courbe décroissante) au nombre affiché en abscisse

- { C₀) Si le bruit est seul présent
- { C₁ C₂) En présence d'un signal
- { A = Probabilité de fausse alarme
- { B = Probabilité de non détection d'un signal

NET 1398
Figure : 3

qui est relative au bruit seul. Cette courbe montre, par exemple, que la probabilité de trouver moins de 9 épreuves positives ou plus de 15 épreuves positives sur 24 est de l'ordre de 0,23, lorsque le bruit est seul présent.

2e hypothèse : *Le signal est présent dans le bruit.*

Pour fixer les idées, supposons $\frac{r}{\sigma} = \frac{1}{2}$ (rapport signal/bruit de -6 dB). En supposant que la détection est idéale (ou que le système de lever de doute équivaut à rendre le cosinus de l'équation (12) égal à 1), on a :

$$p = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) = 0,70, \quad q = 0,30.$$

On a donc sensiblement $np \approx 17$, $nq \approx 7$, $\sqrt{npq} \approx 2,25$.

Le même raisonnement fournit les deux courbes C_1 et C_2 de la figure 3, légèrement plus "pointues" que C_0 , car l'écart type est plus faible, et dont les sommets sont décalés de ± 5 unités environ par rapport à celui de cette dernière.

La figure 3 montre que si la série de 24 épreuves fournit un nombre de polarités positives ≤ 9 ou ≥ 15 , on doit admettre la présence d'un signal ; par contre, si ce nombre est compris entre 10 et 14, limites comprises, on doit admettre que le bruit est seul présent.

Les ordonnées des points A et B indiquent qu'avec cette règle, les probabilités de fausse alarme et de non détection d'un signal présent sont respectivement égales à 0,23 et 0,19.

Bien entendu, si $\frac{r}{\sigma}$ est plus grand, les courbes s'écartent les unes des autres et la discrimination devient de plus en plus sûre. Par contre, pour $\frac{r}{\sigma} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ (-9 dB), on a sensiblement $np = 15$, $nq = 9$, et il y a plus d'une chance sur deux d'obtenir soit une fausse alarme, soit la non détection d'un signal, en appliquant une règle semblable.

N. B. - La seule façon d'augmenter la "sélectivité" est d'augmenter le nombre d'épreuves, donc le temps d'intégration ; mais ce n'est possible qu'en augmentant le nombre de "zones", donc en effectuant un filtrage de plus en plus fin. Il est évident qu'au delà d'une certaine limite, ce filtrage perd tout son sens en raison des déformations que subit le signal lui-même dans la propagation.