



DEUXIÈME COLLOQUE
SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL
ET SES APPLICATIONS
NICE - 5 AU 10 MAI 1969

22/1

GENERATION DE CODE ALEATOIRE

Geneviève JOURDAIN

Centre d'Etude des Phénomènes Aléatoires (CEPHAG)
(associé au C.N.R.S.)(*)

RESUME.

Après une rapide mise au point sur ce que l'on désigne par "code aléatoire", on expose le principe d'obtention d'un code aléatoire poissonnien et l'on décrit le dispositif électronique utilisé pour simuler ce procédé. On effectue ensuite une série de tests concernant l'hypothèse poissonnienne du signal obtenu ; on étudie également la statistique de second ordre de ce "signal binaire poissonnien". L'ensemble permet de conclure de façon assez satisfaisante quant à la nature effective du signal et à ses propriétés.

ABSTRACT.

At first the exact meaning of the expression "random code" is given. Thereafter the principle of obtaining a Poisson random code is stated and the electronic device utilised for simulation of this process is described. The test of Poisson hypothesis for the signal is then performed and the second order statistic of this "binary Poisson signal" is studied. The whole of the work leads to a satisfactory conclusion about the effective character and the properties of the signal.



INTRODUCTION. "Codes aléatoires" et "pseudo-aléatoires"

L'étude de la génération de codes appelés "pseudo-aléatoires", ainsi que de leurs propriétés, a fait l'objet de très nombreux ouvrages, vu l'intérêt que ces codes présentent, tant dans le domaine de la détection (il s'agit alors de "signal d'émission codé"), que dans le domaine du calcul logique (ordinateur, servo-systèmes ...). Après avoir précisé ce que signifie le terme "code pseudo-aléatoire", nous allons introduire, de façon parallèle, et définir des "codes aléatoires".

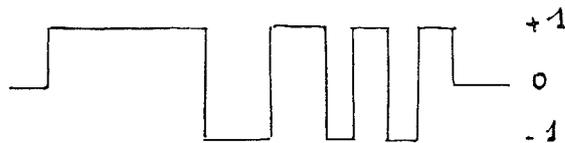
Nous désignerons par "code aléatoire" une fonction du temps $X(t)$ binaire, i.e. ne pouvant prendre que deux valeurs "codées" 0 et 1 (ou -1 et +1 : en ce cas la fonction est dite "centrée") et dont les instants de passage d'une valeur à l'autre forment une distribution aléatoire sur l'axe des temps - distribution qui reste à préciser pour chaque code.

Le code le plus utilisé jusqu'à présent est celui désigné sous le nom de "signal binaire codé" ou "pseudo-aléatoire"; ces signaux sont construits à partir de séquences cycliques binaires de longueur maximale [1]. Ces séquences possèdent des propriétés très intéressantes et, là encore, beaucoup d'auteurs en ont fait l'étude complète [2] : disons simplement que ces séquences ont des propriétés analogues à celles d'un signal construit sur un processus périodique par

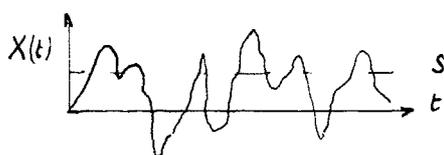


tirage au sort du type "pile" ou "face". En fait, ces signaux n'ont plus rien d'aléatoire, puisque l'on détermine une fois pour toutes la séquence à utiliser qui est une séquence binaire de longueur maximale. Il est possible de générer ces séquences cycliques binaires grâce à des registres à décalage contreréactionnés (si le registre comporte n étages, la période de la séquence est $2^n - 1$).

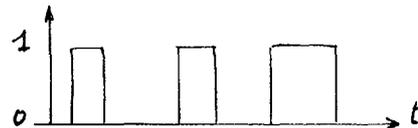
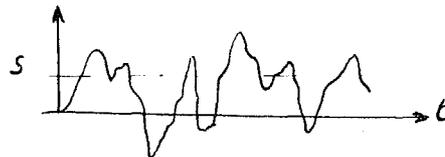
Un code binaire un peu différent, qui, lui non plus, n'a rien d'aléatoire, est dû à BARKER (cf schéma)



On a également essayé d'utiliser pour l'obtention de codes aléatoires une fonction binaire dont les instants t_j de passage d'une valeur à l'autre sont les instants de passage au dessus d'un seuil d'une fonction d'amplitude $X(t)$ aléatoire [3, 4] (cf. fig : cas a).



Cas (a)



Cas (b)

Le seuil en question peut également être nul (en admettant que $X(t)$ puisse être > 0 ou < 0).

On peut également considérer uniquement les



passages de seuils dans un certain sens (cas b).

Dans tous les cas, on engendre à partir des t_j un code aléatoire (puisque la répartition des t_j est une fonction aléatoire du temps) mais pour déterminer le code en question, il faudrait alors connaître avec précision la loi des intervalles $(t_{j+1} - t_j)$ obtenus. Ce genre de codes, une fois "synchronisé et "calibré" en durée - là encore, on modifie la loi de répartition des t_j le long de l'axe des temps, et il faut la redéfinir complètement - peut servir comme support de données dans des machines logiques par exemple [5].

Nous allons maintenant nous intéresser à la génération d'un code aléatoire particulier, qui pourrait être considéré comme encore "plus aléatoire" que ceux évoqués ci-dessus, puisque les instants t_j de "basculement" de la fonction $X(t)$ sont distribués sur l'axe des temps suivant un processus de POISSON (processus sans mémoire). Ce processus, (que l'on supposera stationnaire) est caractérisé par les deux propriétés suivantes :

- les intervalles $t_{j+1} - t_j$ sont statistiquement indépendants entre eux.
- sur chaque "tranche" de durée T , le nombre de points t_j obéit à une loi de POISSON, de paramètre ρT , où ρ est la densité de points du processus.

Nous étudions ici un dispositif électronique capable de générer un tel code, et nous présentons les résultats des tests, ainsi que les performances du système.

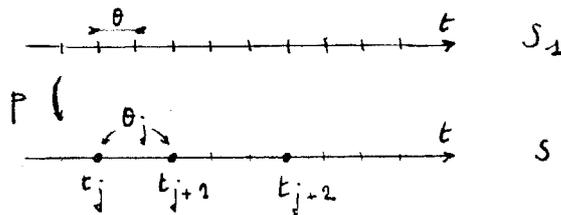


Comme chaque fois qu'il s'agit d'étudier un phénomène aléatoire, on se limite à l'étude statistique au second ordre; i.e. on étudie les propriétés d'ensemble du système (espérance mathématique, sur toutes les réalisations possibles, de la quantité intéressante) et on évalue les écarts possibles, d'une réalisation à l'autre, de cette quantité; dans la mesure où les écarts ne sont pas trop importants, on considère que la valeur considérée est significative et décrit bien le comportement du système.

1. RAPPELS THEORIQUES CONCERNANT LE PRINCIPE D'OBTENTION D'UN SIGNAL BINAIRE POISSONNIEN.

1.1 En électronique, les réseaux les plus faciles à utiliser sont ceux à structure périodique ; or, on sait que dans certaines conditions, les propriétés statistiques d'un processus "latticiel" peuvent se rapprocher de celles d'un processus poissonnien [6]. Une étude théorique précédente [7] a précisé cette tendance, et nous en rappelons ici rapidement les résultats essentiels :

Le processus de base est un processus de renouvellement S dont les instants t_j sont obtenus de la façon suivante :





on considère une partition S_1 de l'axe des temps en intervalles de durée commune θ : les instants t_j sont tirés au sort, de façon indépendante, chaque point de la suite S_1 ayant une probabilité p d'être un t_j (de S), $1-p$ de ne pas être un t_j . Nous nous sommes intéressés au cas où p devient très petit et nous avons montré que, dès que $p \leq 0,1$, le signal obtenu en changeant de valeur codée à chaque t_j de S , possède des propriétés statistiques au second ordre quasiment équivalentes à celles d'un signal binaire poissonnien (voir [7]).

1.2 Voyons en particulier la forme de la fonction de corrélation de $X(t)$ construit sur S (cf fig.1)

Pour $p < 0,5$ les valeurs de $\Gamma_X(m\theta)$ sont les valeurs obtenues par échantillonnage d'une fonction de corrélation $\bar{\Gamma}(\tau)$, prises au pas θ , où

$$\bar{\Gamma}(\tau) = e^{-2p|\tau|} \quad \text{et pour } m\theta \leq \tau < (m+1)\theta$$

$\Gamma_X(\tau)$ varie de façon linéaire. Dans la mesure où les segments de droite se confondent avec les portions d'exponentielle (i.e. dès que $p \leq 0,1$) on peut dire que le signal obtenu $X(t)$ est équivalent (au second ordre) à un basculeur poissonnien de densité

$$\bar{p} = \frac{1}{\theta} \frac{p}{1-p} \quad \# \quad p(1+p) \frac{1}{\theta}$$

Le principe de génération du signal binaire poissonnien consiste donc, à partir d'un phénomène périodique θ , à simuler le tirage au sort de probabilité, sachant que p doit être $\leq 0,1$, et que les tirages doivent être indépendants à chaque θ .

Il reste ensuite à fixer certaines normes d'origine des temps et de durée (cf [7]). En effet, le fait que le signal n'ait pas une durée infinie,



introduit dans l'évaluation de la fonction de corrélation par exemple une erreur, laquelle doit être suffisamment faible pour que $\Gamma_X(\tau)$ représente effectivement la fonction de corrélation du signal X .

Il nous faut pour cela étudier un écart quadratique moyen autour de $\Gamma_X(\tau)$. Sachant que le signal a une durée $2T$, soit $Y(t) = \Pi_T(t) X(t)$, cette fonction de corrélation devient

$$\Gamma_Y(\tau) = E\{Y(t)Y(t-\tau)\} = \Gamma_X(\tau) \cdot 2T \Lambda_{2T}(\tau)$$

où $\Gamma_X(\tau)$ est la fonction de corrélation du signal binaire poissonnien

$$\Gamma_X(\tau) = \sigma_X^2 e^{-2\rho|\tau|}$$

L'étude de l'écart quadratique moyen

$$\eta(\tau) = \left[\frac{E\{[Y(t)Y(t-\tau)]^2\} - [E\{Y(t)Y(t-\tau)\}]^2}{|E\{Y^2(t)\}|^2} \right]^{1/2}$$

conduit à calculer un moment du 4ème ordre pour $X(t)$ (cf [7]) et l'on obtient

$$\eta^2(\tau) = \frac{\Lambda_{2T}(\tau)}{4\rho T} \left[1 - e^{-4\rho|\tau|} (1 + 4\rho|\tau|) \right]$$

La figure 2 montre les variations de $\Gamma_X(\tau)$ et $\eta^2(\tau)$. Il ressort de ceci que

- dans la zone où $\rho\tau < 1$, $\eta^2(\tau)$ est très faible et $\Gamma_X(\tau)$ est vraiment significative
- dès que $\rho\tau > 1$, η^2 demeure constant vis-à-vis de τ :

Ceci représente l'erreur qui peut se produire sur $\Gamma(z)$ d'une réalisation à l'autre du signal binaire poissonnien, étant entendu que $\eta^2 \rightarrow 0$ si $T \rightarrow \infty$. Il suffit donc de choisir T suffisamment grand pour que η^2 soit très petit. Nous nous placerons toujours dans ces conditions en nous fixant

$$\rho T \gg 100$$

Dans ce cas, on a

$$\eta^2(z) \leq \frac{1}{4\rho T} = \frac{1}{400} = 2,5 \cdot 10^{-3}$$

Sachant que les durées des signaux utilisés sont de l'ordre de la seconde, la gamme intéressante pour ρ est de quelques unités par seconde à $10^3/\text{sec}$. (en particulier, on peut obtenir des densités très faibles).

Remarquons que ce type de signal, construit à partir d'un motif fondamental θ , peut très bien être mis en mémoire dans un registre du type registre à décalage.

2. REALISATION ET DESCRIPTION DU DISPOSITIF.

Le dispositif réalisé permet d'obtenir aussi bien un signal "poissonnien" qu'un "signal binaire codé". En effet, si à partir du processus de renouvellement on tire au sort avec une probabilité $p = 0,5$, cela "neutralise" l'effet de renouvellement, (sachant que la date t_0 d'origine est équipartie entre 0 et θ) et on se retrouve bien en présence d'un signal binaire latticiel.



2.1 Schéma synoptique de l'ensemble.

Le schéma synoptique du dispositif est donné fig.3. Pour simuler un processus latticiel, on utilise naturellement une horloge.

Le tirage aléatoire est obtenu grâce à l'utilisation d'un bruit à amplitude aléatoire $Y(t)$ - fonction aléatoire stationnaire d'ordre 2, de densité $p(v)$ connue. On connaît donc la fonction de répartition du bruit $F(v) = P(Y < v)$. Faire subir à $Y(t)$ l'action d'un seuil V_0 correspond à effectuer "en permanence" un tirage au sort de probabilité $1-p_0$. Ces tirages se font aux instants commandés par l'horloge ; c'est-à-dire on échantillonne $Y(t)$ à la cadence de l'horloge et on compare les échantillons obtenus à V_0 aux instants voulus. L'indépendance des tirages au sort est liée à l'indépendance statistique des échantillons de $Y(t)$.

On obtient ainsi une simulation d'un "processus" poissonnien par une suite d'impulsions de même signe. Il suffit d'ajouter un système de type bascule pour obtenir une simulation d'un signal binaire poissonnien.

La succession des étapes d'obtention du signal est indiquée fig. 4.

2.2 Description des différents ensembles fonctionnels.

2.21 Générateur de bruit $Y(t)$:

On a utilisé la tension de bruit produite par une diode Zener (intéressante de par son amplitude naturelle), amplifiée et filtrée.



Les caractéristiques du bruit $Y(t)$ sont données par les figures 5 et 6. Le bruit filtré se révèle pratiquement gaussien. Le filtrage a pour but de permettre ensuite l'échantillonnage du bruit, de façon à obtenir des échantillons indépendants statistiquement entre eux. A cet effet, on a tracé la fonction de corrélation de $Y(t)$: si $Y(t)$ est gaussien, deux échantillons Y_1 et Y_2 non corrélés seront indépendants. C'est là l'intérêt d'utiliser un bruit gaussien, sinon a priori la loi de $Y(t)$ pourrait être quelconque. La figure 5 correspond à la fonction de corrélation de $Y(t)$ filtré entre 85 KHz et 100 KHz.

Sa fonction de corrélation normée est du type:-

$$\Gamma(\tau) = \frac{\sin 2\pi \Delta f \tau}{2\pi \Delta f \tau} \cdot \cos 2\pi \nu_0 \tau, \quad \text{ou } \begin{cases} \nu_0 = 92,5 \text{ KHz} \\ 2\Delta f = 15 \text{ KHz} \end{cases}$$

La fig. 6 correspond à la fonction de corrélation de $Y(t)$ filtrée entre 50 KHz et 100 KHz, tracée à l'aide d'un corrélateur hybride à échantillonnage : c'est cette dernière solution qui est acceptée, puisqu'elle permet en même temps que d'avoir plus de puissance en sortie, d'échantillonner à des fréquences allant jusqu'à 50 KHz : on voit en effet que l'on peut choisir - pour assurer l'indépendance - des cadences d'échantillonnage inférieures à 25 KHz, ou alors une fréquence aux environs de 50 KHz.

2.22 Horloge :

La simulation du processus latticiel est obtenue par un générateur d'impulsions récurrentes de largeur $\xi = 1 \mu s$. La gamme de fréquences utilisées en tenant



compte des remarques ci-dessus, et des valeurs désirées pour ρ est de 10^2 à $25 \cdot 10^3$ Hz, plus la fréquence 50 KHz.

2.23 Echantillonnage.

Un échantillonneur naturel à effet de champ commandé par l'horloge "laisse passer" $Y(t)$ pendant des temps très courts relativement à la période de l'horloge ($1 \mu s$ devant $\geq 20 \mu s$) et compatibles avec le spectre de fréquence du bruit, puisque celui-ci a été filtré en dessous de 100 KHz. Le fait d'échantillonner pendant $1 \mu s$ correspond à l'introduction d'une erreur due à un déplacement possible des t_j : ceci pourrait être considéré comme un déplacement aléatoire (fonction aléatoire de loi uniforme sur une durée de $1 \mu s$), mais les résultats ne seraient pas sensiblement différents.

On a tracé directement la densité de probabilité du bruit $Y(t)$ échantillonné de la manière indiquée. La figure 7 donne la fonction de répartition du bruit, fonction qui nous sert de référence pour la correspondance amplitude-densité de probabilité, ou encore seuil V_0 - probabilité $(1-p_0)$. Tracée sur papier de Henry, la fonction de répartition du bruit F_Y est bien une droite (ce qui met en évidence le caractère gaussien). Ce bruit est réparti autour d'une valeur Y_0 (qui, pour des raisons technologiques est $\neq 0$) et l'écart quadratique moyen est $\sigma \approx 570$ mV. Ainsi, nous voyons que :

- le bruit étant gaussien et centré sur Y_0 , il suffit, pour simuler un tirage de probabilité $p = 0,5$, de ne garder que la partie $Y(t) > Y_0$, par exemple, de



$Y(t)$ échantillonnée ;

- un tirage de probabilité 0,1 se traduit par une probabilité 0,9 = $1 - F_Y(x)$, ce qui correspond à un seuil $x = V_{0,1} = 1,3 \sigma$.

De même, un tirage de probabilité 0,05 $\Rightarrow V_{0,05} = 1,65 \sigma$
0,01 $\Rightarrow V_{0,01} = 2,32 \sigma$

Nous nous sommes pour l'instant limités à ces trois valeurs de p .

2.24 Seuils.

Le problème est alors de fixer les seuils $V_{0,1}$, $V_{0,05}$, $V_{0,01}$ avec précision. On a utilisé un élément de comparaison du type amplificateur différentiel intégré à très bonne sensibilité et très stable ($\mu A 710$). Comme il s'agit de savoir seulement si $Y(t)$ dépasse l'amplitude du seuil voulu (et non de garder l'amplitude réelle du dépassement,) on a ensuite des circuits de mise en forme qui fonctionnent à saturation.

2.25 Sortie du signal :

Un simple bistable restitue à partir du processus "poissonnien" matérialisé par les impulsions, un signal d'amplitude 0 - 20 V . Il est facile d'obtenir le signal centré ± 10 V.

Le signal "binaire codé" est simplement obtenu en utilisant la partie $Y(t) > Y_0$ de l'amplitude des échantillons de $Y(t)$.



2.26 Commande de durée $2T$ du signal.

La commande peut se faire soit directement sur l'horloge θ_H (ceci représente alors une date de départ t_0 en synchronisme avec le phénomène périodique (phénomène aléatoire non "stationnarisé") ou de préférence sur $Y(t)$, ceci de façon indépendante de l'horloge : la date t_0 d'origine est alors vraiment une variable aléatoire indépendante de $X(t)$ et que l'on suppose équipartie sur $(0 - \theta)$

3. TESTS ET PERFORMANCES DU SYSTEME.

Différentes manipulations ont été effectuées pour tester le dispositif décrit ci-dessus : ces tests sont destinés à mettre en évidence le caractère poissonnien du processus obtenu. On étudiera donc la loi de répartition des intervalles du processus et l'indépendance statistique de ceux-ci. Quelques manipulations de longue durée ont permis de juger de façon grossière la stationnarité du système et enfin on a étudié la statistique de second ordre du signal binaire poissonnien.

3.1 Tests sur la loi de distribution des intervalles du processus obtenu (cf [8]).

3.11 Principe.

On analyse la longueur des intervalles successifs $\theta_j = t_{j+1} - t_j$ du processus et on s'intéresse à $E \{ (\text{Nbre } \theta_j > \theta) = k \}$



On sait que si le processus est poissonnien, on doit avoir $E\{K\} = N e^{-\rho\theta}$ ou $\text{Log } E\{K\} = \text{Log } N - \rho\theta$, i.e. $\text{Log } E\{K\}$ est une droite passant par $\text{Log } N$ et de pente $-\rho$. (N est le nombre d'intervalles du processus dont on dispose et ρ la densité de points du processus). De plus, pour savoir quel crédit on peut accorder à l'affirmation donnée, on construit un intervalle de confiance, i.e. on s'intéresse à $E\{K\} \pm 2\sigma_K$ où σ_K est l'écart type de la variable aléatoire K

$$\sigma_K^2 = N e^{-\rho\theta} (1 - e^{-\rho\theta})$$

L'intervalle construit correspond à une probabilité de 5 % de sortie du domaine, le processus étant réellement un processus de POISSON.

3.12 Description de la manipulation.

L'analyse de la distribution des intervalles θ_j se fait à l'aide d'un sélecteur multicanaux utilisé en mode "sélecteur d'amplitude" et ceci, grâce à un montage spécialement mis au point pour ce genre d'analyse ([9]). Une impulsion du processus à analyser arrivant à l'instant t_j commande l'ouverture d'une phase d'analyse : l'intervalle θ_j correspondant est "mesuré" grâce à une horloge extérieure qui commande l'avance des canaux du sélecteur et dont on compte les impulsions émises pendant la durée θ_j : à l'arrivée de l'impulsion suivante (instant t_{j+1}) la phase d'analyse se termine et une autre recommence. La fréquence de l'horloge extérieure est contrôlée en permanence par un fréquencemètre.



3.13 Résultats pour le poissonnien. (cf. fig. 9 et 10 et tableau suivant).

On donne ici des résultats obtenus pour deux valeurs fixées de f_H , fréquence du générateur horloge intérieur et pour chaque valeur possible de la probabilité de tirage. A partir des courbes $E\{K\} = f(\theta)$, si le test est satisfaisant, on peut déduire la densité de points du processus, en choisissant la droite par meilleure estimation possible (la solution rigoureuse est une approximation par moindres carrés). La pente obtenue donne le ρ expérimental du processus. A partir de là, on peut évaluer σ_K et tracer les deux courbes qui encadrent la première, courbes qui définissent l'intervalle de confiance du test.

Courbes	Probabilité de tirage $p \leq 0,1$	Fréquence d'horloge $f_H \cdot \text{KHz}$	ρ calculé théoriquement $\rho_{th} = \frac{1}{\theta_H} \frac{p}{1-p}$ $\# P \frac{(1+p)}{\theta_H}$	Test	ρ donné expérimentalement
1	0,1	5	550	B	550
2	0,05	5	265	B	265
3	0,01	5	50	AB	61
10	0,1	0,500	55	B	65
11	0,05	0,500	26	B	22
12	0,01	0,500	5	AB	7

Dans l'ensemble, les résultats sont satisfaisants, i.e. nous obtenons un processus dont la fonction de répartition des intervalles est bien exponentielle ("droite")



cherchée) et la densité ρ prévue est en général retrouvée expérimentalement, quelquefois très exactement, souvent à moins de 10 % près (bien entendu, pour les manipulations à densité faible, la dispersion des points dans l'intervalle de confiance est plus grande).

3.14 Etude du signal "binaire codé".

Il s'agit de tester également le signal obtenu lorsque $p = 0,5$. On peut encore étudier la fonction de répartition des intervalles obtenue, celle-ci devant être de la forme (voir [6]) :

$$F(\theta) = 1 - (1-p)^{\text{Ent } \theta/\theta_H} \quad \text{où } \left\{ \begin{array}{l} p = 1/2, \text{ et } \theta_H = \frac{1}{f_H} \\ \text{Ent} = \text{Partie entière de} \end{array} \right.$$

$$= 1 - (0,5)^{\text{Ent } \theta/\theta_H}$$

Les intervalles θ_j sont encore indépendants statistiquement : le test utilisé pour le "signal poissonnier" peut donc s'appliquer ici, i.e. on s'intéresse encore au premier moment de la variable aléatoire $K =$ nombre d'intervalles $\theta_j > \theta$.

$$E\{K\} = N [1 - F(\theta)] = N (0,5)^{\text{Ent } \theta/\theta_H}$$

$$= N \left[\exp \left\{ \text{Ent}(\theta/\theta_H) \text{Log } 0,5 \right\} \right]$$

$$\approx N \left[\exp(-0,7 \text{Ent } \theta/\theta_H) \right]$$

$$\text{Log } E\{K\} \approx \text{Log } N - 0,7 \text{Ent}(\theta/\theta_H)$$

Pour tous les $\theta = m \theta_H$ (m entier), $\text{Log } E\{K\}$ est encore une fonction linéaire de θ ; pour $m \theta_H \leq \theta < (m+1) \theta_H$, $\text{Log } E\{K\}$ est constant. On



obtient donc pour $\text{Log } E\{K\}$ la variation indiquée par la fig. 11 .

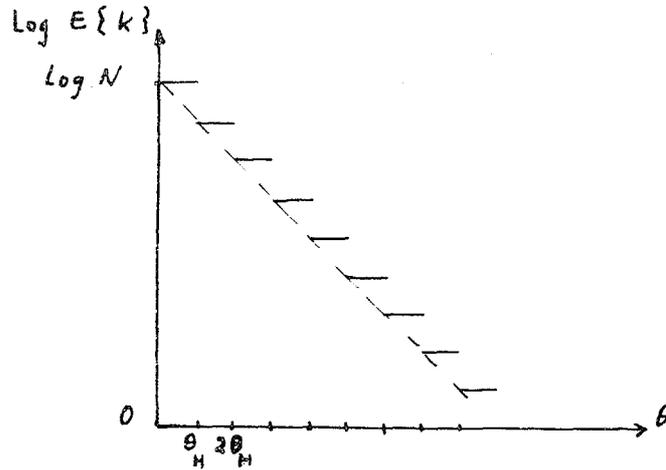


Fig 11

En fait la manipulation au sélecteur donne justement les valeurs $\theta = \theta_H, 2\theta_H, \dots, m\theta_H$. On obtient donc des fonctions linéaires de θ (cf. fig. 12) qui sont en fait des valeurs de $F(\theta)$ échantillonné.

De plus, la pente de la droite obtenue ne représente plus du tout la densité de points du processus : en effet, la pente donnée expérimentalement représente $\# 0,7/\theta_H$ alors que le processus obtenu à partir du processus périodique θ_H par tirage aléatoire p possède une densité de points moyenne égale à p/θ_H (soit ici $0,5/\theta_H$)

Courbes fig.12	f_H KHz	p	$0,7/\theta_H$	pente calculée d'après courbe	$0,5/\theta_H$
a	5	0,5	3,500	4 000	2 500
b	2	0,5	1 400	1 500	1 000
c	1	0,5	700	760	500
d	0,500	0,5	350	390	250



3.2 Etude de l'indépendance statistique des intervalles.

Pour étudier une dépendance statistique entre intervalles du processus, on utilise la méthode proposée par [12]. On enregistre un certain nombre d'intervalles par tranches de 8 intervalles successifs grâce à un système de commande logique. L'enregistrement se fait dans un sélecteur 4096 canaux utilisé en mode multiéchelle : l'avance des canaux est commandée par les impulsions t_j du processus à étudier et le contenu de chaque canal représente la longueur de l'intervalle θ_j correspondant mesurée grâce à une horloge extérieure de fréquence \gg à celle du processus à étudier.

La figure 13 montre des photos de l'écran du sélecteur prises dans différents cas de "densité" du processus de POISSON, avec une fréquence d'horloge extérieure de 100 KHz (la précision de la mesure de l'intervalle est donc de 20 μ s) ou de 1 MHz (précision = 2 μ s) suivant les longueurs moyennes d'intervalles. Lorsque la densité de points ρ est suffisamment importante, ou plutôt lorsque la probabilité de tirage est encore assez forte (0,1 par exemple), on voit très bien apparaître le "pas" élémentaire du processus poissonnien θ_H (cf photos a, b).

Par contre, si la probabilité de tirage p devient très faible (0,01), on perd cette notion de "pas" élémentaire sur l'ensemble de la courbe (la tendance vers la loi de POISSON n'en est que meilleure) (photo c, d).

L'indépendance statistique des intervalles s'étudie de la façon suivante : on considère la variable aléatoire X (X = contenu de chaque canal = longueur



de l'intervalle) à 8 dimensions, et l'étude statistique se fait sur $\frac{4096}{8} = 512$ valeurs possibles pour chaque variable aléatoire X_i (i varie de 1 à 8) ; c'est-à-dire que le contenu du 9ème canal est considéré comme 2ème réalisation de la variable aléatoire X_1 , le contenu du 10ème canal correspond à X_2 , etc..., le contenu du 17ème canal correspond à la 3ème réalisation de X_1 ...

En fait, si le processus est vraiment poissonnien, les moments du 1er ordre et du second ordre doivent être semblables $\forall X_i$; et $\forall i$ et j dans le coefficient de corrélation r_{ij} de deux variables aléatoires quelconques X_i, X_j (lequel, par ailleurs, doit être nul s'il y a indépendance statistique).

$$E\{X_i\} \text{ nous donne encore } E\{\theta_i\} = E\{\theta\} = 1/\rho$$

Les résultats donnés pour exemple dans le tableau ci-dessous correspondent à une expérience pour laquelle ρ théorique du poissonnien $\neq 1\ 000$ (cf photo a).

$E\{X_i\}$	σ_{X_i}	k	$\overline{r_{ij}}$	$\sigma_{\theta_k}^2$	$k \overline{\sigma}^2$
1056	848	1			
1071	953	2	0,0147	$1,742 \cdot 10^6$	$1,4 \cdot 10^6$
1033	872	3	-0,0301	$2,43 \cdot 10^6$	$2,271 \cdot 10^6$
1029	863	4	-0,0055	$3,11 \cdot 10^6$	$3,028 \cdot 10^6$
969	850	5	+0,033	$3,862 \cdot 10^6$	$3,785 \cdot 10^6$
1047	876	6	-0,0128	$4,683 \cdot 10^6$	$4,542 \cdot 10^6$
981	853	7	+0,0075	$5,52 \cdot 10^6$	$5,299 \cdot 10^6$
1031	852	8	+0,0599	$6,38 \cdot 10^6$	$6,056 \cdot 10^6$

$$\overline{E(X_i)} = 1\ 027 \quad \overline{\sigma(X_i)} = 870 ; \quad \rho_{\text{manip}} = 10^6 / 1027 = 970$$



Si le processus est poissonnien, on doit avoir
 $E\{\theta\} = \sigma_\theta$

On voit que $\forall i$, $E\{X_i\}$ reste quasiment constant, ainsi que σ_{X_i} . L'égalité $E\{X_i\} = \sigma_{X_i}$ par contre ne semble pas être retrouvée avec la précision attendue (qui est de l'ordre de $\frac{2}{\sqrt{N}} \neq \frac{1}{10}$, étant donné le nombre $N = 512$). Ceci vient probablement de ce que la probabilité de tirage p est un peu forte. Par contre, un test sur le coefficient de corrélation r_{ij} nous montre que celui-ci n'est pas significativement différent de zéro (Cette étude complémentaire montre que jusqu'à $\pm 4\%$, $r \simeq 0$).

D'autre part, ces données nous permettent d'étudier $E\{X_i X_j\}$ qui, s'il y a indépendance, doit être égal à $E\{X_i\} \cdot E\{X_j\}$. Enfin, les deux dernières colonnes comparent: (variance de la variable aléatoire somme de k intervalles) et (k variance de la variable aléatoire X_i): on sait que l'on doit avoir

$\sigma_{\oplus k}^2 = k \sigma_{\oplus}^2$, si les θ_j sont indépendants, ce qui semble être vérifié ici.

Des études similaires ont été faites dans d'autres conditions de manipulation, et les résultats obtenus sont du même ordre.

On peut donc conclure raisonnablement à l'indépendance statistique des intervalles du processus "poissonnien" obtenu.



3.3 Etudes de stationnarité.

On a tout d'abord vérifié la stationnarité de la puissance du bruit $Y(t)$ en enregistrant celle-ci pendant des durées suffisamment longues (plusieurs heures) : les très légères variations relevées ($\frac{20}{600} \text{ mV} \# \frac{1}{30}$) ne justifient pas l'utilisation d'un CAG. En fait, il suffit que la tension de polarisation de la diode Zener émettrice de bruit soit très stable ($5 \cdot 10^{-4}$).

Nous avons relevé parallèlement au sélecteur des enregistrements de la densité moyenne ρ du processus poissonnien obtenu. Le sélecteur est utilisé en mode "multiéchelle" et une horloge extérieure fait avancer les canaux, à une fréquence très basse (1 sec ou 10 sec) ; dans chaque canal de durée T ($= 1 \text{ s}$ ou 10 s), on compte le nombre de points du processus de POISSON (voir fig. 14). Les enregistrements ont été faits sur des durées variant de $4096 \times 1 \text{ sec} = 1\text{h}10'$, à $4096 \times 4 \text{ sec} = 4\text{h}30'$.

La densité ρ représente l'espérance mathématique de la variable aléatoire $M =$ nombre de points t_j par seconde $E\{M\} = \rho$, et $\sigma_M = \sqrt{\rho}$ (si le processus est poissonnien). Les écarts observés sont de l'ordre de $\pm 2 \sqrt{\rho}$

3.4 Fonction de corrélation du signal binaire poissonnien.

On a tracé à l'aide d'un corrélateur hybride à échantillonnage la fonction de corrélation du signal binaire obtenu : en fait, la figure 15 représente la



fonction de corrélation de la fonction $X(t)$ (i.e. le basculeur poissonnien "en permanence"). On retrouve la courbe attendue, qui est de la forme

$$\Gamma(\tau) = \Gamma(0) \cdot e^{-2\rho|\tau|}$$

La valeur à l'origine est normalisée à 1 .

Les calculs de pente sur la courbe donnent $\rho \approx 860, 870$, alors que ρ théorique = 820, ce qui paraît satisfaisant, vu la précision de la mesure dès que $\tau > 1$ ms.

4. CONCLUSION.

Le dispositif décrit génère, outre un signal qui s'apparente au signal "binaire codé", un signal binai-
re poissonnien dont l'étude ci-dessus semble donner satisfaction quant au caractère "poissonnien" attendu : indépendance statistique des intervalles et fonction de répartition de ceux-ci de la forme $1 - e^{-\rho\theta}$. Le dispositif permet en particulier d'obtenir des densités ρ très faibles - sous condition de respecter les normes de durée $2T$ du signal. Par contre, l'obtention de densités ρ très fortes suivant le même principe exige un bruit de départ à très large bande, et l'utilisation d'impulsions d'échantillonnage beaucoup plus brèves.

Il ne semble pas qu'il y ait eu jusqu'à présent de réalisation de générateur "poissonnien", sauf, peut-être, un dispositif réalisé par POPPELBAUM et AFUSO [10] à partir d'un principe analogue :



malheureusement nous n'avons pas encore de précisions suffisantes à ce sujet.

Un tel dispositif - qui s'avère simple et maniable - permet de générer à tout instant des séquences véritablement aléatoires, de propriétés d'ensembles connues, mais non identiques d'une réalisation à l'autre. L'intérêt de l'utilisation d'un processus de base poissonnien peut être mis en évidence en ce qui concerne, par exemple, la détection active du type Radar ou Sonar (cf. [11]).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. BOUTHEON - Génération de séquences binaires cycliques de longueur maximale.
Rapport CEPHAG N° 8/66.
- [2] S.TSAO - Generation of delayed replicas of maximal length linear binary sequences.
P IEE, Vol: III, N° 11, Nov. 1964.
- [3] G.I.A.S. GIAP - Générateur d'impulsion aléatoire simulateur CRC
- [4] POPPELBAUM, AFUSO et ESCH - Stochastic computing elements and systems - Fall-joint computer Conference 1967.
- [5] SERGIO RIBEIRO - Random Pulse Machines.
Trans. on Electr. Computers 3, Juin 1967.
- [6] BONNET G. - Processus ponctuels et fonctions aléatoires associées.
Rapport CEPHAG N° 21/65
- [7] GARAMPON G* - Signaux aléatoires et ambiguïté
Communication présentée à La Spezia, Colloque OTAN, Septembre 1967.
- [8] BLANC-LAPIERRE A. - Modèles statistiques pour l'étude de phénomènes de fluctuations.
Masson, (1963)
- [9] BERTHE - Analyse de la distribution des intervalles de temps.
Note d'étude CEN-G E1Nu 52, 21.4.1966
- [10] POPPELBAUM W.J. et AFUSO - "Noise Computer"
University of Illinois, Urbana - Dept. Computer Sci. Quant. Tech. Progress Depts., Avril 1965
- [11] GARAMPON G* et BONNET G. - Extension de la notion de fonction d'ambiguïté à des signaux aléatoires.
Ann. des Télécomm., T 23, Mai-Juin 1968.
- [12] LEGAY C. - Résultats non publiés.

* L'auteur publie désormais sous le nom de G. JOURDAIN.



fig : 1

Fonction de corrélation du signal latticiel de renouvellement lorsque p varie entre 0 et 1

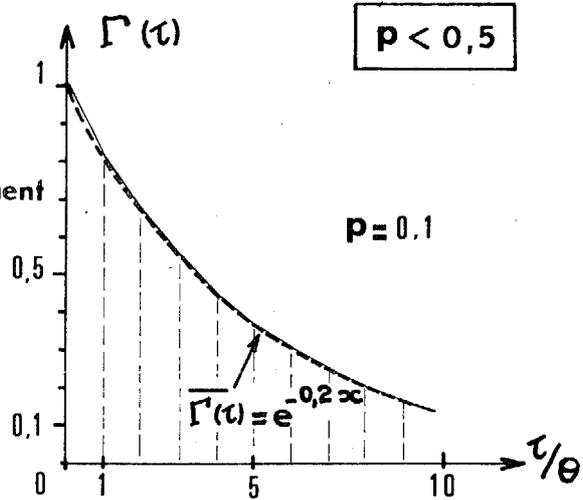
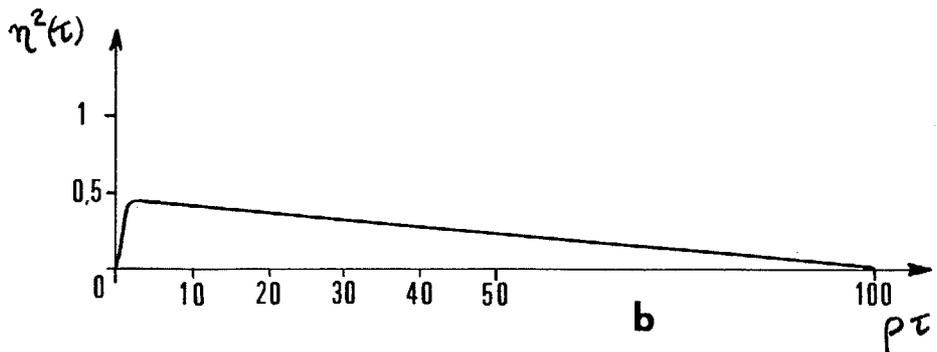
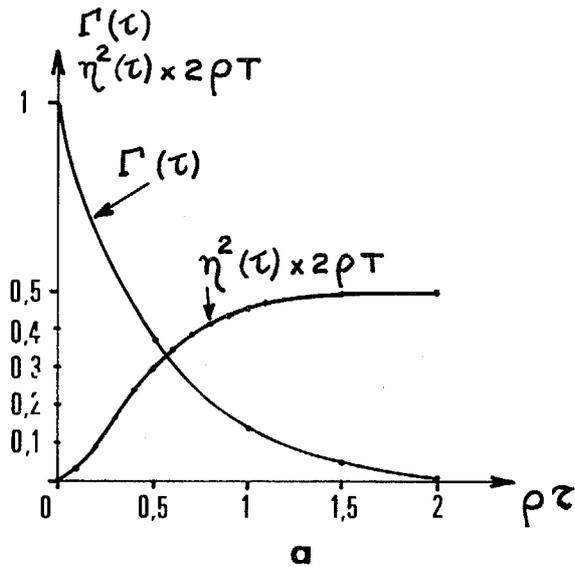


fig: 2

Fonction de corrélation du basculeur poissonnien
 $\Gamma(\tau) = e^{-2\rho|\tau|}$
 et variance de la fonction de corrélation

$$\eta^2(\tau) = \frac{\Lambda_{2T}(\tau)}{4\rho T} \left[1 - e^{-4\rho|\tau|} (1 + 4\rho|\tau|) \right]$$



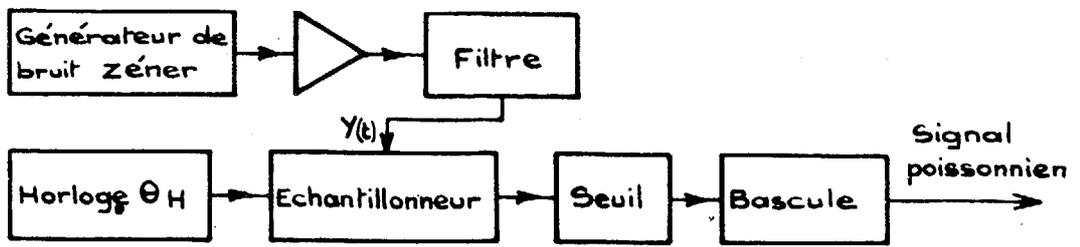


Fig. 3 - Schéma synoptique de l'ensemble

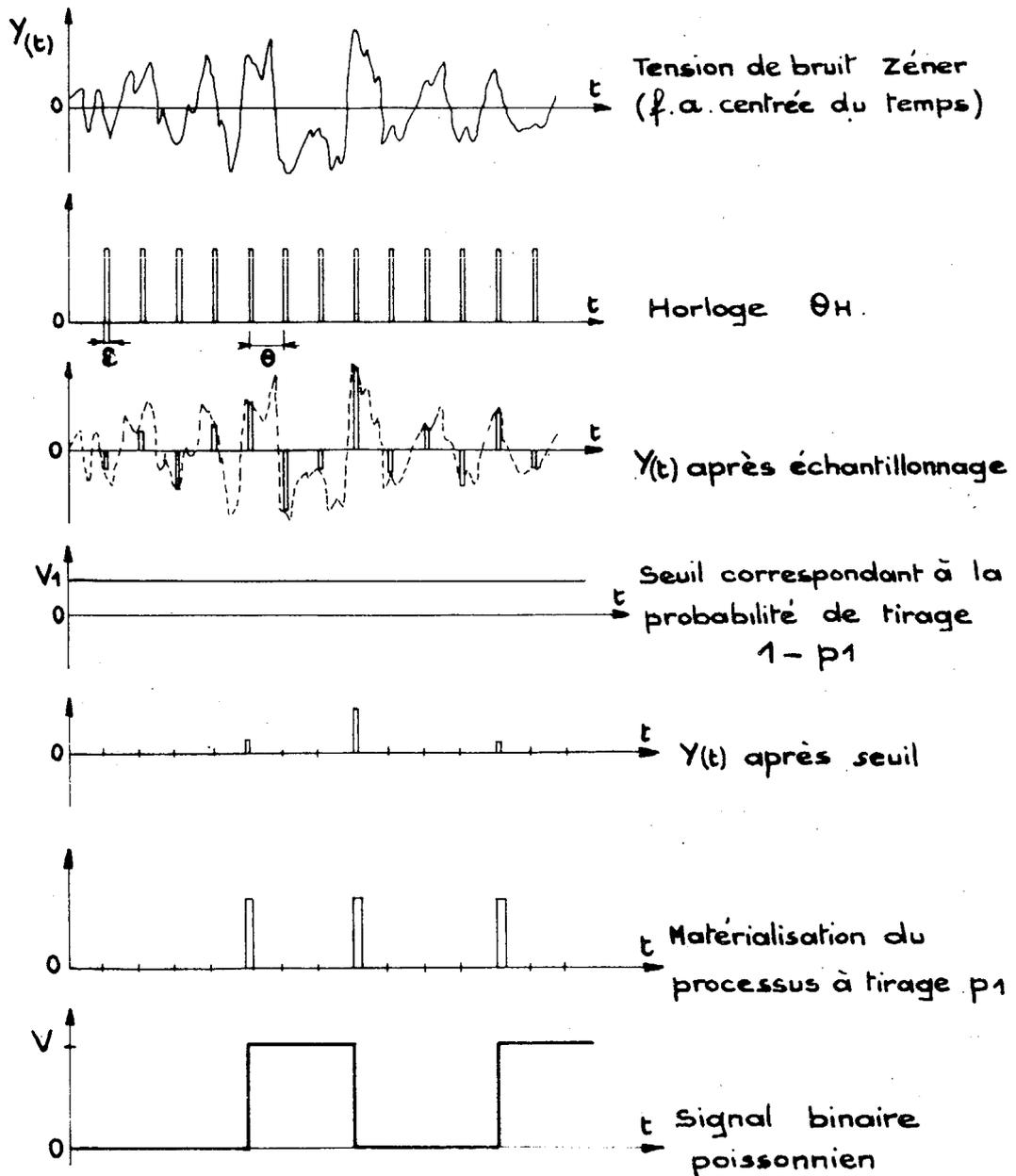


Fig. 4

FONCTION DE CORRELATION DU BRUIT 85 KHz - 100 KHz

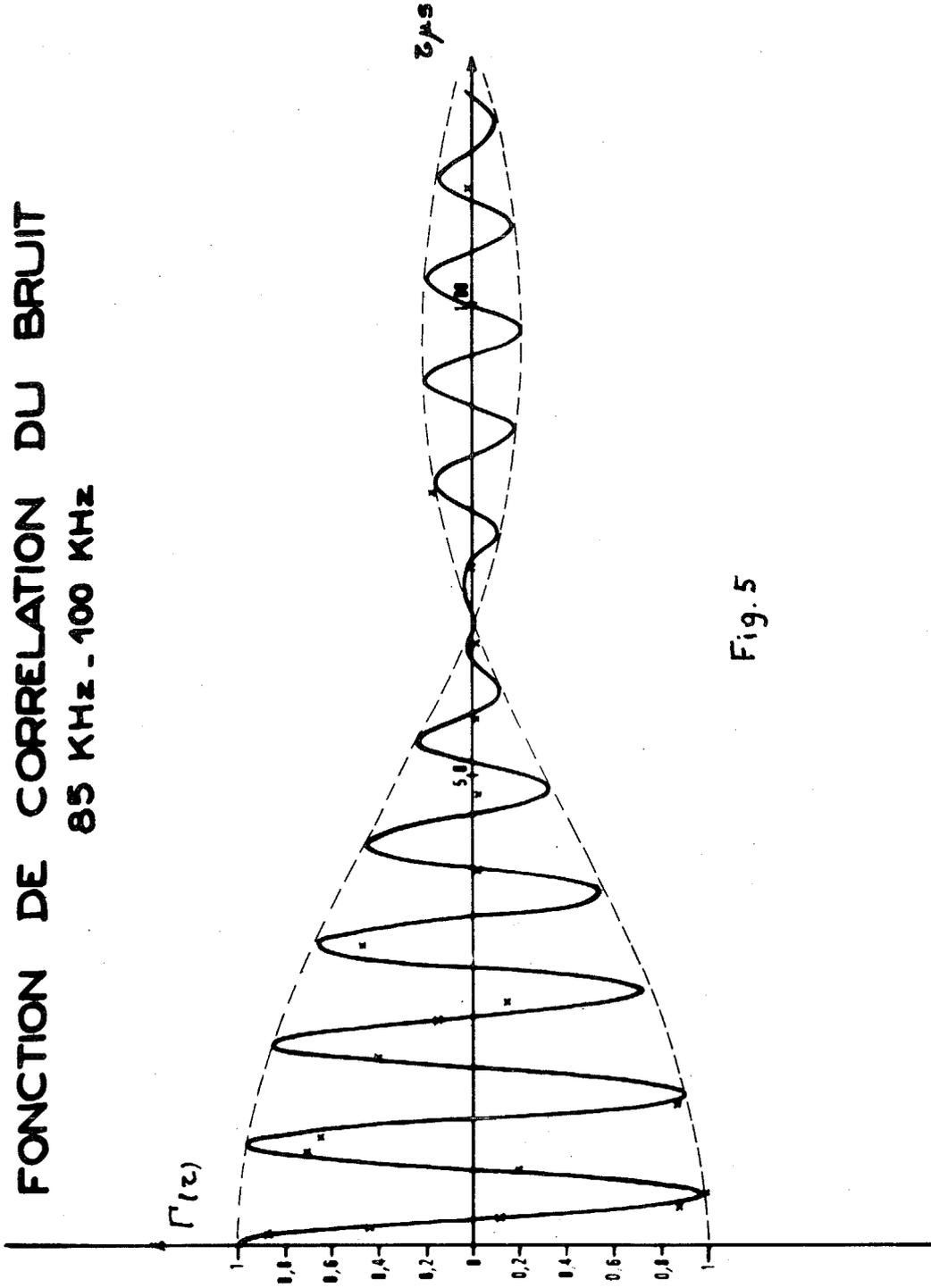


Fig. 5





FONCTION DE CORRELATION
DU BRUIT FILTRE 50 KHz - 100 KHz

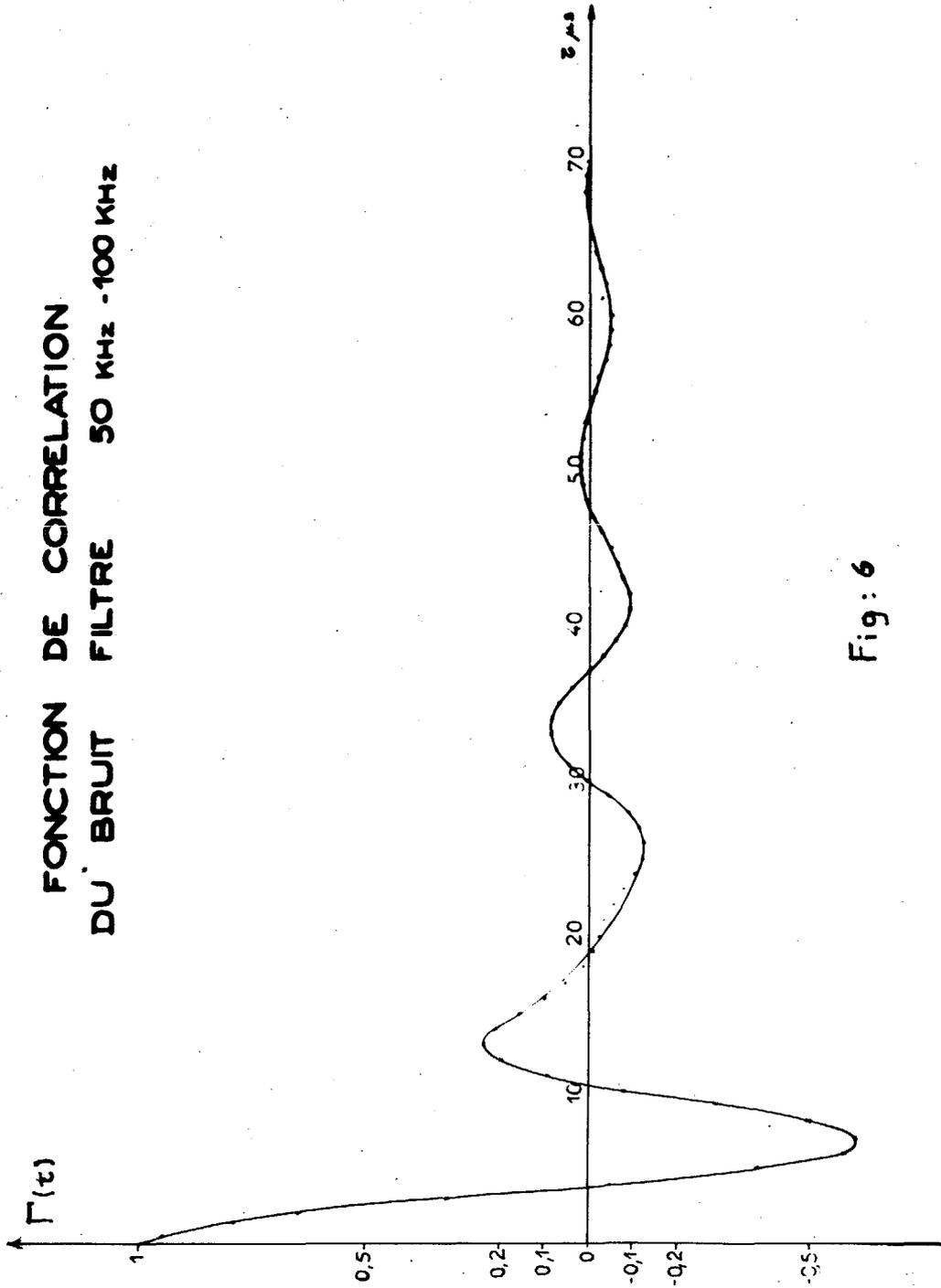


Fig: 6

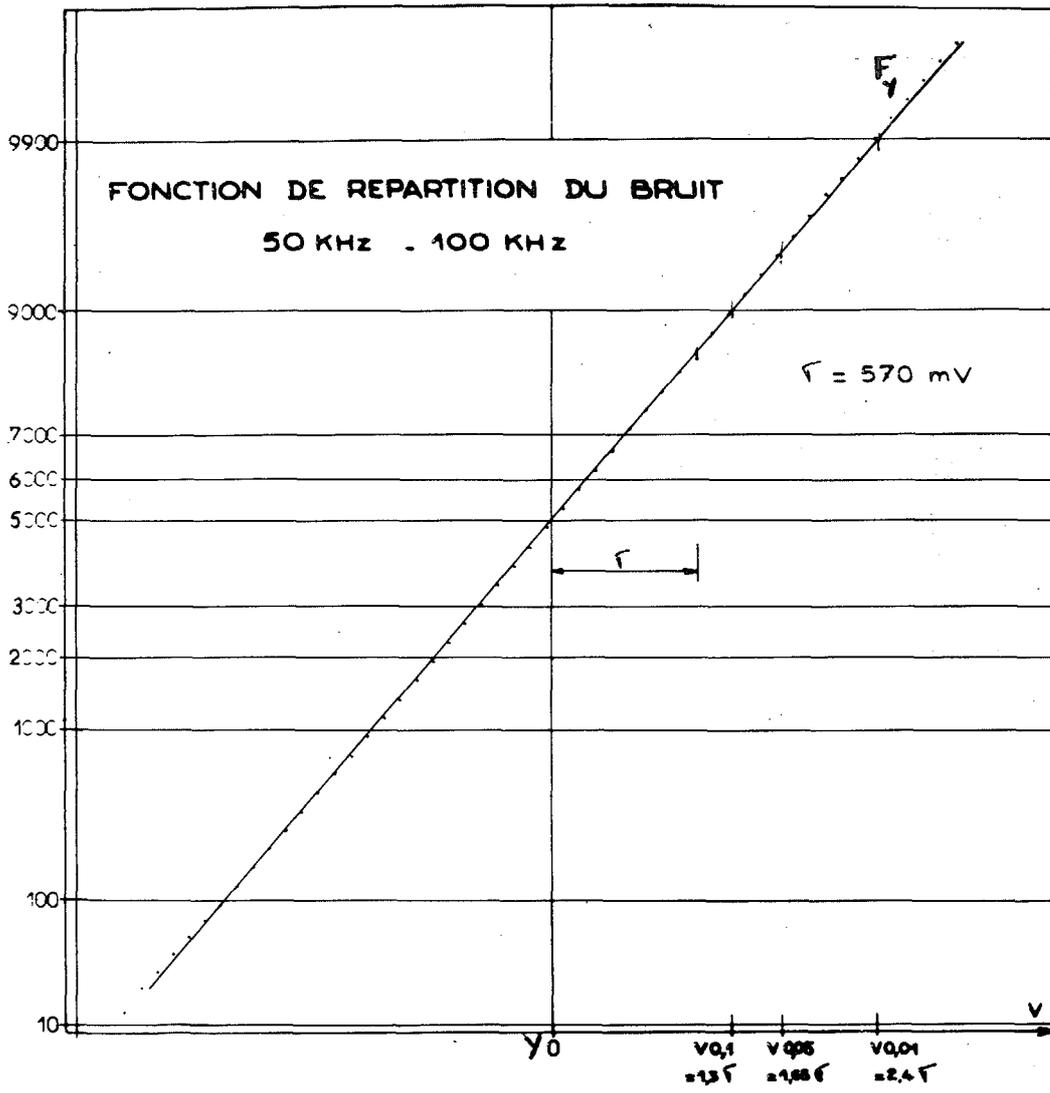


Fig. 7

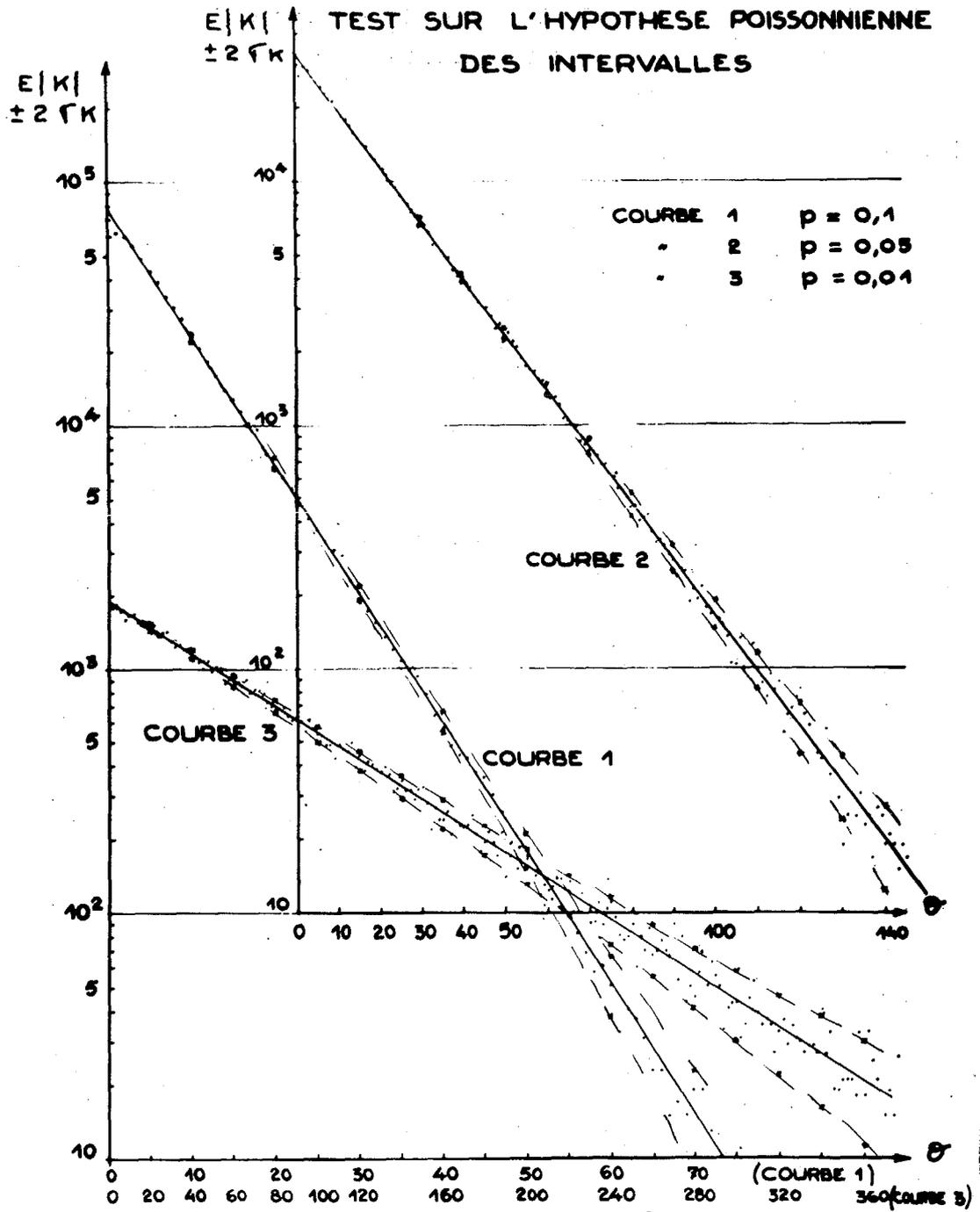


Fig : 9 - $E|K| = f(\theta)$ avec $f_H = 5$ KHZ



TEST SUR LA DISTRIBUTION DES INTERVALLES DU PROCESSUS BINAIRE CODE ($p = 0,5$)

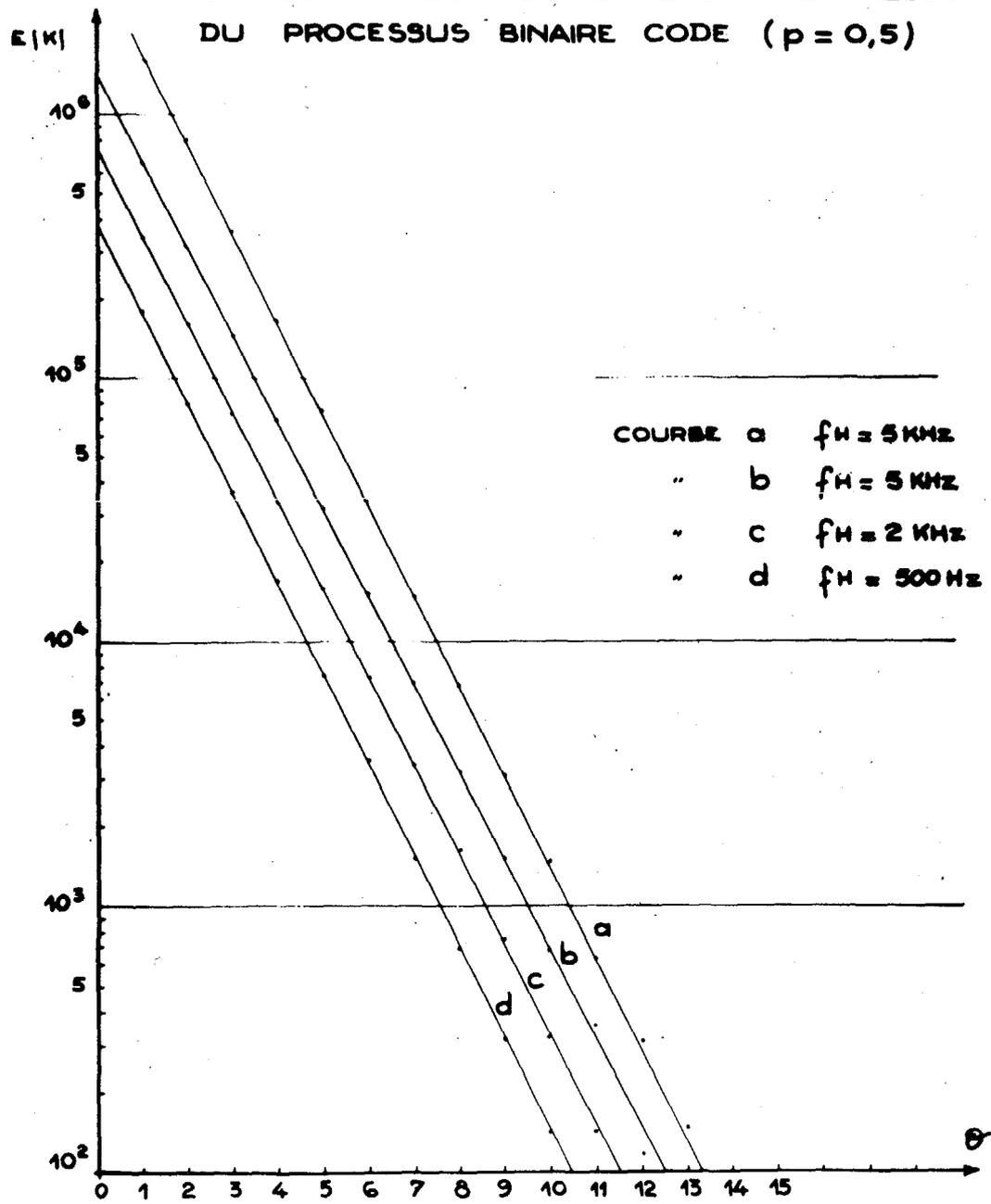
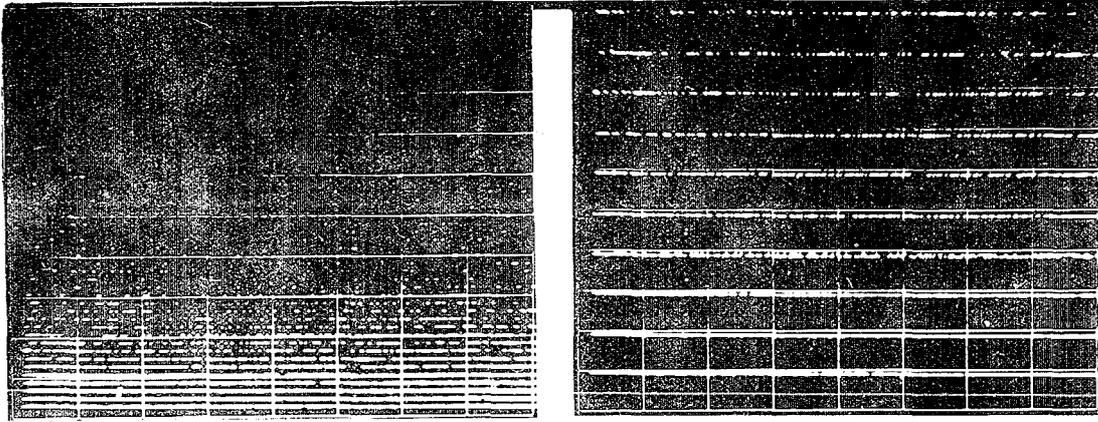


Fig 12 - $E(K) = f(\theta)$ $p = 1/2$



Fig. 13 - Etude de l'indépendance statistique des intervalles.



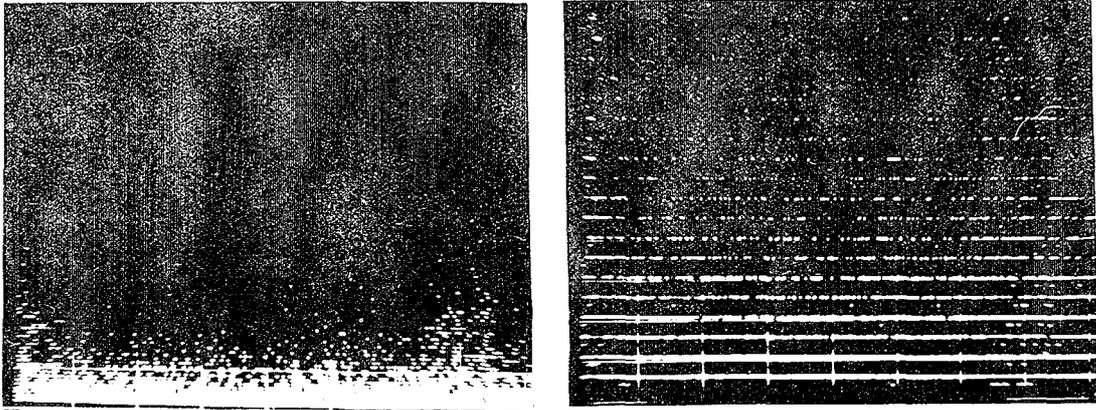
Echelle : 1000 cp/division 200 cp/division

ρ théorique $\neq 1000$ (avec pas élémentaire 0,2 ms)

Horloge extérieure : 1 MHz

$$E\{\theta\} = 1/\rho_{\text{manip}} = 1,027 \cdot 10^3 \Rightarrow \rho_{\text{manip}} = 970$$

Photo (a)



Echelle : 500 cp/division 100 cp/division

ρ théorique $\neq 450$ (avec pas élémentaire 0,5 ms)

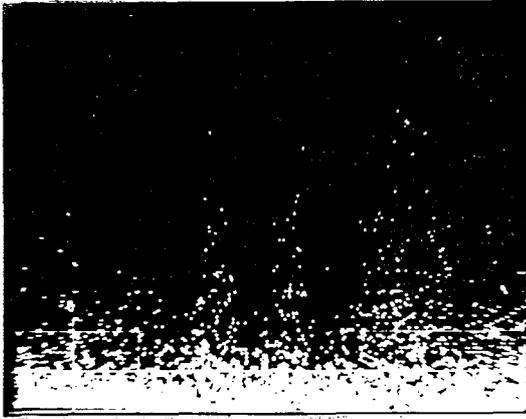
Horloge extérieure : 100 KHz

$$E\{\theta\} = 1/\rho_{\text{manip}} = 0,2438 \cdot 10^3 \Rightarrow \rho_{\text{manip}} = 410$$

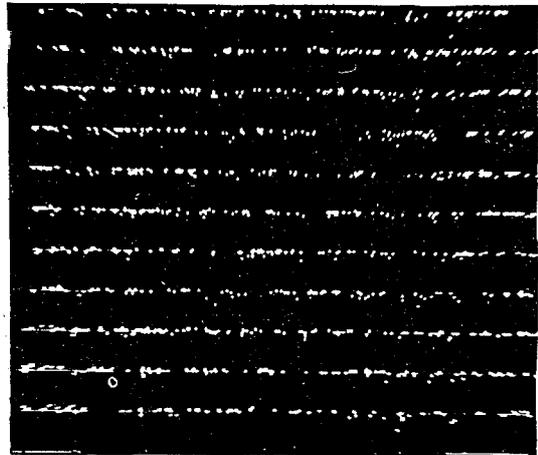
Photo (b)



Figure 13 - (Suite)



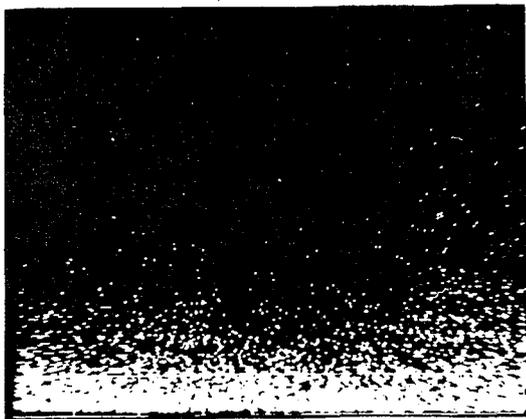
Echelle : 2000/division



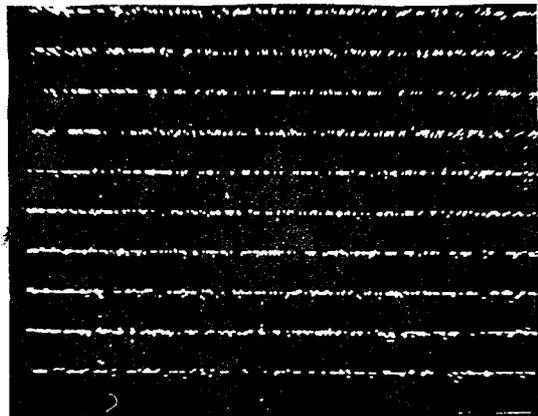
20 cp/division

ρ théorique # 55 (avec pas élémentaire 0,2 ms)
 Horloge extérieure : 100 KHz
 $E \{ \theta \} = 1/\rho_{manip} = 0,159 \cdot 10^4 \rightarrow \rho_{manip} = 63$

Photo (c)



Echelle : 500 cp/division



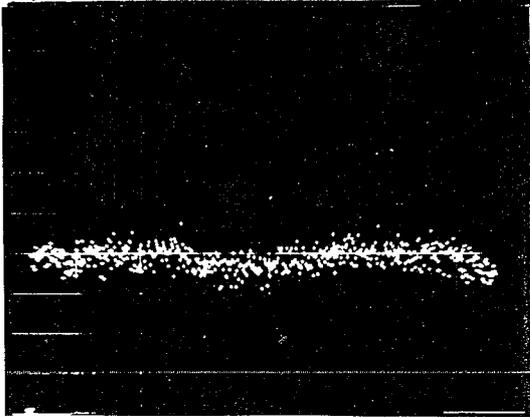
20 cp/division

ρ théorique # 250 (avec pas élémentaire 0,2 ms)
 Horloge extérieure : 100 KHz
 $E \{ \theta \} = 1/\rho_{manip} = 0,436 \cdot 10^3 \rightarrow \rho_{manip} = 230$

Photo (d)



Fig. 14 - Etude de la stationnarité de la densité

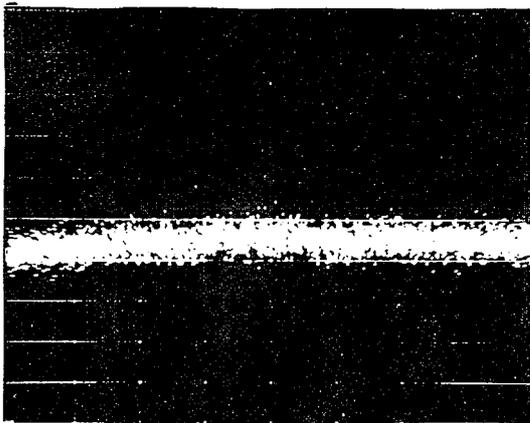


Conditions
 $f_{\theta_H} = 5 \text{ kHz}$
 $p = 0,01$ } $\rho_{\text{théor}} = 55$
 $\sigma_{\text{théor}} = \sqrt{\rho} = 7,5$

Courbe: 1 canal = 10 s
 nombre canaux = 512
 $E\{M\} = \rho_{\text{moyen}} = 50$

$\sigma_M < 10$

Echelle : 1000 cp/10 div

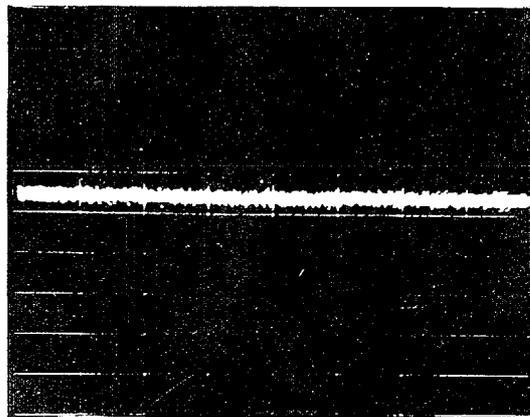


Conditions
 $f_{\theta_H} = 5 \text{ kHz}$
 $p = 0,1$ } $\rho_{\text{théor}} = 560$
 $\sigma_{\text{théor}} = \sqrt{\rho} = 23,5$

Courbe: 1 canal = 1 s
 nombre canaux = 4096
 $E\{M\} = \rho_{\text{moyen}} = 560$

$\sigma_M < 40$

Echelle : 1000 cp/10 div



Conditions
 $f_{\theta_H} = 5 \text{ kHz}$
 $p = 0,5$) densité du
) processus
) théorique
) = 2500

Courbe: 1 canal = 1 s
 nombre canaux = 4096
 $E\{M\} = 2600$

Echelle : 1000 cp/10 div



Fig. 15

**FONCTION DE CORRELATION DU SIGNAL
BINAIRE POISSONNIEN OBTENU**

