



DEUXIÈME COLLOQUE
SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL
ET SES APPLICATIONS
NICE - 5 AU 10 MAI 1969

17/1

ETUDE EXPERIMENTALE DU NOMBRE DE DEPASSEMENTS D'UN SEUIL
PAR UNE FONCTION ALEATOIRE ET APPLICATION A LA
DETECTION DES SIGNAUX*

Pierre-Yves ARQUES

RESUME

Après des rappels théoriques, on étudie expérimentalement certaines propriétés statistiques des variables aléatoires "nombre de dépassements d'un seuil par une fonction aléatoire stationnaire gaussienne (à laquelle s'additionnera éventuellement une fonction sinusoïdale)". On en déduit les performances d'un système de détection de signaux par comptage du nombre de dépassements d'un seuil par la fonction reçue.

ABSTRACT

After some theoretical recalls, we perform an experimental study of some statistical properties of random variables, i.e. the number of times a level is crossed in a positive direction by a random stationary gaussian function (plus eventually, a sinusoidal signal). The performances of a signal detection system by means of counting the number of times a level is crossed by the input function are then derived.

* Etude réalisée au Centre d'Etude des Phénomènes Aléatoires (CEPHAG) - GRENOBLE.



1. GENERALITES

1.1. Etant donnée une fonction aléatoire du temps $X(t)$, soit

$m_{T,X}(t;\lambda)$ la fonction aléatoire du temps "nombre de dépassements par $X(t)$ du seuil de hauteur $\lambda \geq 0$ dans l'intervalle de temps $[t-T, t]$ ". Si l'on suppose $X(t)$ strictement stationnaire, il en est de même de $m_{T,X}$ et ses deux premiers moments sont alors [1,2,3]

$$(1) \quad E \{ m_{T,X}(\lambda) \} = T \int_0^{+\infty} x' p_1(\lambda, x') dx'$$

$$(2) \quad E \{ m_{T,X}^2(\lambda) \} = \int_0^T \int_0^T \left[\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} x'_1 x'_2 p_2(\lambda, x'_1, \lambda, x'_2; \tau_1 - \tau_2) dx'_1 dx'_2 \right] d\tau_1 d\tau_2$$

p_1 et p_2 sont les densités de probabilité (que l'on suppose exister) des variables aléatoires $X(\tau)$, $\frac{dX}{dt}(\tau)$ d'une part, et $X(\tau_1)$, $\frac{dX}{dt}(\tau_1)$, $X(\tau_2)$, $\frac{dX}{dt}(\tau_2)$ d'autre part.

Si $X(t)$, en outre, est strictement ergodique, on peut écrire au sens d'une valeur moyenne temporelle

$$(3) \quad \bar{m}_{T,X}(\lambda) = T \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} m_{\theta,X}(t;\lambda) = E \{ m_{T,X}(\lambda) \}$$

1.2. En général les formules (1) et (2) précédentes ne sont que difficilement exploitables d'un point de vue théorique en raison des difficultés de calcul.

On suppose $X(t)$ constituée par la somme d'une fonction $B(t)$ aléatoire, stationnaire, gaussienne, centrée et d'une fonction $S(t)$.

Si $S(t)$ est certaine, de la forme $S(t) = \sqrt{2s} \cos 2\pi v_s t$,



la quantité $E \{ m_{T,X}(\lambda) \}$, pour T multiple entier de la période $\frac{1}{\nu}$, peut s'exprimer sous forme d'une série [4,5,6] (voir en particulier (24) de [6]).

Si $S(t)$ est aléatoire, gaussien, stationnaire, centré, on peut écrire pour T quelconque [7] :

$$(4) \quad E \{ m_{T,X}(\lambda) \} = \frac{T}{2\pi} \frac{\sigma'_X}{\sigma_X} e^{-\frac{\lambda^2}{2\sigma_X^2}}$$

σ_X et σ'_X sont les écarts-types des fonctions $X(t)$ et $\frac{dX(t)}{dt}$, tels que ($\gamma_X(\nu)$ représentant la densité spectrale de $X(t)$) :

$$(5) \quad \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_X(\nu) d\nu$$

$$(6) \quad \sigma'^2_X = 4\pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \nu^2 \gamma_X(\nu) d\nu$$

Si B et S sont indépendants, de densités spectrales constantes dans deux bandes de centre et de largeur respectives ν_B , $2\Delta\nu_B$ et ν_S , $2\Delta\nu_S$ (et nulles ailleurs) :

$$\sigma_X^2 = \sigma_B^2 + \sigma_S^2$$

$$\sigma'^2_X = \sigma'^2_B + \sigma'^2_S = 4\pi^2 \left[\sigma_B^2 \left(\nu_B^2 + \frac{\Delta\nu_B^2}{3} \right) + \sigma_S^2 \left(\nu_S^2 + \frac{\Delta\nu_S^2}{3} \right) \right]$$

On appellera rapport signal sur bruit d'entrée de $X(t) = S(t) + B(t)$, le rapport des puissances moyennes de S et de B [8], c'est-à-dire pour un signal, respectivement sinusoïdal et aléatoire :

$$(7-a) \quad \left[\frac{S}{B} \right]_{e,dB} = 10 \log R = 10 \log \frac{S}{\sigma_B^2}$$

$$(7-b) \quad \left[\frac{S}{B} \right]_{e,dB} = 10 \log R = 10 \log \frac{\sigma_S^2}{\sigma_B^2}$$



2. ETUDE EXPERIMENTALE DE $m_{T,X}(t;\lambda)$.

2.1. Les difficultés présentées par la méthode théorique conduisent à rechercher une méthode d'étude expérimentale des propriétés statistiques de $m_{T,X}(t;\lambda)$. Une fois les différents paramètres fixés, cette dernière permet d'obtenir non seulement les valeurs expérimentales de la valeur moyenne et de l'écart-type de $m_{T,X}$, mais aussi les courbes expérimentales représentant la densité de probabilité et la fonction de répartition d'ordre 1 de $m_{T,X}$.

Cette étude expérimentale a été faite par l'intermédiaire de celle d'une suite de variables aléatoires $m_{T,X}(t_K;\lambda)$, valeurs de $m_{T,X}(t;\lambda)$ pour une suite d'instants t_K de la forme $t_0 + KT$. Le montage expérimental utilisé est représenté figure 1.

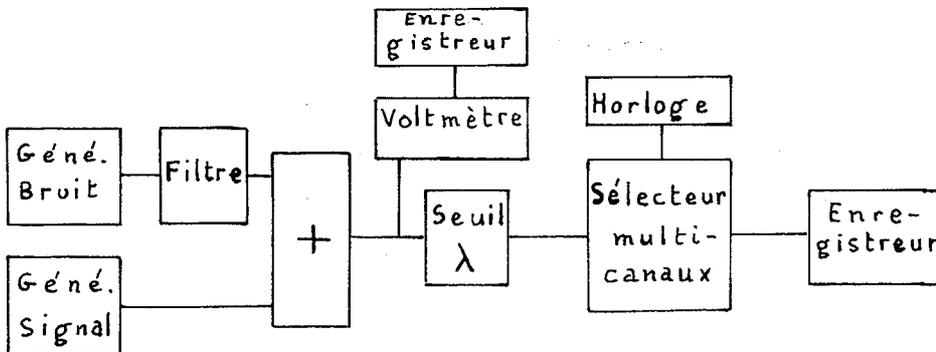


FIGURE 1

Le matériel utilisé est en grande partie identique à celui utilisé dans les études exposées dans [9, 10]. La fonction $X(t)$ sortant de l'additionneur est comparée à chaque instant t , au seuil λ . Tout dépassement du seuil par $X(t)$ se traduit par une impulsion à l'entrée du sélecteur multicanaux. L'enregistreur délivre, à un facteur multiplicatif près, la suite des probabilités pour que la variable aléatoire $m_{T,X}(t; \lambda)$ soit égale à l'entier n (avec $0 \leq n \leq 4095$).



2.2. Les courbes de probabilité précédentes et dans certains cas

la suite des $m_{T,X}(t_K; \lambda)$, ont été enregistrées pour des fonctions d'entrée $X(t)$ du type considéré au § 1.2, et pour différentes valeurs des paramètres T , λ , et $[S/B]_e$ (ou R), dans les cas suivants:

a) Cas "bande étroite"

$$B(t) : v_B \simeq 5 \text{ KHz}, \quad 2\Delta v_B \simeq 400 \text{ Hz}, \quad \sigma_B = 100 \text{ mV} ;$$

$$S(t) : \begin{array}{l} \alpha) \text{ sinusoïdal, } v_s = 5 \text{ KHz} \\ \beta) \text{ gaussien, } v_s \simeq 5 \text{ KHz, } 2\Delta v_s \simeq 400 \text{ Hz} \end{array}$$

b) Cas "bande large"

$$B(t) : v_B \simeq 5 \text{ KHz}, \quad 2\Delta v_B \simeq 6 \text{ KHz}, \quad \sigma_B = 100 \text{ mV} ;$$

$$S(t) : \text{gaussien, } v_s \simeq 5 \text{ KHz, } 2\Delta v_s \simeq 400 \text{ Hz}$$

On en déduit les courbes des figures 2 à 6. Il faut noter que ces expériences sont assez sensibles à la stationnarité du bruit, laquelle a été contrôlée par enregistrement de la puissance moyenne σ_B^2 .

Figure 2 : Distributions de probabilité $p(m)$ du nombre de dépassements du seuil $\lambda = 1,75\sigma_B$ pour $T = 200 \text{ ms}$, à bande étroite pour $s = 0$ et $\sqrt{s} = 0,5\sigma_B$, et à bande large pour $\sigma_s = 0$.

Figure 3 : Fonctions de répartition correspondantes tracées en coordonnées gaussio-arithmétiques (ou galtoniennes). Les droites sont les courbes gaussiennes ayant pour valeur moyenne et écart-type les valeurs expérimentales mesurées sur m .

Figure 4 : valeur moyenne $E\{m\}$ et écart-type σ_m du nombre de dépassements du seuil λ , en fonction de λ/σ_B , pour $T = 200 \text{ ms}$, à bande étroite pour $s = 0$ et $\sqrt{s} = 0,5\sigma_B$, et à bande large pour $\sigma_s = 0$.

Figure 5 : valeur moyenne $E\{m\}$ et écart-type σ_m du nombre de dépassements du seuil λ en fonction de $[S/B]_{e, \text{dB}}$, pour



$T = 200$ ms, à bande étroite et signal sinusoïdal
 ($\lambda = 1,50 \sigma_B$, $\lambda = 2,00 \sigma_B$, $\lambda = 2,50 \sigma_B$) et à bande large
 et signal aléatoire ($\lambda = 1,75 \sigma_B$).

Figure 6 : valeur moyenne $E\{m\}$ et écart-type σ_m du nombre de dépassements du seuil $\lambda = 2,00 \sigma_B$, en fonction de T , bruit seul à bande étroite ($s = 0$) ou à bande large ($\sigma_s = 0$).

Les courbes des figures 2 et 3 montrent que l'on peut, sauf pour des probabilités proches de 0 et ne considérer la variable aléatoire m comme presque gaussienne tout au moins dans les conditions des présentes expériences.

Les courbes des valeurs moyennes $E\{m\}$, (figure 4) dans le cas du bruit seul à bande étroite ($s=0$), et à bande large ($\sigma_s=0$) sont très peu différentes des courbes théoriques correspondantes pour des bruits gaussiens, déduites de la formule (4).

Si l'on fait subir aux courbes $E\{m\}$ et σ_m de la figure 4, dans le cas bruit à bande étroite et signal sinusoïdal ($\sqrt{s} = 0,5\sigma_B$), une affinité orthogonale à l'axe des ordonnées, et de rapport

$$\frac{\sigma_B}{\sqrt{\sigma_B^2 + s}} = 0,894, \text{ ces courbes deviennent très voisines des courbes}$$

correspondantes dans le cas de bruit seul ($s=0$).

Les courbes de la figure 6 sont, aux erreurs expérimentales près, pour $10 \text{ ms} \leq T \leq 1 \text{ s}$, des portions de droites. On déduit immédiatement de la mesure du coefficient angulaire de ces droites (et en tenant compte des échelles qui sont légèrement différentes pour les abscisses et les ordonnées), que la valeur moyenne $E\{m\}$ est une fonction de T de la forme cT , et que l'écart-type σ_m est une fonction de T de la forme $c'\sqrt{T}$ (c et c' sont indépendantes de T).

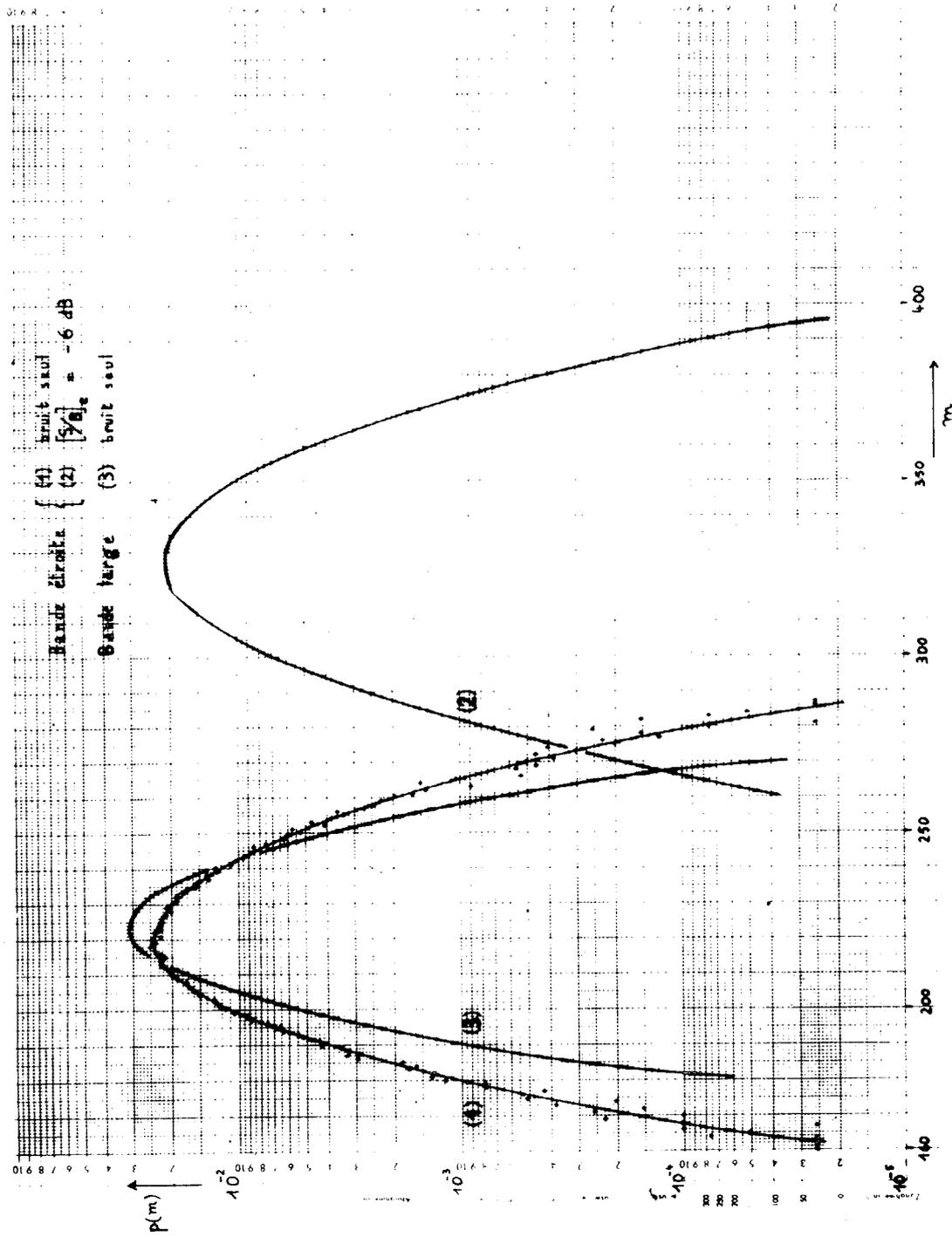


FIGURE 2

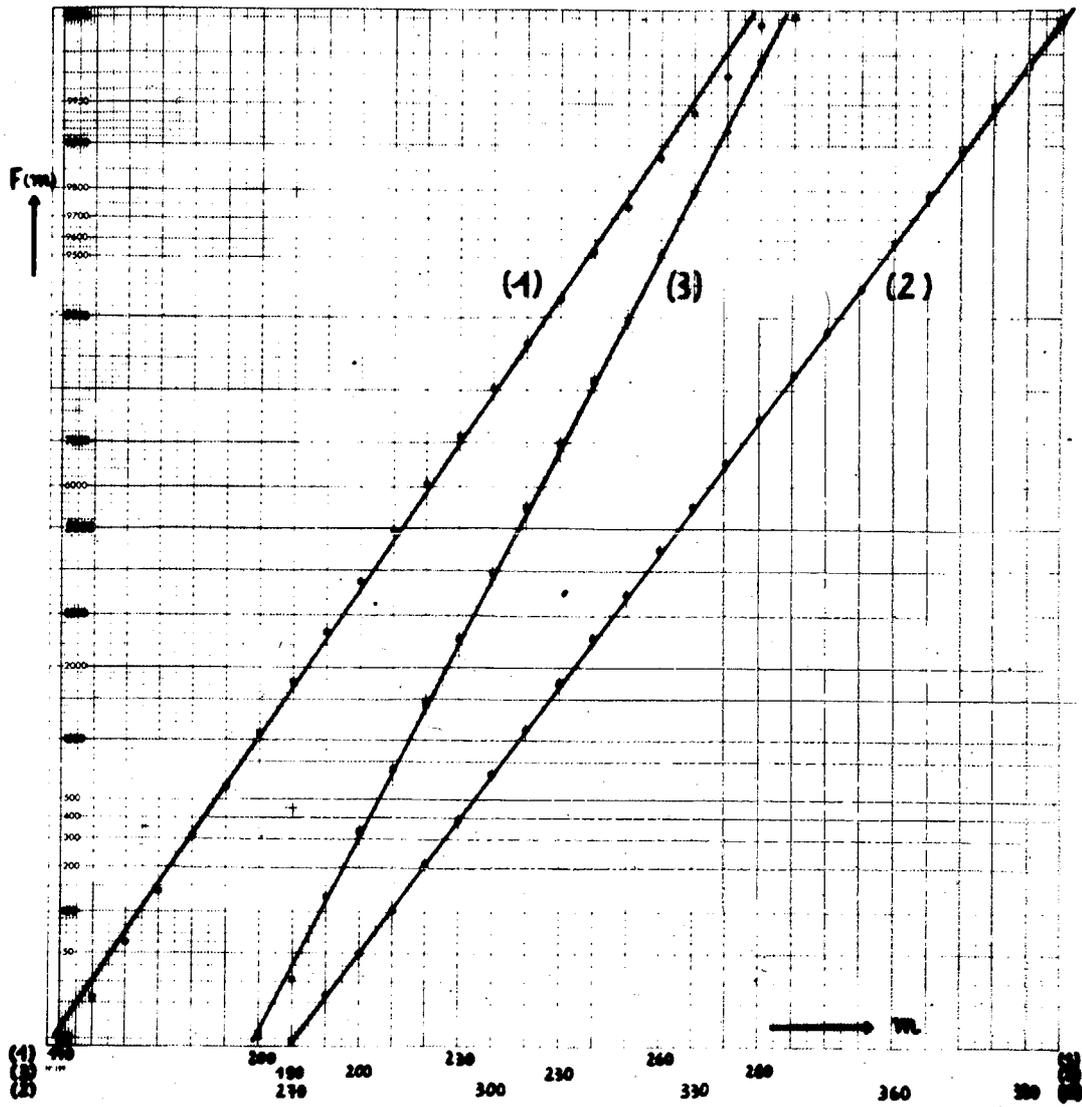


FIGURE 3

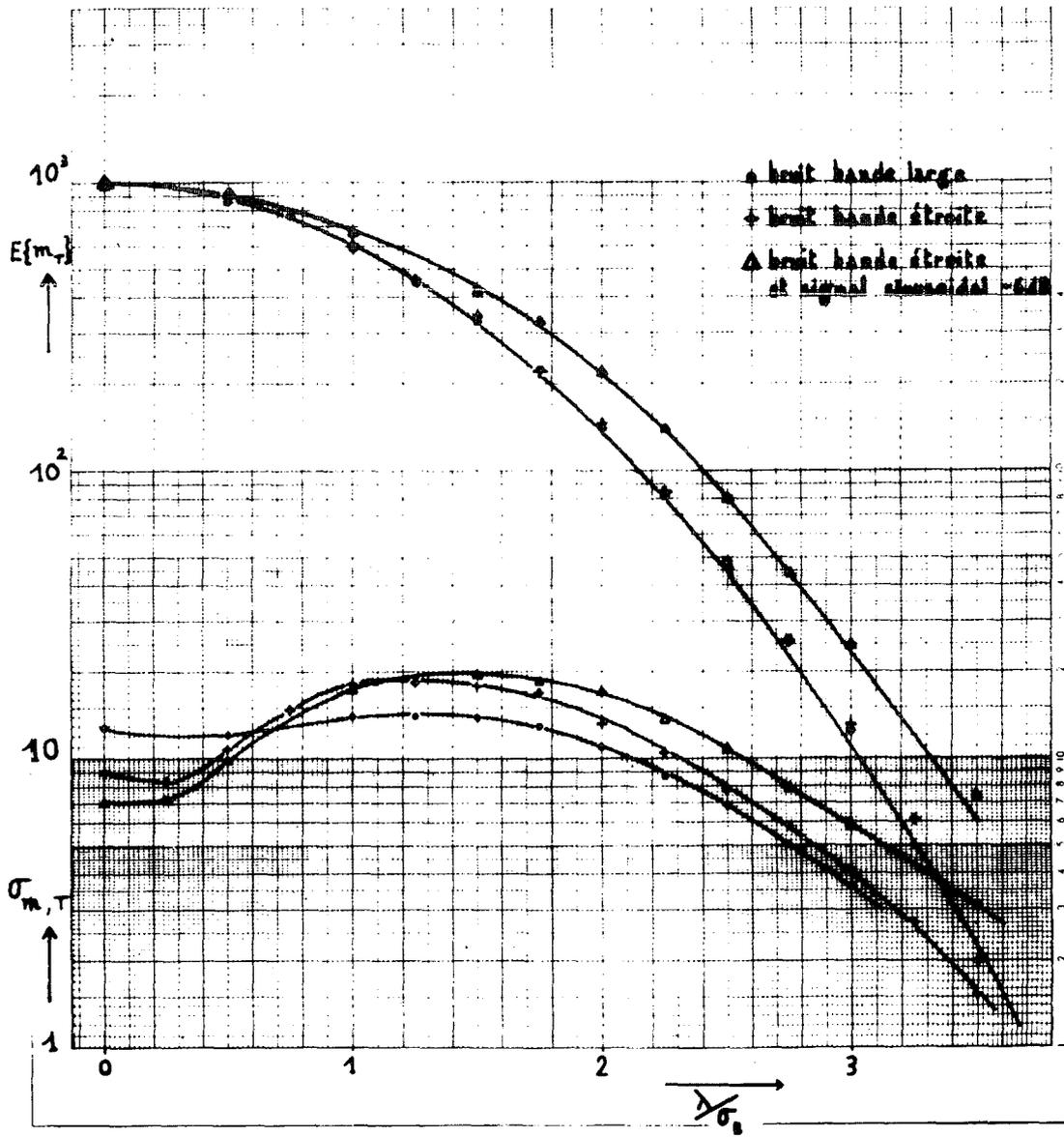


FIGURE 4

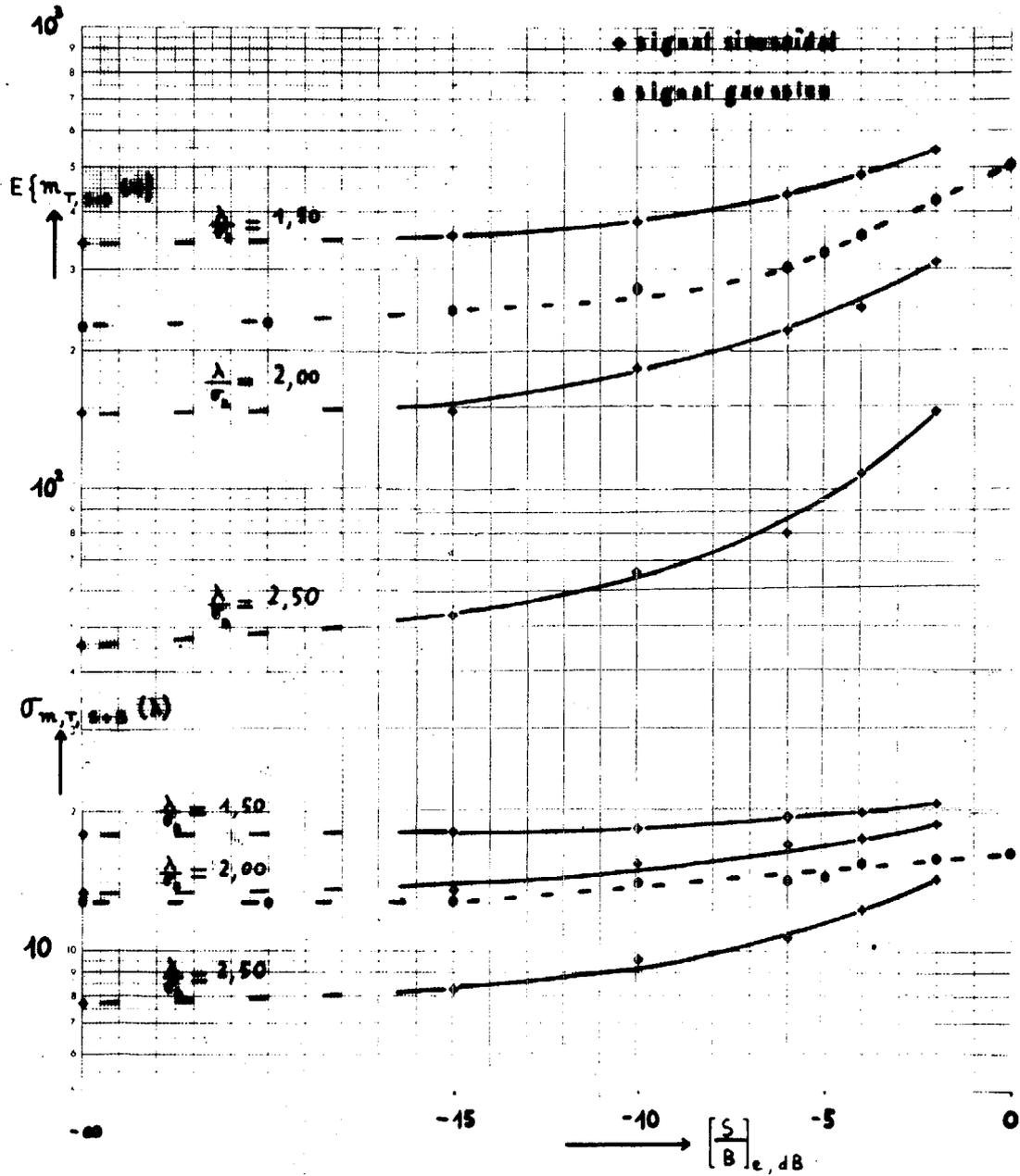


FIGURE 5

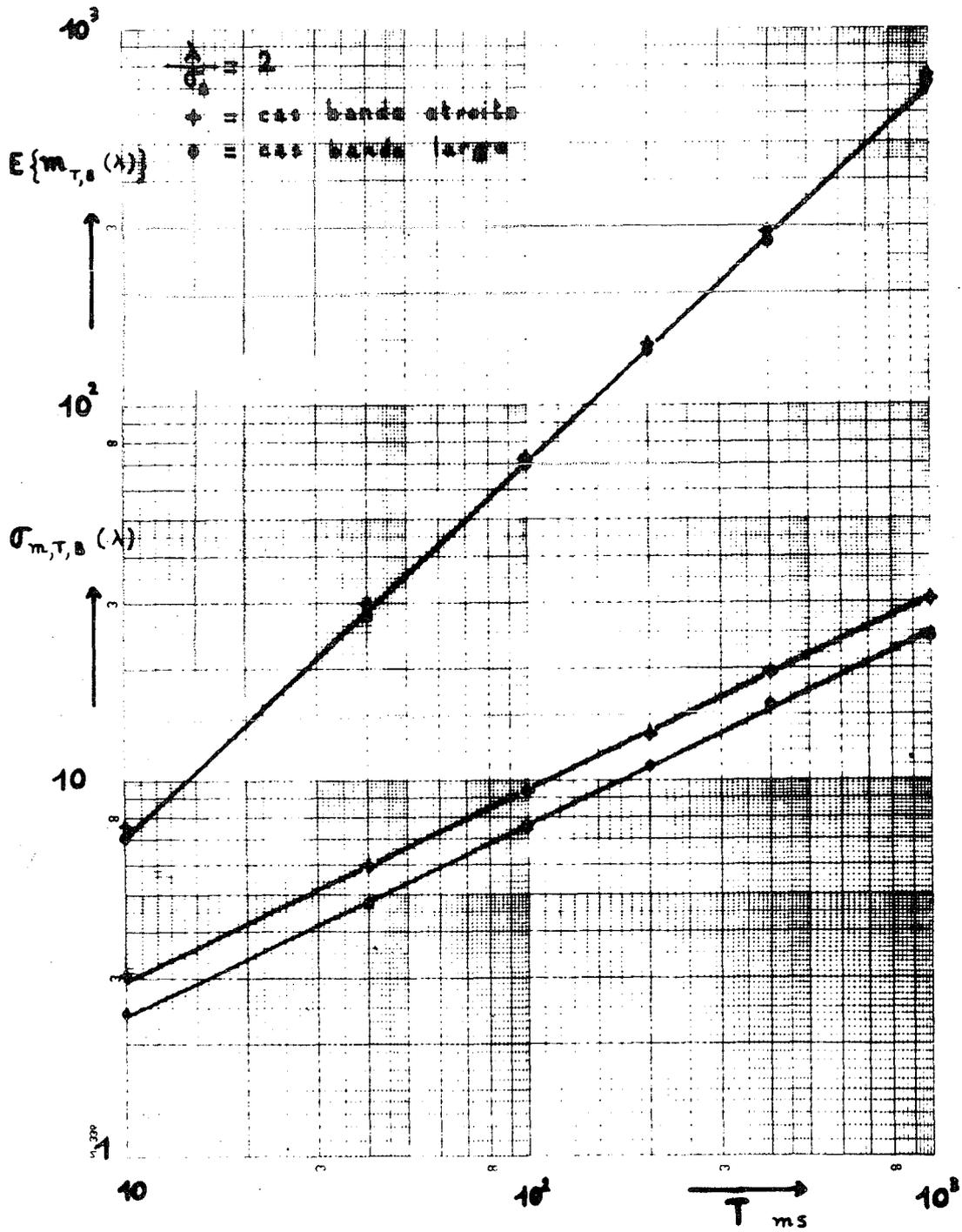


FIGURE 6



3. DETECTION DE SIGNAUX PAR COMPTAGE DE DEPASSEMENTS DE SEUIL

3.1. Rapport signal sur bruit de sortie

L'application des résultats précédents à la détection d'un signal dans un bruit stationnaire consiste à faire correspondre à la fonction d'entrée $X(t)$, la fonction $m_{T,X}(t;\lambda)$ du temps t , représentant le nombre de dépassements, dans $[t-T, t[$, du seuil λ par $X(t)$. Elle se présente sous forme d'une fonction en escalier, qui est ensuite comparée à un autre seuil de hauteur μ . On cherche à mettre en évidence la présence de signal par constatation d'une augmentation du nombre de dépassements d'un même seuil, éventuellement nul. Ceci se justifie intuitivement (pour un seuil suffisamment élevé) par l'augmentation de puissance due au signal.

On désigne par les indices B et S+B les fonctions "bruit seul" et "bruit et signal". Le "signal de sortie" correspondant à la présence de signal à l'entrée est constitué par la variation de la valeur moyenne de m due à la présence de signal. Le "bruit de sortie" est formé par les fluctuations des fonctions $m_{T,B}$ ou $m_{T,S+B}$. Le rapport signal sur bruit de sortie peut donc être défini, d'une manière analogue à celle de [8], comme rapport de ces deux quantités.

$$(8) \quad \left[\frac{S}{B} \right]_s = \frac{E \{ m_{T,S+B}(\lambda) \} - E \{ m_{T,B}(\lambda) \}}{\text{Sup} \{ \sigma_{m,T,B}(\lambda), \sigma_{m,T,S+B}(\lambda) \}}$$

Ce rapport est fonction de λ , de T et des fonctions d'entrée X_B et X_{S+B} et en particulier du rapport signal sur bruit d'entrée

$\left[\frac{S}{B} \right]_e$ défini par les formules (7).



Le signal n'est présent que sur des durées de temps T' et à des instants a priori inconnus de l'observateur. On en tiendra compte dans le choix de T et dans la réalisation d'une détection "presque continue". Mais les calculs théoriques ou les déterminations expérimentales des valeurs de $\left[\frac{S}{B}\right]_s$ en fonction des paramètres nécessiteront l'hypothèse de la stationnarité et de la connaissance sur des durées infinies (c'est-à-dire "longues" en pratique) des deux fonctions B et $S+B$.

A la fonction $m_{T,X}(t;\lambda)$ et au seuil μ , auquel elle est comparée, sont liés, outre $\left[\frac{S}{B}\right]_s$, les probabilités instantanées de fausse alarme et de détection. Ces dernières sont définies comme étant les probabilités de dépassement, à l'instant t , du seuil K par la fonction $m_{T,X}(t;\lambda)$, probabilités conditionnelles respectivement à l'absence et à la présence de signal à l'entrée.

3.2. Paramètres du système

Pour réaliser la détection d'une manière presque continue, on peut utiliser q compteurs, comptant chacun le nombre de dépassements du seuil λ pendant des durées T successives, les instants de début de comptage étant décalés d'un compteur au suivant de la durée de temps $\frac{T}{q}$. Le nombre q de compteurs et les caractéristiques du signal et du bruit étant supposés imposés, l'observateur dispose des deux paramètres T et λ et du seuil de hauteur μ pour assurer au mieux la détection.

Le temps de comptage T joue un rôle analogue à celui de l'intégration dans un système carré-intégration ; la durée T' du signal étant fixée, il faut choisir T par exemple de façon à rendre $\left[\frac{S}{B}\right]_s$ maximal. Le temps de comptage T peut alors être déterminé connaissant T' , q et la loi de variation de $\left[\frac{S}{B}\right]_s$ en fonction de T (voir annexe et § 3.4).



Expérimentalement on constate, d'après la figure 8 (voir § 3.3) que, pour T , T' et $\left[\frac{S}{B}\right]_e$ donnés, il semble exister une hauteur de seuil λ optimale, c'est-à-dire rendant le rapport signal sur bruit de sortie $\left[\frac{S}{B}\right]_s$ maximal. Intuitivement il apparaît, que dans certains cas λ ne doit pas être trop proche de zéro (cas où le nombre de "zéros" est sensiblement indépendant du signal faible éventuel) ni trop élevé (car il en résulterait un nombre de dépassements de seuil trop faible pour justifier des conclusions quant à la présence d'un signal).

Enfin, lorsque tous les autres paramètres sont fixés, on peut choisir la hauteur du seuil de sortie μ de façon à assurer, par exemple, une certaine probabilité instantanée de fausse alarme, ou un certain taux de fausses alarmes (nombre de fausses alarmes par unité de temps).

3.3. Performances du système

3.3.1. On envisagera essentiellement dans la suite les cas suivants de détection de signaux : bruit gaussien stationnaire à bande étroite et signal sinusoïdal (additifs) ; bruit à bande large et signal à bande large ou étroite, aléatoires, additifs, gaussiens, stationnaires. Ce système de détection peut évidemment être employé avec d'autres hypothèses, mais il conviendrait alors d'en examiner les performances. Le rapport signal sur bruit de sortie pourrait être calculé numériquement à l'ordinateur, en fonction des différents paramètres, à partir des formules théoriques du § 1. Mais des résultats expérimentaux du § 2, on peut déduire, en fonction des différents paramètres, des valeurs expérimentales du rapport signal sur bruit de sortie, ainsi que des probabilités instantanées de fausse alarme et de détection.



3.3.2. On a représenté les courbes du rapport signal sur bruit de sortie $\left[\frac{S}{B}\right]_S$, pour $T = 200$ ms :

Figure 7, en fonction de $\left[\frac{S}{B}\right]_e$, dans le cas à bande étroite et signal sinusoïdal ($\lambda = 1,50 \sigma_B$), dans le cas bruit à bande large et signal aléatoire à bande étroite ($\lambda = 1,75 \sigma_B$) et dans le cas bruit et signal aléatoire à bandes larges ($\lambda = 1,75 \sigma_B$);

Figure 8, en fonction de $\frac{\lambda}{\sigma_B}$, dans le cas à bande étroite et signal sinusoïdal ($\left[\frac{S}{B}\right]_e = -6$ dB) et dans le cas bruit et signal aléatoire à bandes larges ($\left[\frac{S}{B}\right]_e = -6$ dB, -3 dB, 0 dB).

Ces courbes sont déduites, par l'intermédiaire de la formule (8), des valeurs prises par les courbes "moyennes" déduites des valeurs expérimentales et représentées figures 4 et 5. En particulier, les courbes du cas "bruit et signal à bandes larges" sont déduites de la figure 4 de la façon suivante. Les quantités $E\{m_{T,B}(\lambda_1)\}$ et $\sigma_{m,T,B}(\lambda_1) = \left[E\{m_{T,B}^2(\lambda_1)\} - E^2\{m_{T,B}(\lambda_1)\} \right]^{1/2}$ (valeurs pour le bruit) sont les valeurs pour l'abscisse λ_1 , données par les courbes $E\{m\}$ et σ_m "à bande large" de la figure 4. Les quantités $E\{m_{T,S+B}(\lambda_1)\}$ et $\sigma_{m,T,S+B}(\lambda_1)$ (valeurs pour le cas signal plus bruit, de rapport signal sur bruit d'entrée $\left[\frac{S}{B}\right]_e = 10 \log R$) sont les valeurs $E\{m_{T,B}(\lambda_2)\}$ et $\sigma_{m,T,B}(\lambda_2)$ données par les mêmes courbes de la figure 4 pour l'abscisse λ_2 telle que :

$$(9) \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\sigma_{S+B}}{\sigma_B} = \sqrt{1+R}$$

Elles correspondent (par exemple) au cas d'un signal $S(t)$ et d'un bruit $B(t)$ aléatoires, stationnaires, centrés, gaussiens,

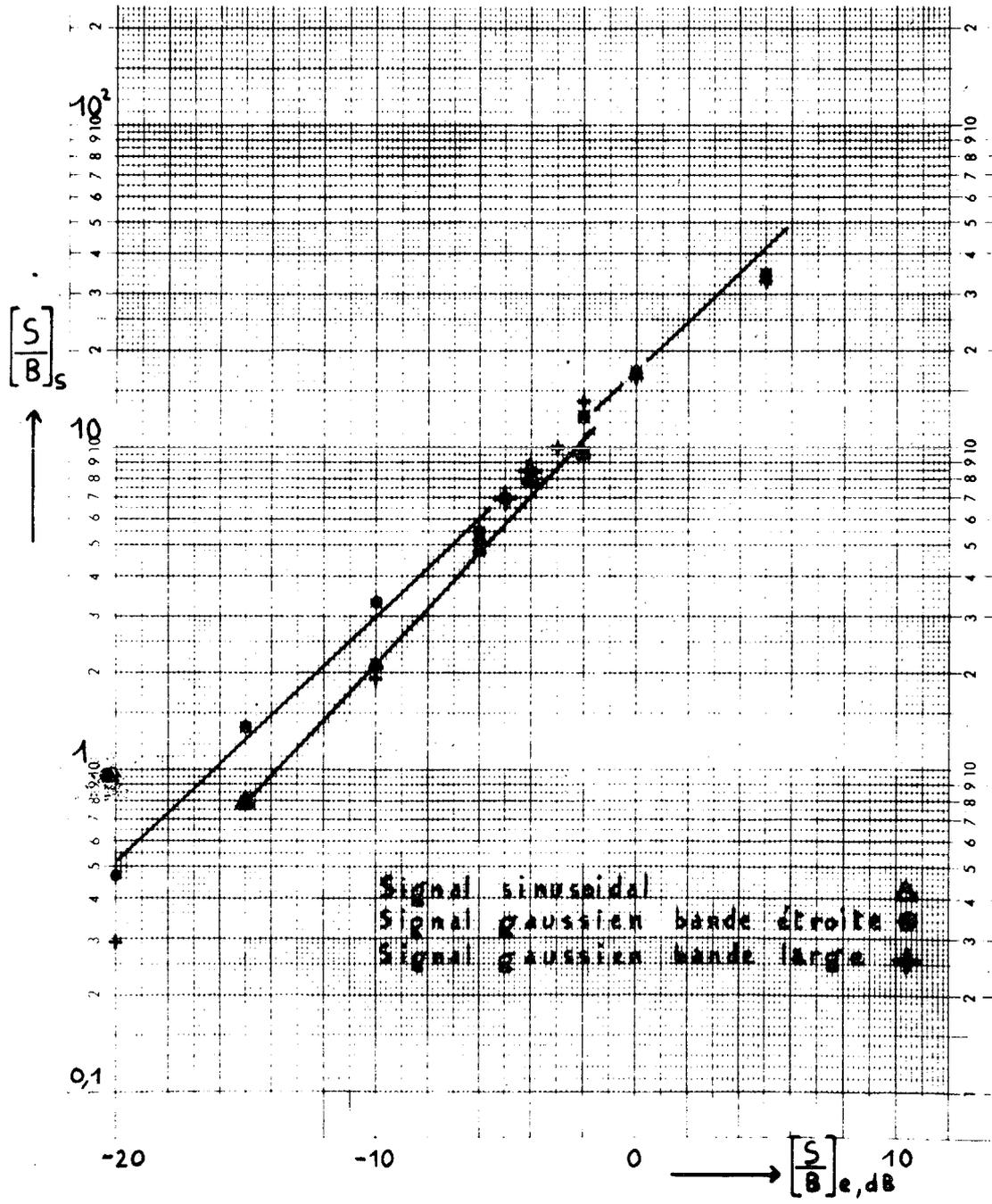


FIGURE 7

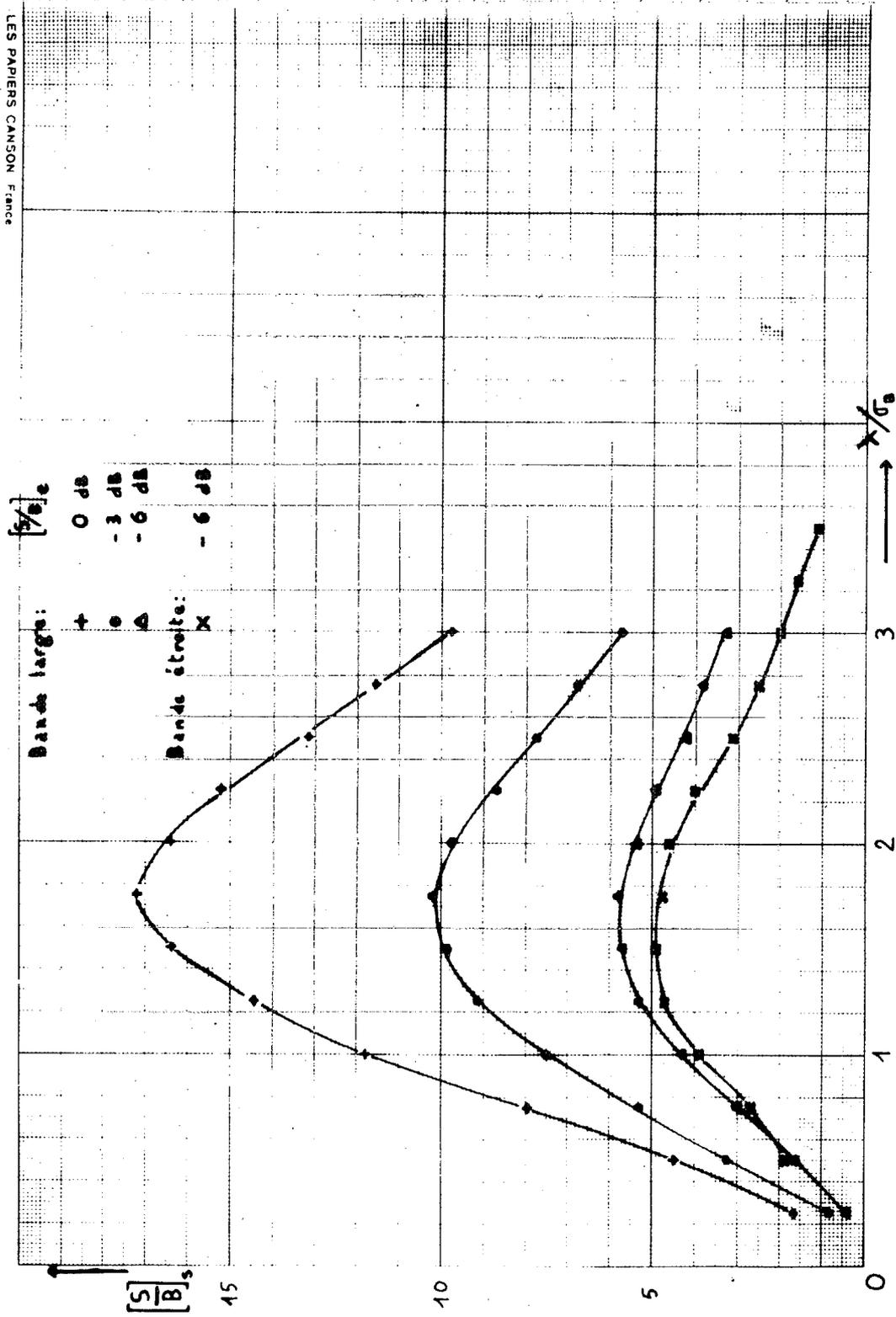


FIGURE 8



additifs et indépendants, de mêmes densités spectrales à un facteur multiplicatif $R = \sigma_S^2 / \sigma_B^2$ près. La fonction $B(t) + S(t)$ est alors aléatoire, stationnaire, gaussienne, de variance

$$\sigma_{S+B}^2 = \sigma_S^2 + \sigma_B^2 = \sigma_B^2(1+R)$$

et de même densité spectrale que le bruit à la constante multiplicative $(1+R) = \sigma_{S+B}^2 / \sigma_B^2$ près ; $B(t) + S(t)$ a donc mêmes propriétés statistiques que la fonction $\sqrt{1+R} B(t)$.

On constate figure 7 que pour $-15 \text{ dB} \leq \left[\frac{S}{B} \right]_e \text{ dB} \leq 0 \text{ dB}$, $\log \left[\frac{S}{B} \right]_s$ est, dans les conditions des expériences, une fonction approximativement linéaire de $\left[\frac{S}{B} \right]_e$ (en dB).

3.3.3. Le tableau suivant donne des valeurs des couples de probabilités instantanées de fausse alarme α et de détection β , dans le cas "à bande étroite" pour différentes valeurs du signal sinusoïdal d'entrée et du seuil λ et pour $T = 200 \text{ ms}$. Ces valeurs sont déduites des courbes analogues à celles de la figure 2 pour les valeurs de paramètres considérées, par l'intermédiaire des formules

Probabilité instantanée de fausse alarme : $\alpha(K) = \sum_{m>K} p_B(m)$

Probabilité instantanée de détection : $\beta(K) = \sum_{m>K} p_{S+B}(m)$

($p(m)$ distribution de probabilité du nombre moyen m de dépassements du seuil λ pendant la durée T).



$\left[\frac{S}{B} \right]_e$	$\frac{\lambda}{\sigma_B} = 1,50$		$\frac{\lambda}{\sigma_B} = 2,00$	
	$\alpha = 0,092$	$\alpha = 0,0086$	$\alpha = 0,094$	$\alpha = 0,0085$
- 6 dB	$\beta = 0,9998$	$\beta = 0,996$	$\beta = 0,9997$	$\beta = 0,995$
- 10 dB	$= 0,805$	$= 0,432$	$= 0,894$	$= 0,603$
- 15 dB	$\approx 0,298$	$= 0,059$	$= 0,117$	$= 0,012$

3.3.4. Le montage de la figure 1 a été utilisé pour étudier la fonction $m_{T,X}(t;\lambda)$ dans le cas de bruits et signaux réels¹¹, enregistrés sur bande magnétique. On a obtenu en particulier, figure 9, le réseau de courbes $m_T(t_K;\lambda)$ en fonction de $t_K = t_0 + KT$, pour $T = 1$ s et pour λ tel que $\lambda/\sqrt{2}\sigma_B$ varie de 10 à 100 avec un pas de 10. Le signal est constitué par un bruit de puissance croissante dans le temps et présent 2 secondes toutes les 5 secondes. Le bruit et le signal sont à bande étroite autour d'une fréquence centrale élevée (différente de celle des expériences précédentes).

3.4 Choix des paramètres λ et T

On constate sur les courbes de la figure 8 que, dans les conditions expérimentales envisagées, le rapport signal sur bruit de sortie est maximal pour un seuil de hauteur λ de l'ordre de $1,75 \sigma_B$, où σ_B est l'écart-type de la fonction bruit à l'entrée du seuil.

Pour des durées T de comptage suffisantes, décalées, l'une par rapport à la suivante de T/q (q compteurs) et une durée de signal T' , on déduit des courbes de la figure 6 que le rapport signal sur bruit de sortie est une fonction de T de la forme :



FIGURE 9



$$(10) \quad \left[\frac{S}{B} \right]_s = K \frac{E\{\sup(T \cap T')\}}{T^{1/2}}$$

où K est indépendant de T et de T' . On appelle $\sup(T \cap T')$ la plus grande durée de recouvrement d'une durée T' débutant à un instant aléatoire avec l'une des plages de comptage T . Pour T' et q donnés, on peut choisir T tel que : $\frac{E\{\sup(T \cap T')\}}{T^{1/2}}$ soit maximal ; ce qui conduit, en supposant l'instant d'arrivée du signal aléatoire par rapport aux dates de début de comptage et équiréparti sur un intervalle d'amplitude $\frac{T}{q}$ à :

$$(11) \quad \begin{cases} T = \frac{3T'}{4} & \text{si } q = 1 \\ T = \frac{T'q}{(q-1)^2} \left[2\sqrt{q^2 - q + 1} - (1+q) \right] & \text{si } q > 1 \end{cases}$$

(voir annexe).



4. REALISATION D'UN DETECTEUR PAR COMPTAGE DE DEPASSEMENTS DE SEUIL

On déduit aisément du montage expérimental de la figure 1 une réalisation possible d'un détecteur par comptage de dépassements d'un seuil, donnant une "détection presque continue" (figure 10). Des montages réalisant une détection par comptage de zéros ont déjà été proposés, en particulier par A. Raynal [11,12] .

L'étage d'entrée est constitué d'un filtre passe-bande réglable. La bande passante choisie sera celle occupée par le signal (détection passive) ou la bande Doppler (détection active). Le filtre est suivi d'un contrôle automatique de gain à constante de temps grande devant la durée possible T' du signal et normalisant la puissance moyenne du bruit d'entrée.

L'étage suivant est constitué par un système de p appareils à seuils de hauteurs réglables λ_i , attaqués chacun par la fonction de sortie du C.A.G. On dispose donc de p voies sur chacune desquelles est présente une suite d'impulsions correspondant à la suite des franchissements ascendants du seuil λ_i par la fonction d'entrée du seuil.

Chacune des p voies attaque simultanément q compteurs, comptant sur des durées successives T , et dont les instants de début de comptage sont décalés de $T(1+\epsilon)/q$ d'un compteur au suivant. Chaque compteur délivre son information pendant la durée $T\epsilon$ fixe succédant à chaque période de comptage T .

Sur la sortie d'un compteur on obtient des informations numériques séparées par des durées T et représentant le nombre de dépassements d'un seuil λ_i pendant des durées T séparées de $T\epsilon$.

Les q compteurs d'une même voie i sont réunis à une même sortie sur laquelle est présent l'ensemble des q suites d'informations numériques emboîtées.



Les p sorties précédentes, éventuellement décodées, sont reliées à un ou plusieurs organes de sortie tels que par exemple un seuil de hauteur μ_i suivi d'un circuit de décision, ou un enregistreur.

En détection d'un signal aléatoire gaussien ou d'un signal sinusoïdal dans un bruit gaussien, T' étant la durée du signal supposée connue et σ_B désignant l'écart-type de la fonction bruit à la sortie du C.A.G., on pourra prendre les p valeurs de λ_i réparties sur et autour de la valeur $1,75 \sigma_B$, et la valeur de T donnée par les formules (11) c'est-à-dire une valeur comprise entre $\frac{T'q}{q+1}$ et T' .

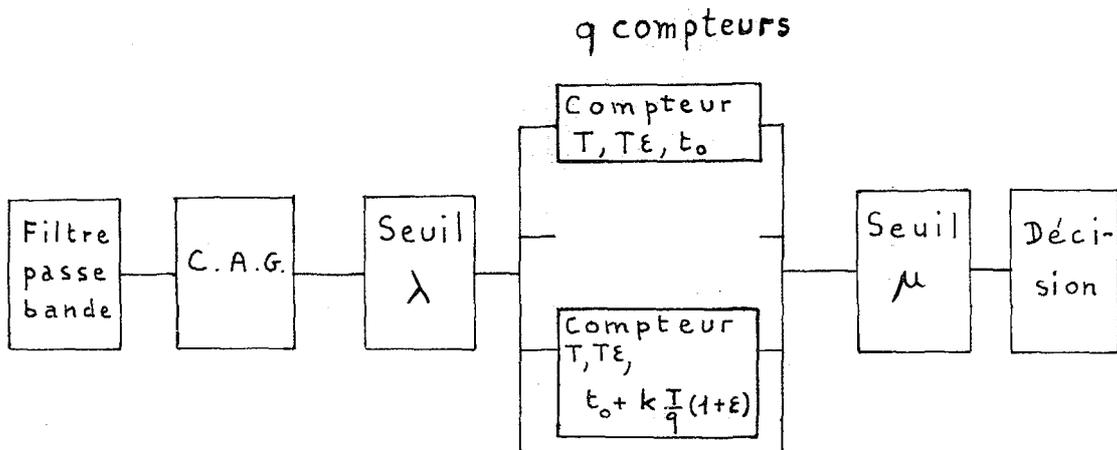


FIGURE 10

En cas de non stationnarité lente (devant T) du bruit, le C.A.G. peut être remplacé selon une méthode préconisée par Tuteur [13,14] par une comparaison entre les nombres de dépassements sur $[t-T, t[$ et sur $[t-NT, t[$ où N est un entier positif. Il faut alors également prévoir le comptage sur la durée NT de manière "presque continue" à l'aide de plusieurs compteurs dont les origines de comptage sont décalées.

L'étude théorique et expérimentale d'un tel système est actuellement poursuivie.

5. ANNEXE AU § 3.4

T' étant donné, il faut choisir T de façon à ce que $\left[\frac{S}{B} \right]_s$ c'est-à-dire la quantité $\frac{E\{\sup(T \cap T')\}}{T^{1/2}}$ soit maximale.

L'instant d'arrivée a du signal de durée T' est aléatoire par rapport aux dates de début de comptage, et supposé uniformément réparti sur une durée $\frac{T}{q}$. En raison de l'hypothèse de q compteurs, décalés de l'un à l'autre de $\frac{T}{q}$, le problème est en effet périodique, de période $\frac{T}{q}$. Le $\sup(T \cap T')$ est donc à rechercher sur les deux durées T débutant aux deux extrémités de la période $\frac{T}{q}$ considérée. En supposant $0 \leq a \leq \frac{T}{q}$ on a :

$$\sup(T \cap T') = \sup \left\{ \inf(T', T-a), \inf\left(a+T' - \frac{T}{q}, T\right) \right\}$$

Or :

$$\begin{aligned} \inf(T', T-a) &= T-a && \text{si } T \leq T' \text{ et } \forall a \\ & && \text{ou si } T' \leq T \leq T' \frac{q}{q-1} \text{ et } T-T' \leq a \leq \frac{T}{q} \\ &= T' && \text{si } T' \leq T \leq T' \frac{q}{q-1} \text{ et } 0 \leq a \leq T-T' \end{aligned}$$

$$\text{ou si } T' \frac{q}{q-1} \leq T \text{ et } \forall a$$

$$\inf\left(a+T' - \frac{T}{q}, T\right) = T \quad \text{si } T \leq T' \frac{q}{q+1} \text{ et } \forall a$$

$$\text{ou si } \frac{q}{q+1} T' \leq T \leq T' \text{ et } T \frac{q+1}{q} - T' \leq a \leq \frac{T}{q}$$

$$= a + T' - \frac{T}{q} \text{ si } \frac{q}{q+1} T' \leq T \leq T' \text{ et}$$

$$0 \leq a \leq T \frac{q+1}{q} - T'$$

$$\text{ou si } T' \leq T \text{ et } \forall a$$



Et donc :

$$\text{si } 0 \leq T \leq \frac{q}{q+1} T', \quad \sup(T \cap T') = T$$

$$\text{si } \frac{q}{q+1} T' \leq T \leq T',$$

$$\text{si } 0 \leq a \leq \frac{T+q(T-T')}{2q}, \quad \sup(T \cap T') = T - a$$

$$\text{si } \frac{T+q(T-T')}{2q} \leq a \leq \frac{T+q(T-T')}{q}, \quad \sup(T \cap T') = a+T' - \frac{T}{q}$$

$$\text{si } \frac{T+q(T-T')}{q} \leq a \leq \frac{T}{q}, \quad \sup(T \cap T') = T$$

$$\text{si } T' \leq T \leq T' \frac{q}{q-1}$$

$$\text{si } 0 \leq a \leq T-T' \quad \sup(T \cap T') = T'$$

$$\text{si } T-T' \leq a \leq \frac{T+q(T-T')}{2q} \quad \sup(T \cap T') = T - a$$

$$\text{si } \frac{T+q(T-T')}{2q} \leq a \leq \frac{T}{q} \quad \sup(T \cap T') = a+T' - \frac{T}{q}$$

$$\text{si } T' \frac{q}{q-1} \leq T \quad \sup(T \cap T') = T'$$

L'expression :

$$\frac{1}{T^{1/2}} E \{ \sup(T \cap T') \} = \frac{1}{T^{1/2}} \int_0^q \frac{T}{q} \sup \{ T \cap T' \} da$$

permet donc d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{T^{1/2}} E \{ \sup(T \cap T') \} &= T^{1/2} \quad \text{si } 0 \leq T \leq \frac{q}{q+1} T' \\ &= \frac{1}{2} T^{1/2} \left[\left(1 - \frac{1}{2q} - \frac{q}{2}\right) + \frac{T'}{T} (1+q) - \frac{q}{2} \frac{T'^2}{T^2} \right] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & \text{si } \frac{q}{q+1} T' \leq T \leq \frac{q}{q-1} T' \\
 & = \frac{T'}{T^{1/2}} \qquad \text{si } \frac{q}{q-1} T' \leq T
 \end{aligned}$$

Pour $\frac{q}{q+1} T' \leq T \leq \frac{q}{q-1} T'$, on a donc :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{T^{1/2}} E \{ \sup(T \cap T') \} \right] = \frac{1}{8qT^{5/2}} \left[T^2(2q-1-q^2) - TT'2q(1+q) + 3q^2T'^2 \right]$$

quantité positive entre les racines en T qui sont de signes contraires. D'où la valeur de T maximalisant le rapport signal sur bruit de sortie :

$$(11) \quad \begin{cases} T_{\text{opt}} = \frac{3T'}{4} & \text{si } q = 1 \\ T_{\text{opt}} = \frac{T'q}{(q-1)^2} \left[2\sqrt{q^2 - q + 1} - (1+q) \right] & \text{si } q > 1 \end{cases}$$

On a en particulier :

$$(12) \quad \frac{qT'}{q+1} < T_{\text{opt}} < T'$$



BIBLIOGRAPHIE

- [1] MIDDLETON D. - An introduction to statistical communication Theory. - McGraw Hill, New York, 1960.
- [2] STEINBERG H., SCHULTHEISS P.M., WOGGIN C.A., ZWEIG F. : Short-time Frequency Measurements of Narrow-Band Random Signals by means of a Zero Counting Process. - Journal of Applied Physics, Vol. 26, N° 2, Feb. 1955.
- [3] MILLER I., FREUND J.E. - Some Results on the Analysis of Random Signals by Means of a Cut Counting Process. - Journal of Applied Physics, Vol. 27, N° 11, Nov. 1956.
- [4] RICE S.O. - Statistical Properties of sine wave plus Random Noise. - Bell System Technical Journal, Vol. 27, Mar 1948, p. 109-157.
- [5] MIDDLETON D. - Spurious Signals caused by Noise in triggered Circuits. - Journal of Applied Physics, Vol. 19, N° 9, September 1948, p. 817.
- [6] COBB S.M. - The distribution of intervals between zero crossings of sine wave plus random noise and allied topics. - IEEE Trans. on Information Theory, Vol. IT 11, n° 2, Apr. 1965, p. 220.
- [7] BLANC-LAPIERRE A. - Méthodes statistiques pour l'étude de phénomènes de fluctuations. - Masson et Cie, Paris, 1963.
- [8] BLANC-LAPIERRE A., PICINBONO B. - Propriétés statistiques du bruit de fond. - Masson et Cie, Paris, 1961.
- [9] ARQUES P.Y. - Etude de systèmes de détection de signaux par traitement quadratique généralisé et de certaines de leurs propriétés statistiques de sortie - Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques, Grenoble 1966, Centre de Documentation du C.N.R.S. : A.O. 1015.
- [10] ARQUES P.Y. - Etude expérimentale de certaines propriétés statistiques des dépassements d'un seuil par une fonction aléatoire. - Onde Electrique, n° 475, Oct. 1966, p. 1051-1056.
- [11] RAYNAL A.J. - Zero-crossing principle for detecting narrow-band signals. - IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement, Vol. IM 15, March June 1966, p. 38-43.
- [12] RAYNAL A.J. - Another zero-crossing principle for detecting narrow-band signals. - IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement, Vol. IM 16, June 1967, p. 134-138.
- [13] TUTEUR F.B. - On the detection of transiting broadband targets in noise of uncertain level. - IEEE Trans. Commun. Technol., COM 15, Feb. 1967, p. 61-69.
- [14] TUTEUR F.B. - On the detection of a moving noise source in a nonstationary noise background. - J.A.S.A., Vol. 44 N° 4, Oct. 1968, p. 912-918.