



DEUXIÈME COLLOQUE
SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL
ET SES APPLICATIONS
NICE - 5 AU 10 MAI 1969

14/1

IMMERSIONS OPTIMALES DE LA CIBLE
ET DE LA SOURCE EN DETECTION SONAR

Monsieur Maurice BRESSON

Ingénieur en Chef
Société AERO
PARIS

On a cherché à définir des stratégies d'immersion au sens de la théorie des jeux pour le sonar qui désire augmenter sa portée et le sous-marin qui désire la réduire.

L'analyse numérique effectuée sur un échantillon assez important de bathys atlantiques montre que dans la grande majorité des cas il existe un "point selle", c'est-à-dire une stratégie optimale pour les deux parties se réduisant à une tactique pure (couple d'immersions).

Une démarche à la fois mathématique et heuristique permet de confirmer ces résultats remarquables.

An attempt has been made to define immersion strategies, conforming to game theory, for the sonar who wants to increase its range and for the submarine who wants to decrease it.

The numerical analysis of a relatively important sample of Atlantic bathys shows that in a large majority of cases a Saddle-Point, i.e. an optimal "pure tactics" for both parties does exist (a couple of optimal immersions).

These remarkable results have been justified by a heuristic and formal mathematical reasoning.



DEUXIÈME COLLOQUE
SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL
ET SES APPLICATIONS
NICE - 5 AU 10 MAI 1969

14/3

IMMERSIONS OPTIMALES DE LA CIBLE
ET DE LA SOURCE EN DETECTION SONAR

Monsieur Maurice BRESSON

Ingénieur en Chef
Société AERO
PARIS

1.- POSITION DU PROBLEME

L'exposé a pour but de jeter les bases d'un langage commun permettant de définir la portée désirable d'un sonar encore au stade de la conception.

Les Autorités navales qui devront mettre en oeuvre l'appareil une fois construit, souhaitent naturellement appréhender les performances du sonar au moyen d'un nombre de paramètres conditionnant son emploi tactique, aussi petit que possible. L'idéal serait de pouvoir caractériser un sonar donné par un nombre unique que l'on pourrait considérer par exemple comme sa portée efficace. L'avantage d'une telle notion synthétique est évident : cohérence avec les définitions similaires pour les armes du S.M. et les armes ASM, géométrisation des problèmes de dispositifs tactiques, simplification de l'étude cinématique des processus de pénétration et d'évasion du S.M. adverse, etc.

Les constructeurs de sonar savent combien ce phénomène hautement capricieux qu'est la détection et la classification d'un objet immergé dans les profondeurs océaniques varie conditionnellement non seulement avec la conception du sonar, mais encore avec le milieu et le comportement même de l'objet recherché.

La définition de la portée d'un sonar est déjà délicate avec les sonars de coques classiques.



Les possibilités d'immersion profonde des sonars pouvant atteindre la profondeur critique, introduisent un degré de liberté supplémentaire relativement aux sonars de coques ou même relativement aux sonars remorqués à faible immersion.

Pour compliquer encore le problème, les immersions maximales des S.M. actuels peuvent être multipliées dans un avenir assez proche par un facteur de 2 ou 3 ou même davantage. Heureusement, la situation est peut-être moins sombre qu'elle ne paraît au premier examen.

L'immersion profonde d'un sonar puissant avec un traitement du signal suffisamment élaboré, aura pour effet de procurer, non seulement des portées de détection importantes, mais encore une bien plus grande stabilité des résultats du processus de détection.

Nous allons montrer que la théorie des jeux nous offre un outil permettant de préciser cette notion de stabilité.

Bien entendu, il existe rarement un outil conceptuel miraculeux permettant à lui seul d'éclairer de façon définitive un phénomène complexe.

La méthode que nous proposons trouve son principal domaine d'application dans les perspectives qui nous sont offertes, à la fois par les développements technologiques prévisibles des sonars et par l'accroissement des performances des S.M. :

- . augmentation de l'immersion maximale des S.M. ;
- . possibilité pour le sonar d'atteindre l'immersion critique ou tout au moins de grandes profondeurs ;
- . augmentation du facteur de mérite du sonar ;



- . connaissance quantitative de plus en plus complète des conditions de propagation ;
- . connaissance plus précise (au moins théorique) des indices de réflexion des objectifs possibles.

2.- DEFINITION CONDITIONNELLE DE LA PORTEE D'UN SONAR

La définition que nous proposons repose sur la notion de seuil d'atténuation exprimé en décibels.

Pour un champ sonore donné, représenté graphiquement au moyen de courbes d'iso-atténuation, la portée R_0 du sonar immergé à une profondeur z_c contre un S.M. situé à la profondeur z_s , est donnée par l'abscisse du point M (portée horizontale repérée sur l'axe OR_0 de la figure 1). Ce point M est l'intersection de la droite horizontale d'équation $z_s = \text{constante}$, avec la courbe représentative du seuil d'atténuation A située dans le plan vertical $OR_0 z_s$. Suivant cette définition, lorsque le seuil a été fixé, et pour chaque bathycélérogramme, la portée R_0 est fonction des deux variables indépendantes z_c et z_s :

$$R_0 = f(z_c, z_s / A_{dB} ; \text{ bathy donnée}).$$

Cette définition n'est pas exhaustive et n'inclut pas explicitement nombre de facteurs qui peuvent influencer la portée pratique de détection. Elle a l'avantage de la simplicité et permet d'exprimer un ordre de grandeur pour les portées pratiques. Elle correspond en fait à l'équation élémentaire du sonar. Par exemple, avec un sonar ayant un facteur de mérite de 185 dB contre un objectif d'index de réflexion moyen τ de 15 dB, le seuil d'affaiblissement serait de $A = \frac{F_M + T}{2} = \frac{185 + 15}{2} = 100$ dB.

Cette première approximation prend tout son intérêt pratique au niveau de la conception d'un sonar lorsque l'on cherche à comparer les performances de différents systèmes ou variantes de systèmes.



Toutefois, cette définition simple peut présenter des ambiguïtés lorsque la droite horizontale d'équation $z_s = Cote$, rencontre la courbe d'iso-atténuation en plusieurs points, ce qui est le cas lorsqu'il existe des zones de convergence et également lorsqu'il apparaît une zone d'ombre centrée autour de l'axe vertical Oz_s .

Donc, dans le cas général, pour z_c et z_s fixés, on aura une séquence de portées croissantes qu'il conviendra de préciser en indiquant les valeurs de R_{D_i} et $R_{D_{i+1}}$ (la zone comprise entre R_{D_i} et $R_{D_{i+1}}$, étant éclairée par le sonar). Dans la suite de l'exposé, on considère seulement la portée R_D correspondant à la première zone de détection à partir de l'axe vertical passant par le sonar et en négligeant la zone d'ombre autour de celui-ci, lorsqu'elle existe.

Bien entendu, des calculs, un peu plus complexes, pourraient être repris en introduisant zones de convergence et zones d'ombre.

En résumé, si l'on se limite à la première zone bornée par un seuil d'atténuation de A_{DB} , la portée R_D est une fonction sans ambiguïté des deux immersions z_c et z_s .

Il est clair que le sonar recherchera la portée maximum en effectuant un choix optimum pour son immersion tandis que le sous-marin tentera de minimiser cette portée par un choix opportun de sa propre immersion, compte tenu de contraintes résultant par exemple de sa mission.

3.- COMPORTEMENT DE "C" ET DE "S" POUR LE CHOIX INITIAL DE LEURS IMMERSIONS

(Désignons par "C" et "S" le sonar et le sous-marin respectivement).



Les considérations précédentes conduisent naturellement à un concept de "jeu" (1).

Pour chaque choix effectué séparément par "C" et "S", il existe un résultat $R_o = f(z_c, z_s)$ qui est le "paiement" ou le "retour" de ces choix suivant la terminologie des jeux.

C'est un jeu continu à deux joueurs qui peut être considéré comme à somme nulle en prenant précisément la portée de détection comme valeur de l'enjeu. Ce que l'un perd est exactement gagné par l'autre. Toutefois, pour des raisons de calcul pratique, nous proposons de traiter ce jeu continu au moyen d'une approximation discrète, c'est-à-dire de le considérer comme un jeu matriciel. Au lieu de tenir compte de tous les valeurs possibles de z_c et z_s , on se contentera de prendre une suite de valeurs distinctes suffisamment serrées pour obtenir une bonne approximation (2).

En suivant cette méthode, chaque lot de figures d'un album de champ sonore correspondant à une région océanique et à une saison données est transformé en un ensemble de matrices, dans lequel toute matrice caractérise une bathy donnée. Chaque valeur de l'immersion de "C" fournit une ligne de la matrice (Cf. fig. 2).

(1) Expression regrettable lorsqu'il ne s'agit pas de jeux de hasard ou de jeux de société mais de situations de conflit, militaires ou économiques. Elle fait malheureusement partie du vocabulaire scientifique et il semble difficile d'introduire maintenant une nouvelle terminologie.

(2) Ceci est presque une obligation lorsque les albums de champs sonores fournis par un calculateur numérique sont donnés pour une gamme discrète d'immersions z_c .



Pour chaque milieu bathythermique donné, si "C" choisit une immersion \mathcal{Z}_{c_i} et si "S" choisit une immersion \mathcal{Z}_{s_j} , la portée de détection sera $R_{D_{ij}}$ pour le seuil d'atténuation retenu.

4.- RESOLUTION DES "JEUX"

4.1 Choix d'un critère

La résolution pratique des jeux ainsi définis exige tout d'abord le choix d'un critère. Les critères les plus usités sont ceux de WALD - Von NEUMANN, de SAVAGE, de HURWICZ, de LAPLACE, du MINI-MAX, etc.

On ne connaît pas à l'heure actuelle de critère universel, préférable à tout autre en toutes circonstances (Cf. MILNOR. Réf. 1).

Nous adopterons le critère de WALD - Von NEUMANN qui est un des plus usités en raison de sa consistance logique et pour sa valeur pratique. Il consiste à rechercher le maximum du minimum de l'espérance mathématique de gain (ou gain moyen), quelle que soit la stratégie employée par l'adversaire.

Un des inconvénients du critère de WALD est que le gain moyen garanti peut, dans certains cas, être approché seulement au bout d'un grand nombre de parties jouées dans des conditions similaires. Il est donc souvent délicat de faire appel au critère de WALD pour un jeu tactique ou stratégique qui ne doit se jouer qu'une fois dans des circonstances données.

Par contre, pour le problème qui nous préoccupe, au niveau de la conception d'un système d'armes, alors que l'on s'efforce d'imaginer les familles de situations dans lesquelles le système projeté devra être en mesure de remplir les missions que l'on attend de lui, la prévision statistique de ses performances espérées a une valeur pratique incontestable.



4.2 Résultats obtenus

La résolution numérique d'un jeu matriciel suivant le critère de WALD - Von NEUMANN est trop classique pour que nous la rappelions ici. (Cf. par exemple MCKINSEY, LUCE et RAIFFA, DRESHER, etc. Cf. références 2, 3, 4). De chaque matrice $[R_{D_i, j}]$ on tirera donc :

- 1°) une valeur R_D^* , ou valeur du jeu ;
- 2°) une stratégie optimale $\varphi(p_c)$ pour le sonar "C", exprimée comme une densité de probabilité sur β_c (profondeur d'immersion) avec $0 \leq \beta_c \leq \beta_{cM}$;
- 3°) une stratégie optimale $\psi(q_s)$ pour le sous-marin "S" exprimée comme une densité de probabilité β_s (profondeur d'immersion) avec $0 \leq \beta_s \leq \beta_{sM}$.

Il convient de souligner que ces résultats ne sont valables que pour un seuil d'atténuation donné et pour une bathy donnée.

Pour de telles conditions, le comportement optimal du sonar consiste à jouer de façon aléatoire son immersion suivant la loi obtenue en résolvant le jeu, c'est-à-dire chaque immersion β_{c_i} avec la probabilité p_{c_i} , élément du vecteur :

$$\varphi(p_c) = (p_{c_1}, p_{c_2}, \dots, p_{c_i}, \dots, p_{c_m}), \text{ avec } p_{c_i} \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^m p_{c_i} = 1$$

De même, le comportement optimal du sous-marin consiste à jouer de façon aléatoire son immersion suivant un vecteur :

$$\psi(q_s) = (q_{s_1}, q_{s_2}, \dots, q_{s_j}, \dots, q_{s_m}), \text{ avec } q_{s_j} \geq 0 \text{ et } \sum_{j=1}^m q_{s_j} = 1$$

Le nombre R_D^* est la valeur vers laquelle converge inexorablement le résultat moyen du jeu lorsque les deux adversaires agissent de façon optimale au cours d'une séquence d'engagements se déroulant dans des conditions similaires.



Nous adopterons cette valeur de R_D^*
(exprimée en km ou en nautiques) comme portée du
sonar pour un seuil d'atténuation et une bathy
fixés.

5.- EXPLOITATION DES RESULTATS

Le seuil d'atténuation dépend lui-même du facteur de mérite F_M du sonar et de l'indice de réflexion de l'objectif recherché. Nous indiquons plus loin qu'il est possible de traiter les variations de l'indice en fonction du comportement du S.M. lorsqu'on raffine l'analyse du problème. Supposons pour l'instant que l'on puisse donner un sens à l'expression indice moyen de réflexion du but. La matrice de chaque jeu $[R_{D_i}]$ est alors parfaitement définie lorsqu'on connaît le facteur de mérite du sonar, son immersion extrême, le bathycélérogramme de la zone océanique dans laquelle il doit opérer, la profondeur maximale d'immersion du sous-marin.

Supposons maintenant que les autorités ayant pour mission de concevoir les bâtiments porteurs du sonar projeté et d'étudier les théâtres d'opérations où ceux-ci seront engagés, puissent définir un échantillon significatif de conditions bathythermiques.

Plus précisément, si les Autorités navales sont en mesure d'affecter une certaine pondération (ou valeur relative) à chacun des bathycélérogrammes retenus, on peut alors dégager des résultats très synthétiques.

Posons : $v_1, v_2, \dots, v_k, \dots, v_K$
 avec $v_k \geq 0$ et $\sum_{k=1}^K v_k = 1$ les valeurs attribuées à chacune des K bathy. choisies, suivant des critères tactiques ou stratégiques par exemple.

Pour l'ensemble des théâtres d'opérations considérés et pour un facteur de mérite F_M donné, on obtient une distribution des rayons de détection: $(R_{D_1}^*, R_{D_2}^*, \dots, R_{D_k}^*, R_{D_K}^*)$, dont la valeur moyenne (pondérée par les niveaux d'intérêt):

$$\bar{R}_D = \sum_{k=1}^K v_k R_{D_k}^*$$



fournit une utile indication sur l'efficacité globale d'un sonar de facteur de mérite F_M , destiné à être employé dans un ensemble donné de zones océaniques et de saisons.

Bien entendu, cette moyenne ne saurait être utilisée pour résoudre un problème tactique particulier et l'on ne doit pas perdre de vue les autres grandeurs typiques de la distribution, telles que les valeurs extrêmes de $\mathcal{R}_{D_R}^*$.

La pondération au moyen des valeurs v_R permet de définir une combinaison linéaire convexe des stratégies optimales $\mathcal{P}_R(\rho_c)$ du sonar, s'exprimant comme la distribution d'un mélange d'aléas :

$$\Phi(\rho_c) = \left(\sum_{R=1}^K v_R \rho_{c_1}^R, \sum_{R=1}^K v_R \rho_{c_2}^R, \dots, \sum_{R=1}^K v_R \rho_{c_i}^R, \dots, \sum_{R=1}^K v_R \rho_{c_m}^R \right)$$

avec :

$$v_R \rho_{c_i}^R \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{R=1}^K \sum_{i=1}^m v_R \rho_{c_i}^R = 1$$

Dans cette formule, chaque probabilité $\left(\sum_{R=1}^K v_R \rho_{c_i}^R \right)$ est associée à l'immersion ρ_{c_i} du sonar comme le montre la figure 3.

On obtient de même la distribution des immersions optimales pour le sous-marin dans les zones océaniques considérées et contre le sonar de facteur de mérite F_M . Soit :

$$\Psi(q_s) = \left(\sum_{R=1}^K v_R q_{s_1}^R, \sum_{R=1}^K v_R q_{s_2}^R, \dots, \sum_{R=1}^K v_R q_{s_j}^R, \dots, \sum_{R=1}^K v_R q_{s_n}^R \right)$$

avec :

$$v_R q_{s_j}^R \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{R=1}^K \sum_{j=1}^n v_R q_{s_j}^R = 1$$



L'ensemble formé par les valeurs typiques de R_D^* : (Min $R_{D_R}^*$), \bar{R}_D , (Max $R_{D_R}^*$) ainsi que les deux distributions d'immersions optimales, $\phi(\rho_c)$ pour le sonar et $\psi(\rho_s)$ pour le sous-marin fournit un panorama quantitatif précieux pour l'évaluation des performances du sonar, sachant que ce dernier est utilisé au mieux des conditions bathythermiques et en observant que ces performances ne pourraient qu'être meilleures si le sous-marin adverse exécute une manoeuvre en immersion différente de sa tactique optimale.

En se plaçant au point de vue du constructeur du sonar, on peut étendre la recherche dans une perspective de coût-efficacité .

Les valeurs typiques de R_D^* et les distributions ϕ et ψ obtenues sont liées à un couple :

(Facteur de mérite du sonar, immersion maximale du sonar).

On peut donc étudier l'évolution de \bar{R}_D , de ϕ et de ψ en fonction du produit cartésien $(F_M \times z_c)$, sachant que le coût de construction du sonar est une fonction monotone non décroissante de F_M et de z_c . Si l'on se fixe un niveau de performance minimum tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{R}_D \geq R_m \quad = \text{valeur fixée} \\ \text{Min } R_{D_R}^* \geq R_m \quad = \text{valeur fixée;} \end{array} \right.$$

il est possible de déterminer le couple (F_M, z_{cM}) qui rend minimum le coût du système tout en satisfaisant les inégalités choisies comme contraintes.



On obtient de plus la distribution des immersions optimales du sonar ainsi défini et d'intéressantes indications sur la gamme d'immersion dans laquelle évoluera le sous-marin adverse, s'il choisit de manoeuvrer essentiellement en vue de minimiser ses chances d'être détecté.

Considérant le problème dual du constructeur de sous-marin, les chiffres obtenus sur les immersions optimales et par conséquent sur les immersions extrêmes d'un sous-marin destiné à affronter une classe donnée de sonars, peuvent être également précieux dans une perspective de coût-efficacité. Il serait par exemple possible de fixer un pourcentage seuil associé à une immersion extrême telle que le sous-marin puisse jouer l'immersion optimale dans une proportion de situations atteignant le seuil fixé. La détermination de l'immersion maximale du sous-marin serait alors obtenue en résolvant en κ_0 :

$$\sum_{k=1}^{\kappa_0} \sum_{j=1}^n \nu_k^j q_{S_j}^k = (\text{seuil fixé}) \leq 1$$

puis en adoptant pour β_{S_M} l'immersion $\beta_{S_{\kappa_0}}$.

6.- SCHEMA DE DEROULEMENT DES CALCULS

Avec un échantillon de bathys suffisamment important pour lui attribuer une valeur significative, l'ampleur des calculs nécessite le recours à l'ordinateur, au moins pour certaines phases.

Nous résumons maintenant les principales étapes de la recherche :

1°) choix d'un échantillon de bathys et pondération de celles-ci en raison de leur valeur opérationnelle ;



2°) choix d'une classe de sonars possibles : facteurs de mérite et immersions maximales (1) ;

3°) pour chaque bathy, calculer les fonctions d'iso-atténuation (Cf. fig. 1) pour une gamme de seuils et pour un réseau d'immersions du sonar compris entre la surface et la profondeur maximale (calculs à effectuer sur ordinateur) ;

4°) choix d'une classe d'immersion pour les sous-marins adverses tels qu'on peut les prévoir dans le cadre de l'horizon temporel où le sonar à l'étude sera lui-même opérationnel ;

5°) transformation de chaque triplet : bathy - sonar - sous-marin en matrice de jeu en utilisant les réseaux d'iso-atténuation (calculs exécutables sur ordinateur) ;

6°) choix d'un critère et résolution des jeux. Obtention de la distribution de κ_D^* (et de ses valeurs typiques), ainsi que des stratégies optimales d'immersion à la fois pour le sonar et pour le sous-marin.

La résolution d'un jeu matriciel (si l'on adopte le critère de WALD - Von NEUMANN) est en général très vite impraticable à la main dès que la matrice a plus d'une dizaine de lignes et de colonnes. Pour procéder à une analyse fine sur un échantillon étendu, l'ordinateur s'impose encore pour cette phase de calcul. D'autant plus qu'il existe soit des méthodes rigoureuses (réduction de la résolution d'un jeu à un programme linéaire), soit des méthodes itératives approchées, très rapidement convergentes vers la valeur du jeu κ_D^* et assez rapidement convergentes vers les stratégies optimales.

(1) Celles-ci peuvent être, soit l'immersion critique fixée par le milieu, soit une immersion moindre retenue par exemple pour tenir compte de contraintes technologiques.



Une des plus simples d'entre elles (dite du jeu fictif) due à G.W. BROWN et J. ROBINSON (1951, Réf. V et VI) se prête particulièrement bien à la programmation.

7°) exploitation des résultats dans une perspective de coût-efficacité, soit en se plaçant au point de vue ASM (sonar), soit en se plaçant au point de vue d'un programme de sous-marin.

7.- STABILITE DE CERTAINS RESULTATS OBTENUS

Un certain nombre de calculs, identiques à ceux dont on vient de donner le déroulement schématique ont été effectués pour un lot de bathys atlantiques (1).

Dans une très forte proportion des cas, les jeux traités présentent un point d'équilibre, c'est-à-dire que suivant le critère de WALD - Von NEUMANN, les stratégies optimales pour le sonar et pour le sous-marin se réduisent à une tactique pure. En d'autres termes, il existe pour chacune des situations présentant un équilibre, un couple d'immersions j_s^* et j_c^* pour le sonar et le sous-marin respectivement, tel que :

$$\text{Maxi } \underset{j}{\text{Min}} R_{D_{ij}} = \text{Mini } \underset{j}{\text{Max}} R_{D_{ij}} .$$

Dans le cas où il n'y a pas équilibre "strict", on constate le plus souvent que les deux valeurs du Maxi Min et du Mini Max sont très voisines.

(1) Etude effectuée pour la Direction des Constructions et Armes Navales (Laboratoire D.S.M. du BRUSC).



L'existence de tels équilibres renforce l'intérêt pratique de la notion de jeu que nous proposons d'introduire à la fois pour définir un niveau souhaité de performance et pour minimiser le coût à consentir pour atteindre ce niveau. En effet, on peut s'interroger sur la stabilité des résultats obtenus, compte tenu du caractère parfois subjectif des hypothèses que l'on a dû formuler.

Or, on sait que dans le cas d'un jeu présentant un point d'équilibre, on peut bouleverser profondément les quantités figurant dans les lignes et les colonnes de la matrice (ou utilités) sans changer les tactiques optimales, à condition que ce bouleversement n'altère pas l'ordre relatif des utilités (Valeurs Numériques $R_{D_i,j}$ des matrices).

En d'autres termes, les fluctuations sur les valeurs de $R_{D_i,j}$ peuvent altérer la valeur R_D^* de jeu, mais ne changent pas les deux immersions optimales J_i^* et J_j^* (jeu avec équilibre) chaque fois que ces variations respectent la relation d'ordre que l'on peut établir entre les valeurs de $R_{D_i,j}$.

On rappelle également que pour un jeu ne présentant pas de point d'équilibre, toute transformation monotone positive de l'ensemble des $R_{D_i,j}$ laisse invariantes les stratégies mixtes optimales.

Cette propriété est évidemment plus restrictive que celle du simple respect de la relation d'ordre applicable aux jeux avec équilibre strict.

Les propriétés de stabilité montrent que les conclusions tirées de la résolution d'un jeu, peuvent être plus robustes qu'il ne semble de prime abord en songeant aux hypothèses, aux incertitudes sur la nature physique du problème, aux erreurs d'approximation, etc.

La stabilité des solutions des jeux découverte sur un lot de bathy atlantique, nous a conduit à examiner de façon plus approfondie la structure des courbes d'iso-atténuation en fonction de l'immersion du sonar.



A titre illustratif, nous donnons quelques échantillons de courbes correspondant à un seuil d'atténuation fixé à 100 dB (Cf. fig. 4, 5, 6, 7).

Les trois premières figures présentent un point d'équilibre tandis que la quatrième n'en présente pas.

8.- ETUDE DES FONCTIONS $R_D = f(\beta_c, \beta_s / A)$

Nous rappelons que les matrices $[R_{Dij}]$ des jeux ne sont qu'une approximation discrète des fonctions $R_D = f(\beta_c, \beta_s / A)$.

Il est donc normal de considérer les fonctions $f(\beta_c, \beta_s)$ si l'on souhaite discerner les raisons pour lesquelles on observe aussi fréquemment des points d'équilibre ou "cols" (1).

Énonçons deux théorèmes sur lesquels s'appuie notre investigation :

THEOREME A : (M. SION, C.R. Acad. Sciences, t. 244, p. 2120, 15.4.1957). (Cf. aussi C. BERGE, Réf. VIII).

Soit M et N deux espaces convexes et compacts non vides, et $f(\mu, \nu)$ une fonction numérique définie sur $M \times N$ telle que pour chaque $\nu \in N$, $f(\mu, \nu)$ est semi-continue supérieurement et quasi concave, c'est-à-dire l'ensemble $\{\mu : f(\mu, \nu) \geq \lambda\}$ est convexe pour tout λ réel ; pour chaque $\mu \in M$, $f(\mu, \nu)$ est semi-continue inférieurement et quasi convexe, c'est-à-dire l'ensemble $\{\nu : f(\mu, \nu) \leq \lambda\}$ est convexe pour tout λ réel. On a alors :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Max Min } f(\mu, \nu) = \text{Min Max } f(\mu, \nu) \\ \mu \in M \quad \nu \in N \qquad \nu \in N \quad \mu \in M \end{array}}$$

(1) Souvent aussi appelé "point Selle".



Rappelons qu'une fonction f est semi-continue supérieurement (inférieurement) en x_0 , si, et seulement si :

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0) ; \left(\underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0) \right)$$

Une fonction f est semi-continue sur M si elle est semi-continue en chaque point de M .

Appliquons le théorème de M. SION au duel sonar - sous-marin. A cet effet, posons :

$$z_c = \mu \quad \text{et} \quad z_c = \nu$$

(pour une bathy donnée et un seuil d'affaiblissement maximum admissible de A_{dB}).

Le jeu admettra un point d'équilibre si, pour toute immersion $z_c = \mu$ du sonar (avec $\mu < z_{cM}$) la fonction $f(z_s ; z_c = \mu)$ de z_s est semi-continue inférieurement (a fortiori si elle est continue) et quasi convexe et si pour toute immersion $z_s = \nu$ du sous-marin ($\nu < z_{sM}$) la fonction $f(z_c ; z_s = \nu)$ de z_c est semi-continue supérieurement (a fortiori si elle est continue) et quasi concave. Par exemple, sur l'intervalle fermé $[0, z_{sM}]$ toute fonction numérique $R_0 = f(z_s ; z_c = \mu)$ décroissante de 0 à une valeur $z_{s_0} \leq z_{sM}$ et croissante de z_{s_0} jusqu'à z_{sM} est quasi convexe sur l'intervalle $[0, z_{sM}]$.

Or, le graphe représentatif de $f(z_s ; z_c = \mu)$ n'est autre que la courbe d'iso-atténuation correspondant à une bathy donnée pour un seuil d'affaiblissement de A_{dB} et une immersion μ du sonar. L'examen des propriétés de semi-convexité peut donc s'effectuer de façon très simple sur les diagrammes d'iso-atténuation.



L'analyse des diagrammes de l'échantillon de bathys atlantiques considérées, montre que les conditions d'application du théorème de M. SION (pour tant très général), ne se trouvent pas remplies au sens strict.

Toutefois, on peut observer une tendance vers ces conditions.

En particulier, pour les immersions profondes de "C" ($\beta_c \rightarrow \beta_{CM}$) les fonctions $f(\beta_s; \beta_c = \mu)$ sont très souvent quasi convexes, et lorsqu'elles ne le sont pas sur tout l'intervalle $[0, \beta_{SM}]$, elles le sont pour un intervalle $[0, \beta_s^*]$ (avec $\beta_s^* \leq \beta_{SM}$) contenant un point β_s^* correspondant au minimum de la fonction $f(\beta_s; \beta_c = \mu)$. Cette tendance à la quasi convexité est évidemment un facteur favorable à l'apparition de points d'équilibres alors qu'un mélange de fonctions convexes et concaves serait au contraire un facteur très défavorable.

Le théorème que nous énonçons maintenant permet d'approfondir les conditions d'apparition d'un équilibre :

THEOREME B

1°) Définition

Soit $f(x, y)$ une fonction numérique définie sur $X \times Y$. Un point $\{x_0, y_0\}$ avec $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$ est un point selle de f si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0), & \forall x \in X \\ f(x_0, y) \leq f(x_0, y_0), & \forall y \in Y \end{cases}$$

(On rappelle que cette définition ne coïncide pas avec le concept utilisant le même vocable en géométrie différentielle).



2°) Théorème

Soit $f(x, y)$ une fonction numérique sur $x \times y, (x \in x, y \in y)$. Supposons de plus que :

$$\text{Max}_{x \in x} \text{Min}_{y \in y} f(x, y)$$

et

$$\text{Min}_{y \in y} \text{Max}_{x \in x} f(x, y)$$

existent tous deux. Alors, la condition nécessaire et suffisante pour que :

$$\text{Max}_{x \in x} \text{Min}_{y \in y} f(x, y) = \text{Min}_{y \in y} \text{Max}_{x \in x} f(x, y)$$

est que $f(x, y)$ possède un point selle.

D'après le théorème B, l'existence d'un équilibre au sens de $(\text{Maxi Min } f = \text{Min Max } f)$ est équivalent à l'existence d'un couple d'immersions z_c^* (sonar) et z_s^* (sous-marin) tel que :

$$f(z_c, z_s^*) \leq f(z_c^*, z_s) \leq f(z_c^*, z_s)$$

Cette condition est illustrée par les figures 4, 5, 6. En opposition, on voit clairement sur la figure 7 pourquoi le jeu correspondant ne possède pas de point selle (ou équilibre).

En d'autres termes, il y a équilibre chaque fois qu'une courbe d'iso-atténuation correspondant à une certaine immersion z_c^* du sonar est telle que son minimum minimorum $f(z_c = z_c^*, z_s^*)$ correspondant à une immersion z_s^* du sous-marin est supérieure, au point $\{z_s^*, f(z_c^*, z_s^*)\}$ à toute les valeurs prises par $f(z_c / z_s = z_s^*)$. (Cf. Fig. 4, 5, 6).



Dans ces conditions, il est évident que la valeur de $f(z_c^*, z_s^*) = \text{Min}_{z_s} f(z_c^*, z_s)$ supérieure à toute valeur de $f(z_c, z_s^*)$ est a fortiori supérieure à toute valeur de $\text{Min}_{z_s} f(z_c, z_s)$, puisque $\forall z_c$, $\text{Min}_{z_s} f(z_c, z_s) \leq f(z_c, z_s^*)$. La valeur $f(z_c^*, z_s^*)$ est donc bien un (Max Min) de la fonction $f(z_c, z_s)$.

Il est aisé de repérer sur la figure 7 (jeu sans équilibre) la position du Maxi Min qui se trouve dominée, ou "recouverte" si l'on utilise une locution intuitive, par différentes valeurs de $f(z_c; z_s = z_s^*)$

L'ensemble des observations précédentes ne permet pas de formuler une conclusion mathématique rigoureuse. Toutefois, on peut dégager des tendances ayant une valeur explicative :

Lorsqu'on immerge de plus en plus profondément un sonar, les courbes d'iso-atténuation, sans que l'on puisse parler d'une dominance, au sens rigoureux de la théorie des jeux, tendent à se relever et à dominer au moins localement la plupart des courbes correspondant à de moindres immersions du sonar. De plus, nous avons également observé la tendance de ces courbes vers une structure convexe ou quasi convexe, de sorte qu'à partir d'une certaine immersion, leurs valeurs minimales augmentent de façon monotone.

Dans ces conditions, il est clair que, au fur et à mesure que se relèvent les courbes d'iso-atténuation avec l'immersion du sonar, il est de plus en plus fréquent que la position du maximum de ces minima soit "dégagée", c'est-à-dire ne soit pas "recouverte" ou dominée par des valeurs de la fonction f correspondant à des immersions moindres, ce qui constitue une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un point d'équilibre.



A la limite, une telle configuration se trouverait toujours réalisée, si la courbe d'iso-atténuation correspondant par exemple à l'immersion critique se trouvait dominer toute autre courbe d'iso-atténuation, au sens rigoureux de la théorie des jeux.

Or, dans l'échantillon que nous avons étudié nous n'avons jamais observé une dominance aussi nette.

Le phénomène complexe échappe donc à une théorie élémentaire rigoureuse.

Il n'en demeure pas moins que les tendances mises à jour sont suffisamment explicatives pour justifier le point de vue que la remarquable stabilité des résultats observés (fréquence très grande des situations d'équilibre pour un échantillon étendu de matrices), repose sur les phénomènes physiques associés à l'immersion profonde du sonar.

La démarche à la fois mathématique et heuristique que nous venons d'esquisser, renforce l'espoir d'obtenir au moyen de l'immersion profonde des performances fiables ; ce terme étant entendu au sens large dans une acception à la fois technique et opérationnelle.

Bien entendu, la "fiabilité" telle que nous l'entendons n'implique pas que les portées de détection pour un sonar donné soient sensiblement constantes en dépit de circonstances très changeantes. Cela signifie seulement que, lorsque les conditions physiques d'environnement sont connues, le sonar à immersion profonde peut, de façon sûre, s'adapter au maximum aux conditions du moment y compris le comportement et la tactique du sous-marin adverse. On peut alors définir un comportement optimal à la fois pour l'immersion du sonar et pour l'immersion du sous-marin, calculer les portées de détection correspondantes et donner leurs valeurs extrêmes dans l'hypothèse de non comportement optimal de l'un ou de l'autre des adversaires.



9.- CONCLUSIONS

Bien des généralisations, compléments, raffinements, pourraient être apportés aux éléments méthodologiques qui viennent d'être décrits.

Le cadre limité d'un exposé ne permet guère de les aborder. Bornons-nous donc à en énumérer quelques-uns.

Sur le plan des hypothèses, il y aurait lieu par exemple de tenir compte, non seulement de l'immersion du but, mais de ses tactiques possibles dans un espace : immersion - inclinaison - assiette. En se plaçant au point de vue du sonar, il pourrait être avantageux pour un sonar ayant la possibilité de descendre à grande immersion, de procéder à une séquence d'émissions à différentes profondeurs avant de gagner l'immersion optimale, de façon à couvrir le contour supérieur des courbes d'iso-atténuation (Cf. fig. 4, 5, 6 et 7).

Cette procédure suggère, sur le plan mathématique, de considérer, non plus des jeux classiques ayant en quelque sorte un caractère statique, mais par exemple, des jeux récurrents (incluant d'ailleurs comme cas particulier les jeux stochastiques). Cela permettrait d'introduire à la fois des séquences de "parties" d'un jeu complet et les variations aléatoires qui peuvent s'introduire d'une partie à l'autre. La résolution de tels jeux n'est généralement pas aisée. Il serait intéressant d'aborder ce type de problèmes en connexion avec les programmes linéaires stochastiques (Cf. Réf. VIII) correspondants et dont on connaît d'ailleurs la grande complexité. Les méthodes de simulation sur ordinateur permettraient sans doute d'aboutir à des résolutions effectives au moins approchées et d'apporter quelques lumières théoriques en vue de dégager des résultats asymptotiques.



Toutefois, les recherches que nous avons effectuées dans plusieurs directions, semblent montrer qu'il y a guère de demi-mesure. Ou bien on est satisfait avec la méthode élémentaire faisant l'objet du présent exposé, ou bien on est conduit à des raffinements complexes qui exigent d'ailleurs de procéder préalablement à une analyse opérationnelle serrée des possibilités et du comportement des adversaires.

Il semble donc raisonnable, du moins dans une première approche, de tirer le meilleur parti possible du concept du jeu au sens classique, en s'efforçant de dégager sur un large échantillon (judicieusement pondéré) des conditions bathythermiques, des conclusions simples, utiles à la fois pour les services techniques, pour les Etats-Majors et pour les constructeurs de sous-marins et de sonars.



REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] MILNOR, J.W. "GAMES AGAINST NATURE", in Thrall, Coombs and Davies, pp. 49-60 (1954)
(Thrall, R.M., C.H. COMBS and R.L.DAVIS, editors, "DECISION PROCESSES", J. WILEY, New-York, 1954).
- [2] MCKINSEY, J.C.C. "Introduction to the Theory of Games"
Mac Graw Hill, New York, 1952.
- [3] LUCE, R. Duncan, and Howard RAIFFA : "Games and Decisions . Introduction and critical Survey".
J. Wiley, New-York, 1957
- [4] DRESHER, MELVIN : "Games of Strategy : theory and Applications",
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1961 (il existe une traduction française éditée chez DUNOD, Paris).
- [5] BROWN, G.W. "Iterative solutions of Games by fictitious play", in Koopmans, pp. 374-376 (1951) ; (KOOPMANS, T.C. Editor, "Activity analysis of Production and Allocation" Cowles Commission Monograph 13, J.Wiley, New-York, 1951).
- [6] ROBINSON, Julia, "An iterative method of solving a game".
Annals of Mathematics, 54, pp. 296-301, 1951.
- [7] BERGE, Claude "Espaces topologiques. Fonctions multivoques", pp. 216-220.
DUNOD, Paris, 1959
- [8] FORTET R. "Programmes linéaires stochastiques". pp. 109-126 dans "Mathématiques des programmes économiques". Monographie de recherche opérationnelle N° 1, Publication AFIRO, DUNOD, Paris 1964.



TABLE DES MATIERES

1. Position du problème
2. Définition conditionnelle de la portée d'un sonar
3. Comportement de "C" et "S" pour le choix initial de leurs immersions
4. Résolution des "jeux"
5. Exploitation des résultats.
6. Schéma de déroulement des calculs
7. Stabilité de certains résultats obtenus
8. Etude des fonctions
9. Conclusions $f(z_c, z_s; / A \text{ donné})$

Références bibliographiques

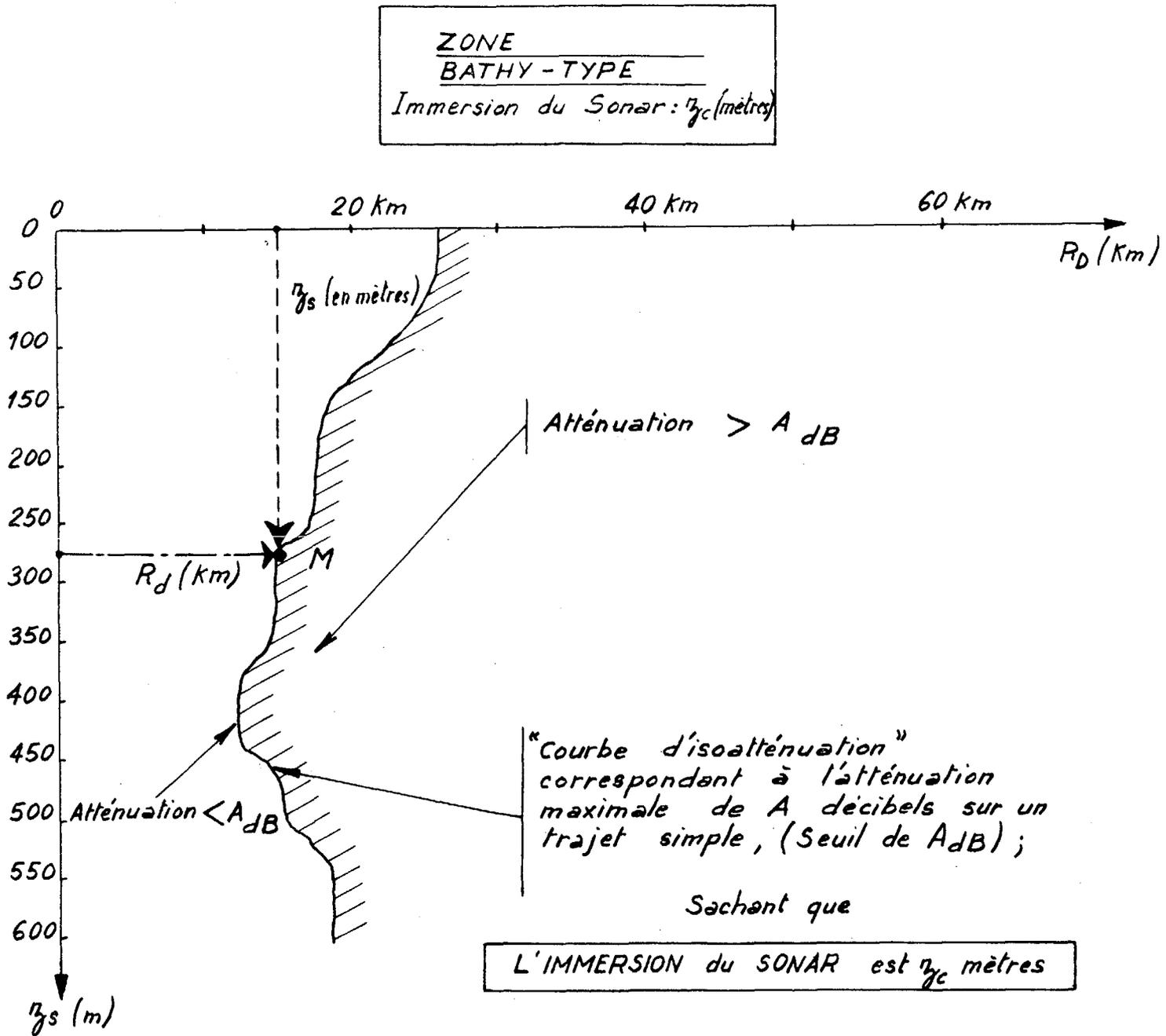


Fig. 1 - Rayon de détection en fonction d'un seuil d'atténuation



ZONE: _____
 BATHY: _____

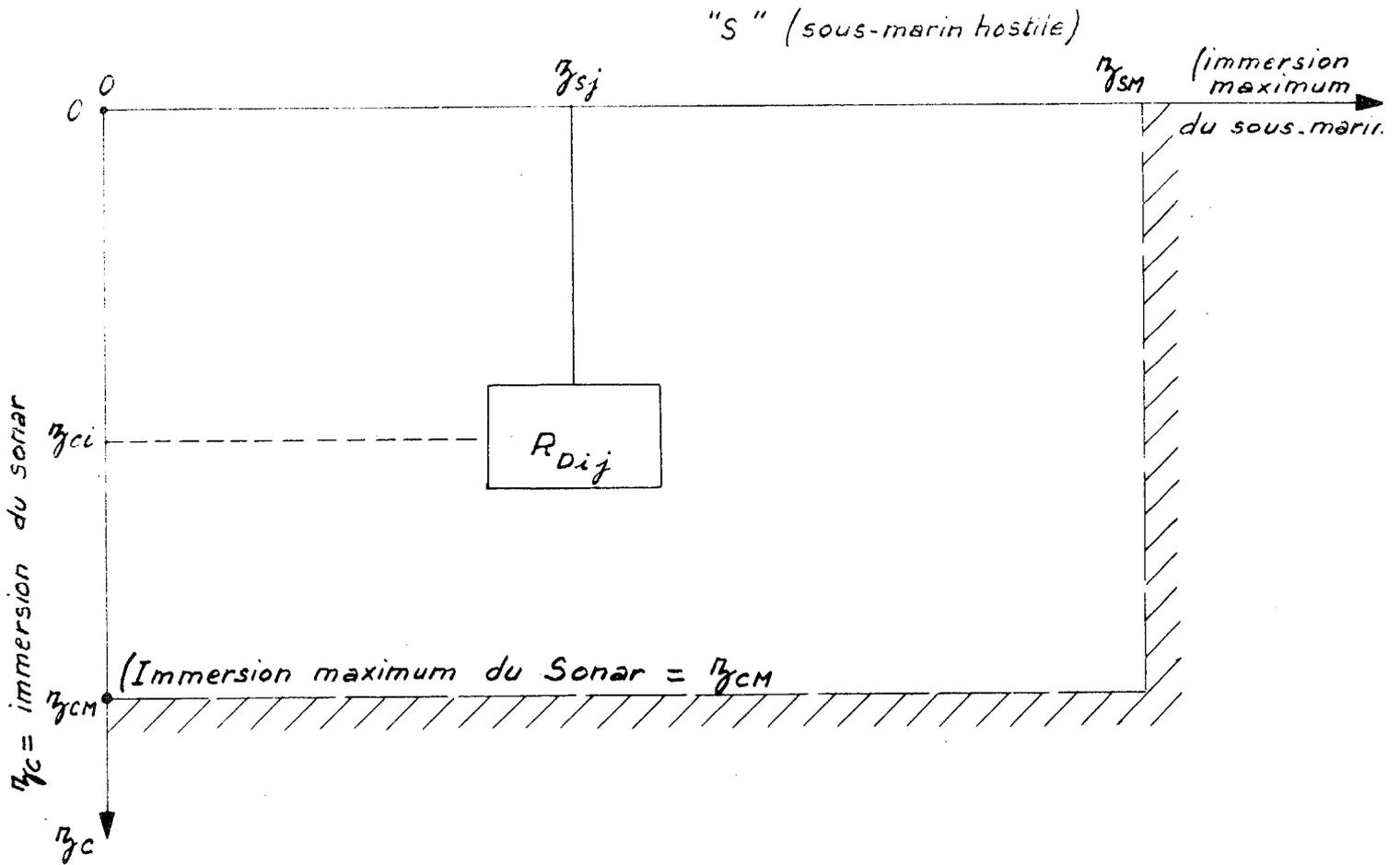


Fig. 2 - Rayon de détection pour une immersion h_c du Sonar et une immersion h_s du sous-marin

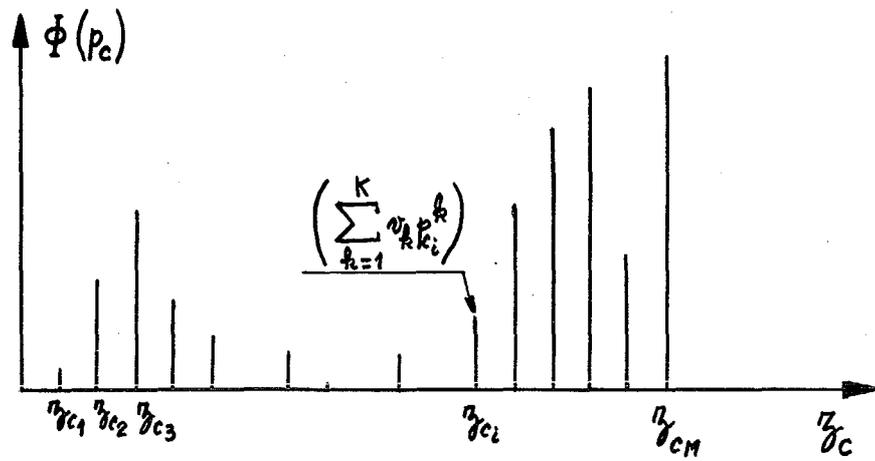
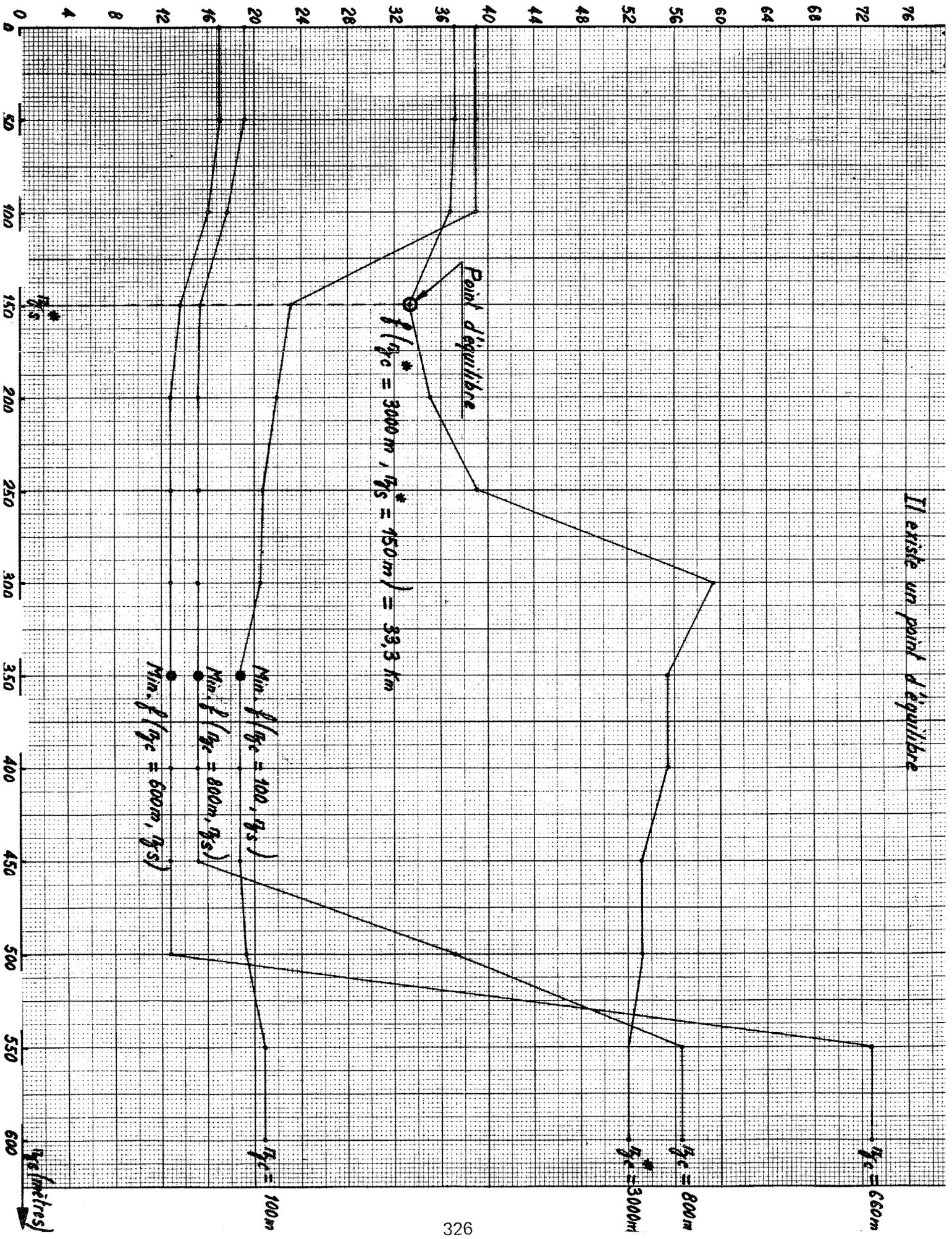


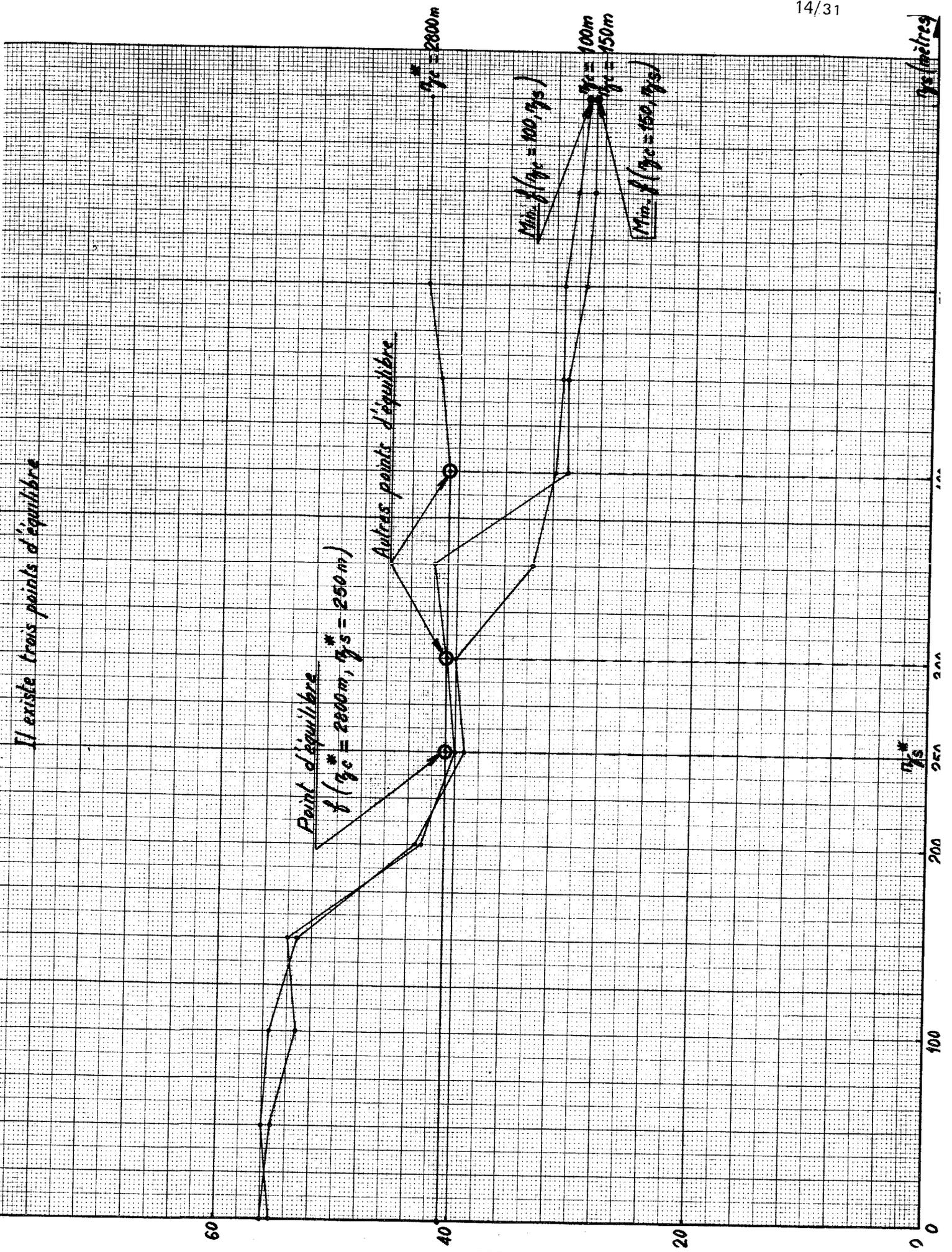
Fig. 3 - Distribution globale des immersions optimales du Sonar "C"



Il existe un point d'équilibre



Il existe trois points d'équilibre





Il existe trois points d'équilibre

