



DEUXIÈME COLLOQUE
SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL
ET SES APPLICATIONS
NICE - 5 AU 10 MAI 1969

9/1

THEORIE CONVOLUTIVE DE LA COVARIANCE GENERALISEE.
ET DE SA MESURE DIRECTE DANS LE DOMAINE TEMPOREL
POUR DES PROCESSUS PONCTUELS, APPLICATIONS EXPERI-
MENTALES.

par

G. Amsel, R. Bosshard, R. Rausch, M. Sauce et C. Zajde

Ecole Normale Supérieure
Laboratoire de l'Accélérateur Linéaire, Orsay.

RESUME

Les distributions de Schwartz aléatoires sont étudiées par la convolution généralisée au moyen de leur régularisée. La valeur moyenne et la covariance sont définies comme des distributions et leurs lois de transformation sont établies. La théorie est appliquée aux processus ponctuels considérés comme sommes de fonctions δ . La covariance et l'inter-covariance sont ici des mesures identifiées, à des constantes près, à la mesure conditionnelle donnant la probabilité d'arrivée des instants du processus, sachant que l'origine choisie coïncide avec l'un de ces instants. Une méthode de mesure expérimentale des covariances et inter-covariances, dont le principe découle directement des calculs, est décrite. Des applications à l'étude des processus à temps mort engendrés par des discriminateurs, et des phénomènes de temps de vol, sont présentés.

ABSTRACT

Random processes, which are Schwartz distributions, are studied by smoothing, using the generalised convolution. The mean value and the covariance are defined as distributions and their transformation laws are derived. The theory is applied to point processes, considered as sums of δ functions. Here the covariance and cross-covariance are measures, identical, to within constants, to the measure which gives the conditional occurrence probability given that an event occurred at the origine. An experimental measurement technique of the covariances is deduced from the theory. Applications are shown to dead-time processes generated by discriminators and to time of flight type processes.



9/3

THEORIE CONVOLUTIVE DE LA COVARIANCE GENERALISEE.
APPLICATIONS EXPERIMENTALES.

G. Amsel, R. Bosshard, H. Kausch, M. Sauce et C. Zajde

INTRODUCTION

L'expression $E [X(t_1) X(t_2)]$ n'a de sens que si $X(t)$ est une fonction aléatoire ordinaire. La formulation de la théorie de la covariance basée sur cette expression ne peut donc conduire à exprimer rigoureusement des notions telles que la "corrélation microscopique". Cependant une fonction aléatoire (f. a.) à corrélation microscopique, ou "bruit blanc" se définit fort bien dans le domaine du spectre de fréquence comme ayant un spectre uniforme. Nous savons que d'après la théorie des distributions de L. Schwartz, l'image dans le domaine temps d'un spectre uniforme est l'impulsion de Dirac δ . Il est donc essentiel, pour garder à la notion de covariance toute sa généralité, d'exprimer sa définition dans un langage qui donne un sens à une covariance δ ou plus généralement à une covariance distribution. Dans ce cas, chaque réalisation du processus aléatoire $X(t)$ est elle-même une distribution (d. a.).

Le but de ce travail était d'élaborer un tel langage, en n'ayant recours qu'à des notions mathématiques aussi simples que possible, de façon à rendre la théorie accessible à une large gamme de spécialistes (physiciens mais aussi électroniciens, etc.). C'est pour cette raison en particulier que nous limiterons cet exposé essentiellement au domaine temporel. D'une part, en effet, l'analyse harmonique de tels processus a atteint un grand degré de perfection, et nous n'avons pas à l'aborder ici. D'autre part, il est souvent possible de rester entièrement dans le domaine temporel, aussi bien sur le plan théorique que sur celui des mesures. La généralisation des techniques à impulsions a conféré depuis deux décennies une importance particulière aux études temporelles et a montré que l'analyse harmonique ne permet pas toujours une caractérisation simple de phénomènes tels que les états transitoires. Ainsi, dans certains domaines, comme la détection des particules par exemple, les études en fréquence ont eu tendance, ces dernières années, à passer au second plan. Par ailleurs, des instruments nouveaux et, en particulier, l'oscilloscope à échantillonnage et les codeurs rapides de temps, permettent d'effectuer des mesures temporelles dans le domaine subnanoséconde, équivalent au gigacycle, qui auraient été impensables il y a quelques années encore. C'est pourquoi il nous a semblé utile de mettre à la portée des spécialistes de tels domaines une théorie dans le langage temporel. Cette théorie est basée sur l'utilisation systématique de la convolution, ce qui confère à la formulation un aspect particulièrement intuitif. L'exposé sera limité pour cette raison la plupart du temps, au cas stationnaire, dont le traitement par la convolution est relativement simple.



Dans la deuxième partie de ce travail nous appliquerons cette théorie aux processus ponctuels et nous montrerons comment, dans ce cas, ces notions peuvent se prêter à des mesures directes, les principes de ces mesures découlant logiquement de la formulation choisie. Quelques applications vont illustrer ces idées.

Les distributions aléatoires ont été considérées dès 1953 par Mourier et Fortet [1] et par Guelfand [2]. Un traitement détaillé et très approfondi en a été donné récemment par Bonnet [3]. Cet auteur a adopté le formalisme de Dirac pour exposer sa théorie ; il accède ainsi à un langage très puissant, permettant de traiter le problème, dans les cas stationnaires ou non. De plus, la symétrie entre la représentation temps et la représentation fréquence se trouve ainsi parfaitement conservée, par recours à la théorie généralisée de la transformation de Fourier. Les propriétés spectrales peuvent recevoir de cette façon un traitement particulièrement complet. Cependant le formalisme de Dirac comporte l'inconvénient d'être d'un accès difficile à ceux qui ne sont pas familiers avec la mécanique quantique. En optant ici pour l'utilisation systématique de la convolution généralisée, nous établirons les résultats dans un langage plus simple, mais aussi dans un cadre plus restreint.

I - THEORIE GENERALE

Nous utiliserons la notation de Schwartz $\langle T, \varphi \rangle$ pour une distribution agissant sur une fonction de base $\varphi = \varphi(t)$ de l'espace \mathcal{D} , indéfiniment dérivable et à support compact. Nous donnons en appendice quelques propriétés particulières, la théorie des distributions étant exposée par Schwartz dans les références [4] et [5] que nous citerons ci-après par (S 1), (S 2) et (S M). Observons que (S M) contient la plupart des notions requises ici, et est d'une lecture plus facile que (S 1) et (S 2). Dans la mesure du possible nous donnerons les conditions d'existence etc... des expressions qui seront manipulées ici ; dans certains cas, cependant, les calculs nécessiteraient sans doute des justifications plus rigoureuses.

A - DEFINITIONS ET PRINCIPES

$X(t)$ est une distribution aléatoire (d.a.) si chaque réalisation du processus $X(t)$ est une distribution. Nous ne considérerons, pour simplifier, que le cas réel.

Notre formulation est entièrement construite sur la régularisation de $X(t)$ par une fonction de base, par la convolution généralisée

$$\hat{X}(t) = X(t) * \varphi(t) \quad (1)$$



$\hat{X}(t)$ est donc une fonction aléatoire (f. a.) ordinaire pour tout φ , dont chaque réalisation est indéfiniment dérivable. Les procédés de régularisation sont examinés dans (S 2) p. 22 et (S M) p. 128. On trouvera dans l'appendice I le lien avec d'autres façons d'aborder le problème. Notons que ce procédé a un sens physique précis, puisqu'il consiste à filtrer $X(t)$ par un filtre bien choisi.

On dira que $X(t)$ est stationnaire (ou stationnaire d'ordre 2) si $\hat{X}(t)$ l'est pour tout φ . On astreindra dans ce cas les réalisations de $X(t)$ à être des distributions bornées (voir appendice II).

L'extension des notions de valeur moyenne et de covariance à $X(t)$ sera obtenue par le procédé classiquement utilisé par Schwartz qui consiste à calculer ces paramètres pour $\hat{X}(t)$ lorsque $X(t)$ est une fonction et à prendre ces formules comme définition, lorsque $X(t)$ est une distribution.

Exemples : Soit $\{t_i\}$ un processus ponctuel.

$$X(t) = \sum \delta_{t_i} \quad (2)$$

est une mesure aléatoire et on peut montrer que cette mesure existe si et seulement si $\{t_i\}$ n'a pas de point d'accumulation, en d'autres termes, si tout segment fini ne contient qu'un nombre fini de t_i (tout au moins avec probabilité 1).

Alors
$$\hat{X}(t) = \sum \varphi(t - t_i) \quad (3)$$

puisque
$$\delta_a * \varphi(t) = \varphi(t - a)$$

a) Valeur moyenne

Pour $X(t)$ stationnaire ou non, si $X(t)$ est une f. a. :

$$\begin{aligned} E[\hat{X}(t)] &= E[\varphi(t) * X(t)] \\ &= \varphi(t) * E[X(t)] \end{aligned}$$

On définira donc $E[X(t)]$ comme une distribution déterminée par

$$E[X(t)] * \varphi(t) = E[\hat{X}(t)] \quad (4)$$

pour tout φ . Cette opération a une solution $E[X(t)]$ et une seule, qui est une distribution bornée (voir appendices I et II).



Exemple : On sait que si $\{t_i\}$ est de Poisson, avec densité $\lambda(t)$, $\hat{X}(t)$ défini par (3) a pour valeur moyenne [6] :

$$E [\hat{X}(t)] = \lambda(t) * \varphi(t)$$

donc, par (4)

$$E [X(t)] = \lambda(t) \quad (5)$$

La densité apparaît donc comme la valeur moyenne de la mesure aléatoire $X(t)$. Il est remarquable et fort satisfaisant que cette valeur moyenne soit une fonction ordinaire. Observons que cette formulation clarifie déjà la notion de fonction d'illumination d'un scintillateur bombardé par des particules ; en effet, cette fonction peut à la fois être considérée comme la densité du processus de Poisson qui régit l'émission des photons et comme la valeur moyenne du signal obtenu avec un photodétecteur idéal.

Notons que pour un processus stationnaire

$$E [X(t)] = C_X = \bar{X} \quad \text{et, comme } 1 * \varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt$$

$$\bar{X} = E [X(t) * \varphi(t)] / \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt \quad (4 \text{ bis})$$

pour toute fonction de base à intégrale non nulle.

b) Covariance

Considérons d'abord $X(t)$ comme une f.a. La formule de transformation par filtrage s'écrit, dans le cas stationnaire [6] :

$$C_{\hat{X}}(\theta - \theta') = \iint \varphi(\theta - u) \varphi(\theta' - u') C_X(u - u') du du' \quad (6)$$

Il est aisé de montrer que, avec $\theta - \theta' = \tau$

$$C_{\hat{X}}(\tau) = C_X(\tau) * \varphi(\tau) * \varphi(-\tau) \quad (7)$$

Ce qui est la formule de transformation générale d'une covariance par filtrage, équivalente par ailleurs à la formule classique pour les spectres :

$$\gamma_{\hat{X}}(\nu) = \gamma_X(\nu) |G(\nu)|^2 \quad (8)$$

On prendra comme définition de $C_X(\tau)$, lorsque $X(t)$ est une d.a., l'expression (7). La régularisation par une fonction de base étant une application bilinéaire séparément continue (S 2 p. 23, théorème XII) et $\varphi(t) * \varphi(-t)$ étant une fonction de base, (7)



défini bien une distribution unique si elle existe. Bien entendu on calcule le 1er membre de (7) par

$$C_{\hat{X}}(\tau) = E [\hat{X}(t) \hat{X}(t+\tau)] - \{E[\hat{X}(t)]\}^2.$$

Exemple : Pour $\hat{X}(t)$ défini par (3) et $\{t_i\}$ de Poisson stationnaire de densité λ , on sait que [6] :

$$C_{\hat{X}}(\tau) = \lambda \varphi(\tau) * \varphi(-\tau)$$

Donc par (7), δ étant l'élément unité pour la convolution :

$$C_X(\tau) = \lambda \delta \quad (9)$$

Ainsi se trouve exprimée de façon rigoureuse la notion de corrélation microscopique caractéristique des processus de Poisson.

c) Inter - covariance

On peut étendre à l'inter - covariance la même procédure, en substituant à $X(t)$ et $Y(t)$ leurs régularisées

$$\hat{X}(t) = X(t) * \varphi(t) \text{ et } \hat{Y}(t) = Y(t) * \psi(t) :$$

$$C_{\hat{X}\hat{Y}}(\tau) = C_{XY}(\tau) * \varphi(-\tau) * \psi(+\tau) \quad (10)$$

où on note $C_{\hat{X}\hat{Y}}(\tau) = E[\hat{X}(t)\hat{Y}(t+\tau)] - E[\hat{X}(t)]E[\hat{Y}(t)]$

d) Propriétés des covariances et extension à des fonctions de base plus générales

Les propriétés de $C_X(\tau)$ peuvent être déduites de l'exposé très-puissant de Schwartz (S 2 p. 130) sur les distributions de type positif. Rappelons que la covariance ordinaire $C_X(\tau)$ est de type positif, c'est-à-dire que

$$\sum_{j,k} C_X(t_j - t_k) Z_j \bar{Z}_k \geq 0 \text{ pour tout } Z_i \text{ complexe. Ceci}$$

entraîne $C_X(0) \geq 0$ et $|C_X(\tau)| \leq C_X(0)$, propriétés

fondamentales. Par une extension de cette définition Schwartz appelle distribution T de type positif et note $T \gg 0$ toute distribution T telle que pour tout φ :

$$T * \varphi(\tau) * \varphi(-\tau) \Big|_{\tau=0} = \text{Tr}(T * \varphi * \varphi^{-}) \gg 0 \quad (11)$$



On voit donc que $C_X(\tau) \gg 0$.

Ces formules contiennent toutes les propriétés de $C_X(\tau)$, dont nous citerons les plus importantes sans démonstration, renvoyant à Schwartz.

$C_X^-(\tau) = C_X(\tau)$ où D^- désigne la distribution symétrique de D par rapport à l'origine (voir appendice III).

- $C_X(\tau)$ est une distribution bornée

- Tout $C_X(\tau)$ est limite de fonctions de base $\varphi \gg 0$.

- La convolution de deux covariances C_X et C_Y existe et est bornée si C_X et $C_Y \in \mathcal{D}'_L 2$, soit si C_X et C_Y sont sommes finies de dérivés de fonctions de carré sommable ou encore si leur régularisées sont de carré sommable (voir appendice II).

- La convolution d'une covariance C_X , seulement bornée, avec C_Y existe si $C_Y \in \mathcal{D}'_L 1$ soit si C_Y est somme finie de dérivées de fonctions sommables ou encore si $C_Y * \varphi(t)$ est une fonction sommable.

Ajoutons le théorème généralisé de Bochner (S 2 p. 132 Théorème XVIII) selon lequel pour que $T \gg 0$, il faut et il suffit qu'elle soit transformée de Fourier d'une mesure $\mu \gg 0$ à croissance lente. Ce théorème est la base même de l'analyse spectrale de covariances généralisées.

Dans les formules (1), (4) et (7) les fonctions de base $\varphi(t)$ étaient à support compact. Cette hypothèse restreint le domaine d'application de la formule et exclut en particulier le cas de filtres physiquement réalisables à réponse indéfiniment dérivable, tels que les filtres composés de câbles non idéaux. On peut lever cette restriction en introduisant des fonctions de base $\alpha(t)$ indéfiniment dérivables à décroissance suffisamment rapide à l'infini pour préserver le caractère stationnaire de $X(t)$. Comme $X(t)$ a été restreinte à des réalisations bornées, on demandera que la régularisée le soit également. Il faut pour cela que $\alpha(t)$ et toutes ses dérivées soient intégrables, soit $\alpha(t) \in \mathcal{D}'_L 1$ (voir appendice II).

Alors $\alpha(t) * \alpha(-t)$ est aussi dans $\mathcal{D}'_L 1$. Ainsi (4) et (7) ont



un sens lorsqu'on remplace φ par \mathcal{d} puisque $E[X(t)]$ aussi bien que $C_X(\tau)$ sont des distributions bornées, comme on l'a vu.

B - OPERATIONS SUR LES d. a.

a) Combinaisons linéaires

On voit aisément que la prise de la moyenne reste une opération linéaire. Pour la covariance on a

$$C_{\beta X} = \beta^2 C_X \quad (12)$$

$$C_{X \mp Y} = C_X + C_Y \mp C_{XY} \mp C_{YX} \quad (12 \text{ bis})$$

On a aussi : $C_{YX} = C_{XY}$ (13)

b) Filtrage généralisé

Un filtre généralisé a pour réponse percussionnelle une distribution certaine D . Si le filtre obéit aux relations causales, D aura un support limité à gauche. Pour que le filtrage d'une d. a. stationnaire par D ,

$$Y(t) = X(t) * D \quad (14)$$

reste stationnaire, D doit satisfaire à certaines conditions. En particulier pour toute distribution S bornée il faut que $S * D$ existe et soit bornée. Pour cela il suffit que $D \in \mathcal{D}'_L$ (voir appendice II), alors

$$\hat{Y}(t) = (X(t) * D) * \varphi(t)$$

Or on sait que si $X(t)$ est bornée et $D \in \mathcal{D}'_L$ cela entraîne l'associativité de la convolution (S 2 p. 68).

Donc
$$\hat{Y}(t) = X(t) * (D * \varphi(t)) \quad (15)$$

or $D * \varphi(t)$ est dans \mathcal{D}'_L (voir appendice II). On peut donc, comme on l'a vu, appliquer (4) et on a pour la moyenne :

$$\begin{aligned} E[Y(t)] * \varphi(t) &= E[X(t) * (D * \varphi(t))] \\ &= E[X(t)] * D * \varphi(t) \end{aligned}$$

d'où
$$E[Y(t)] = E[X(t)] * D \quad (16)$$



Ainsi "on peut sortir D du signe E []", donc prendre la moyenne avant ou après filtrage.

Dans le cas stationnaire on a, posant $\bar{Y} \doteq E [Y (t)]$

$$\bar{Y} = \bar{X} 1 * D = \bar{X} \langle D, 1 \rangle \quad (17)$$

où $\langle D, 1 \rangle$ est l'intégrale de D. Cette intégrale existe précisément parce que $D \in \mathcal{D}'_L 1$ (S 2 p. 53).

La covariance se calcule en appliquant (7). On a ici (en omettant τ et notant $\alpha(-\tau) = \alpha^-$) par (15), posant, $\alpha = D * \varphi$

$$C_Y^\wedge = C_{X * \alpha} = C_X * \alpha * \alpha^- = C_X * (D * \varphi) * (D^- * \varphi^-)$$

puisque $\alpha \in \mathcal{D}'_L 1$. Donc si le produit est associatif :

$$C_Y^\wedge = C_X * D * D^- * \varphi * \varphi^- \quad \text{or}$$

$$C_Y^\wedge = C_Y * \varphi * \varphi^-$$

$$\text{d'où} \quad C_Y = C_X * D * D^- \quad (18)$$

Cette formule est fondamentale, puisqu'elle généralise (7) à un filtre-distribution quelconque. L'existence du produit triple est établie si $D * D^- \in \mathcal{D}'_L 1$ comme on l'a vu. On montre dans l'appendice III que cela implique $D \in \mathcal{D}'_L 1$, ce qui est précisément l'hypothèse déjà postulée plus haut, pour préserver la stationnarité.

$$\text{L'expression} \quad C_0 = D * D^- \quad (19)$$

est la covariance canonique associée au filtre D. C'est, en effet, la covariance d'une d.a. à corrélation microscopique filtrée par D. Puisque par hypothèse $D \in \mathcal{D}'_L 1$, C_0 existe ; bien entendu

$C_0 \gg 0$. Schwartz (S 2 p. 134 théorème XX) montre qu'une distribution est de la forme $D * D^-$, ($D \in \mathcal{D}'_L 2$) si et seulement si sa

transformée de Fourier est une fonction ; celle-ci est alors positive. Ceci explique bien pourquoi la manipulation des spectres est dans le langage usuel plus facile que celle des covariances, puisque ces spectres existent comme fonction même pour des C_0 distributives. Un exemple trivial est le "filtre résistance" $D = R \delta$
 $C_0 = R^2 \delta$

L'intercovariance se calcule à partir de (10) de la même façon. On a avec $Y_1 = X_1 * D_1$ et $Y_2 = X_2 * D_2$:



$$C_{Y_1 Y_2} = C_{X_1 X_2} * D_1^{-1} * D_2 \quad (20)$$

En particulier "l'auto -intercorrélation" de $X(t)$ avec $Y(t) = X(t) * D$ s'écrit :

$$C_{XY} = C_X * D \quad (20 \text{ bis})$$

formule d'importance centrale pour la mesure expérimentale de C_X , comme on le verra. On peut aussi considérer $Y_1(t) = X(t) * D_1$ et $Y_2(t) = X(t) * D_2$; alors

$$C_{Y_1 Y_2} = C_X * D_1^{-1} * D_2 \quad (20 \text{ ter})$$

c) Exemples de filtres distributifs

1) Ligne court circuitée idéale

$$D = \delta - \delta_{\Delta}$$

$$C_o = (\delta - \delta_{\Delta}) * (\delta - \delta_{-\Delta}) = 2\delta - \delta_{\Delta} - \delta_{-\Delta} \quad (21)$$

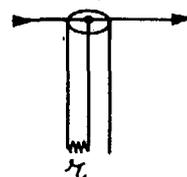
C'est la formule des interférences qui s'écrit encore en langage usuel

$$C(\tau) = 2C(\tau) - C(\tau - \Delta) - C(\tau + \Delta) \quad (21 \text{ bis})$$

et a été appliquée systématiquement à l'étude des amplificateurs à impulsions comportant des lignes de mise en forme en court-

circuit [7, 8]. La figure 1 montre un exemple typique de mesure interprétable par la formule 21 bis, réalisée dans le domaine temps, dans la région de la nanoseconde. [9]

2) Ligne désadaptée



$z > Z$ impédance caractéristique, entrée haute impédance

$$D = \sum_0^{\infty} a^n \delta_{n\Delta}$$

$$a = \frac{z - Z}{z + Z} < 1$$

Le calcul montre que

$$C_o = \frac{1}{1 - a^2} [D + D^{-1} - \delta]$$



3) Dérivation

$$D = \delta' \quad \text{on a (appendice III)} \quad D^- = -\delta'$$

et $C_0 = -\delta''$

Cette formule s'exprime classiquement par

$$C_0'(\tau) = -\frac{d^2 C_0(\tau)}{d\tau^2} \quad \text{pour la dérivation}$$

On ne traitera pas ici, dans leur généralité, les filtres aléatoires ; ceux-ci ont fait l'objet d'une étude détaillée par

Bonnet [9]

d) Calcul des covariances par passage à la limite

Lorsque l'existence de $C_X(\tau)$ est établie on peut utiliser la formule (7) pour calculer la covariance par passage à la limite. En effet, en vertu de la continuité du produit de composition les régularisées d'une distribution S , $S * \varphi_j$ tendent vers S lorsque les φ_j tendent vers δ (S 2 p. 22) dans l'espace des distributions. On a donc, au sens des distributions

$$\left. \begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} C_{\hat{X}_i} &= C_X \\ \text{avec } \hat{X}_i &= X * \varphi_i \\ \text{et } \lim_{i \rightarrow \infty} \varphi_i &= \delta \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Ce procédé de calcul peut être très puissant mais il est utile de l'étendre à des fonctions régularisantes plus générales que les $\varphi(t)$.

Si $\alpha_i(t) \in \mathcal{D}_{L^1}$, la régularisée $X * \alpha_i(t)$ reste bornée et d'après Schwartz (S 2, p. 60) la convergence est encore assurée dans (22). Le calcul est ici plus facile, puisque $\alpha(t)$ peut être par exemple une simple gaussienne,

D'autre part, on peut utiliser la formule du filtrage (1a) pour calculer C_X , lorsqu'on connaît $\varphi_j = X * \psi_j$ et C_{φ_j} , si $\psi_j \rightarrow \delta$



au sens des distributions. Il suffit pour cela que les D_j aient un support contenu dans un compact fixe (S 2, p. 13). La formule la plus générale est la suivante :

$$\text{Soit } X_j \longrightarrow X \quad \text{et } D_j \longrightarrow \mathcal{D}$$

soit $Y_j = X_j * D_j$. Alors

$$\lim_{j \rightarrow \infty} C_{Y_j} = C_X \quad (23)$$

car la convolution est une opération bilinéaire continue si un des facteurs garde son support dans un compact fixe (S 2, p. 13, théorème V). Observons qu'un choix très utile de D_j est celui du rectangle R_j de hauteur j et de largeur j^{-1} . On sait que $R_j \longrightarrow \mathcal{D}$.

La formule (23) peut s'étendre à la formule (20 ter) en considérant

$$Y_j^1 = X_j * D_j^1 \quad \text{et} \quad Y_k^2 = X_k * D_k^2 \quad \text{Alors, si } D_j^1 \text{ et } D_k^2 \text{ tendent vers } \mathcal{D}$$

$$\lim_{k, j \rightarrow \infty} C_{Y_j^1 Y_k^2} = C_X \quad (23 \text{ bis})$$

Cette formule est à la base même des méthodes d'étude des processus ponctuels sur les plans théorique et expérimental.

e) Intégration des d. a. et ergodicité

Nous n'évoquerons que très brièvement ces problèmes ici. Si $X(t)$ est une f. a.

$$I_T = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt = M_T \langle X(t) \rangle$$

est une fonctionnelle linéaire. On peut écrire

$$I_T = I_T(t) \Big|_{t=0}^{\quad} \quad \text{avec}$$

$$I_T(t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} X(t) dt = X(t) * R_T^{\sim}(t)$$

où $R_T^{\sim}(t) = \frac{1}{T}$ pour $0 \leq t < T$ et nul ailleurs (rectangle à droite normé).

Cette formule a un sens pour $X(t)$ quelconque. Si $X(t)$ n'est pas une f. a. I_T n'a de sens que si $X(t)$ est une mesure. Alors

$$I_T(t) \text{ est une fonction et } E [I_T(t)] = \bar{X} = E [I_T]$$

en vertu de la stationnarité.



De même
$$\mathcal{G}_{I_T}^Z(t) = \mathcal{G}_{I_T}^Z = C_{I_T}(t) \quad (o)$$

or
$$C_{I_T}(t) = C_X * R * R^{-}$$

ce qui se calcule aisément. On sait que $R * R^{-}$ est un triangle et on retrouve la formule usuelle, appliquée ici à la mesure C_X .

Ces formules sont le point de départ de l'étude des propriétés ergodiques de $X(t)$. Nous n'irons pas plus loin, mais notons que le chapitre de S 2 consacré aux distributions presque périodiques contient les bases d'une telle théorie, étendue aux d.a.

II - PROCESSUS PONCTUELS

A - GENERALITES

A toute suite de points aléatoire $\{t_i\}$ nous faisons correspondre la "mesure canonique associée".

$$X(t) = \sum_i \delta_{t_i} \quad (24)$$

Cette correspondance présente des propriétés fort utiles telles que si $\{t_i^1\} \longrightarrow X_1(t)$ et $\{t_i^2\} \longrightarrow X_2(t)$

alors
$$\left\{ \begin{matrix} t_i^1 \\ \cup \\ t_i^2 \end{matrix} \right\} \longrightarrow X_1(t) + X_2(t)$$

ce qui ramène l'étude d'une superposition de suites à celle d'une somme de d.a. Par ailleurs, comme les sommes du type

$\sum_i \varphi(t - t_i)$ s'écrivent $X(t) * \varphi(t)$, l'étude des processus engendrés par une suite $\{t_i\}$ se ramène à celle de $X(t)$, compte

tenu de la théorie du chapitre précédent. On voit ici que la formulation convolutive confère à $X(t)$ un sens dynamique très intuitif en particulier $X(t)$ est limite de ses régularisées par des $\varphi_i(t)$

lorsque $\varphi_i \longrightarrow \delta$.

Pour assurer l'existence de $X(t)$ nous admettrons que $\{t_i\}$ ne possède pas de point d'accumulation à distance finie (avec probabilité 1), c'est à dire que tout segment fini ne peut porter, pour chaque réalisation, qu'un nombre fini de points. Si $X(t)$ est stationnaire, elle est bornée et possède une moyenne et une covariance ; cette dernière est une mesure.

On peut introduire ici une catégorie de filtres aléatoires par



l'expression :

$$X_A(t) = \sum \delta_{t_i} * D_i$$

où les D_i sont des distributions aléatoires à décroissance suffisamment rapide. Nous ne considérerons que 2 cas :

$$a) \left\{ \begin{array}{l} D_i = q_i \delta \\ X_A(t) = \sum q_i \delta_{t_i} \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad (25)$$

les q_i étant des v.a. équidistribuées, indépendantes des t_i et entre elles.

$$b) \left\{ \begin{array}{l} D_i = \delta_{a_i} \\ X_A(t) = \sum \delta_{t_i + a_i} \end{array} \right. \quad (26)$$

les a_i ayant les mêmes propriétés d'indépendance que les q_i .

Ce filtre sera appelé "filtre d'écho aléatoire", ou "filtre de temps de vol". On peut combiner a) et b) par le filtre $D_i = q_i \delta_{a_i}$, les

q_i et a_i étant indépendants.

Par définition les divers paramètres associés à un processus ponctuel seront ceux de la mesure canonique $X(t)$. Nous omettrons de faire la distinction de langage.

La représentation des suites de points par une somme de fonctions δ a été utilisée par de nombreux auteurs, sans définition rigoureuse de la signification de ces symboles. En particulier Stratonovich [10] utilise ces notions et celle de fonctionnelle caractéristique pour calculer de manière formelle la moyenne et la covariance des processus ponctuels. Nous nous attacherons ici à établir ces formules de façon rigoureuse, tout en dégagant les principes d'une mesure expérimentale directe. Notons que Fortet [11] a étudié récemment les processus ponctuels à un niveau mathématique très élevé, par les fonctionnelles caractéristiques.



B - CARACTERISATION AU 2eme ORDRE DES PROCESSUS
PONCTUELS.

Stratonovich [10] introduit les fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t_1, t_2)$ qui donnent la probabilité $f_1(t) dt$ pour qu'il y ait un instant t_1 au moins dans le voisinage de t et la probabilité $f_2(t_1, t_2) dt_1 dt_2$ pour que les voisinages de t_1 et t_2 contiennent chacun au moins un instant de la suite $\{t_i\}$. Dans le dernier cas il faut strictement $t_1 \neq t_2$, sinon il y a dégénérescence, puisque si $t_1 = t_2$ l'existence d'un instant dans le voisinage de t_1 entraîne automatiquement celle d'un point dans le voisinage de t_2 . Donc pour $t_1 = t_2$, $f_2(t_1, t_2) dt_1 dt_2$ se réduit à $f_1(t_1) dt_1$. En posant $g_2(t_1, t_2) = f_2(t_1, t_2) - f_1(t_1) f_1(t_2)$ Stratonovich montre formellement que

$$C_X = \lambda \delta + g_2(\tau) \quad (27)$$

dans le cas stationnaire, ($t_2 - t_1 = \tau$).

[12] Notons que ces définitions sont proches de celles de Bartlett qui considère les "densités de covariance" pour $t_1 \neq t_2$:

$$E[dN(t_1) dN(t_2)] = f_2(t_1; t_2) dt_1 dt_2, \text{ où } N(t) \text{ est le}$$

nombre d'instants t_i dans un intervalle d'origine fixe et se terminant en t . Pour $t_1 = t_2$ $E[dN(t_1) dN(t_2)] = E[dN(t_1)]$ et il y a encore dégénérescence. Ces notions sont également considérées par Cox et Miller [13] qui dégagent aussi la formule (27). Cependant ni Bartlett, ni Cox et Miller n'utilisent (27) pour calculer convolutivement la covariance des filtrés de $X(t)$; ils ne mettent d'ailleurs par $\{t_i\}$ sous la forme (24).

La définition de $f_1(t)$ ne pose pas de problème mais l'utilisation générale de la fonction $f_2(t_1; t_2)$ se heurte à de grosses difficultés car pour de nombreux processus, f_2 ne peut pas être une fonction. Un exemple trivial est fourni par un processus de Poisson superposé à sa propre translatée de Δ : comme pour (21) on montre ici que:

$$C_X = \lambda \left[\delta + \frac{1}{2} \delta_{\Delta} + \frac{1}{2} \delta_{-\Delta} \right]$$



d'où d'après (27) on aurait :

$$g_2(\tau) = \frac{\lambda}{2} [\delta_{\Delta} + \delta_{-\Delta}]$$

En réalité cela signifie que tout instant t_i est suivi ou précédé (avec probabilité $\frac{1}{2}$) d'un autre instant t_j , avec un délai Δ , avec certitude. Donc $E [dN(t_1) dN(t_2)]$, par exemple, n'est pas seulement dégénéré pour $t_2 = t_1$ mais aussi pour $t_2 = t_1 \pm \Delta$.

La caractérisation au 2ème ordre doit donc être repensée. Elle peut être faite par un procédé analogue à celui utilisé pour définir les probabilités conditionnelles dans le cas général. Ce procédé est décrit en termes simples par Feller dans un ouvrage que nous désignerons par F 2 [14] (p. 154 - 160). Notant "il existe" par \exists et "voisinage de t " par $\mathcal{V}t$, on écrira par définition (en négligeant la probabilité de plusieurs points dans dt_1 ou dt_2):

$$\begin{aligned} \text{Pr} [\exists t_i \in \mathcal{V}t_1 \text{ et } t_j \in \mathcal{V}t_2] &= \text{Pr} [\exists t_i \in \mathcal{V}t_1] \times \text{Pr} [\exists t_j \in \mathcal{V}t_2 \mid t_i = t_1] \\ &= f_1(t_1) dt_1 \mathcal{U}(t_1, \mathcal{V}t_2) \end{aligned} \quad (28)$$

i n'étant pas nécessairement distinct de j . Ainsi $\mathcal{U}(t_1, \mathcal{V}t_2)$ est une mesure positive fonction du paramètre t_1 . Pour $t_1 = t_2$ $\mathcal{U} = 1$, (t_i coïncide avec lui-même) et la dégénérescence est donc levée.

Dans le cas stationnaire où nous nous plaçons \mathcal{U} dépend de $t_2 - t_1 = \tau$ seul. La condition $t_i = t_1$ s'exprime alors commodément par $t_i = 0$, en prenant cet instant arbitrairement pour origine.

Observons que si $N(A)$ est le nombre de t_j dans l'intervalle fermé A , sous condition que l'origine coïncide avec un t_i , on a :

$$E [N(A)] = \mathcal{U}(A)$$

Ceci découle de l'identité conditionnelle

$$\mathcal{U}(t_1, \mathcal{V}t_2) = E [dN(t_2) \mid t_1 = t_i]$$

qui exprime qu'un voisinage suffisamment petit de t_2 contient 0 ou 1 point t_j , ceci étant une conséquence de nos hypothèses, à savoir que $\{t_i\}$ ne présente pas de point d'accumulation. On peut



écrire alors pour $\tau \geq 0$

$$\hat{u}(\tau) = u([0, \tau]) \quad (29)$$

où $\hat{u}(\tau)$ est une fonction croissante de τ , analogue à une fonction de répartition ; $\hat{u}(0) = 1$. On peut définir, au sens des distributions, la mesure, ayant son support sur l'axe $\tau \geq 0$:

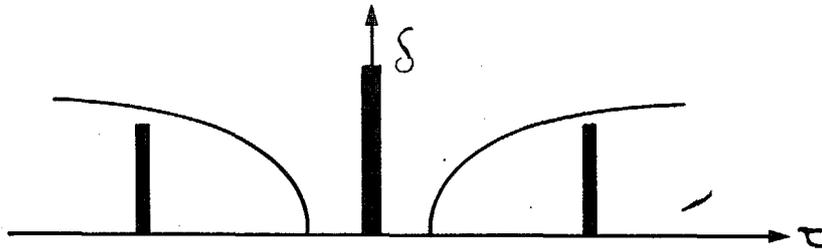
$$\mu(\tau) = \frac{d\hat{u}}{d\tau} \quad (30)$$

Comme $\hat{u}(0) = 1$, μ a une composante δ à l'origine.

Il faut noter que le 1er membre de (28) est symétrique par rapport à t_1 et t_2 ; dans le cas stationnaire $f_1(t) = cte = \lambda$

(densité des points t_i). On voit qu'alors $u(A)$ est une mesure

symétrique ; il devrait en être de même pour $\mu(\tau)$, qu'on peut donc étendre à tout l'axe τ en symétrisant (30). En résumé, on peut définir une densité conditionnelle d'arrivée des instants t_i , $\mu(\tau)$, qui est une mesure ≥ 0 , symétrique, ayant à l'origine une composante δ . Le schéma suivant symbolise $\mu(\tau)$,



qui peut avoir une composante continue et contenir éventuellement d'autres éléments δ . Nous écrirons encore (écrivant $T(|\tau|)$ pour $T + T^-$ pour une distribution de support $]0, \infty[$)

$$\mu(\tau) = \delta + m'(|\tau|) \quad (31)$$

pour isoler la composante δ à l'origine ; alors $m'(\tau)$ est souvent une fonction ordinaire définie pour $\tau > 0$, dérivée de $m(\tau)$. On posera $m(\tau) = \hat{u}(\tau) - 1$; c'est le nombre moyen de points dans l'intervalle $]0, \tau[$, le point t_i à l'origine n'étant pas compté.

Énumérons quelques propriétés de cette mesure. Pour $\tau \rightarrow \infty$ la condition $t_i = 0$ doit perdre son influence, puisque le processus est stationnaire. Donc il faut :

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\hat{u}(\tau + h) - \hat{u}(\tau)}{h} = \lambda \quad (31)$$



Si $m'(\tau)$ est une fonction, $m'(\tau) \longrightarrow \lambda$ pour $\tau \longrightarrow \infty$. Par ailleurs, la densité $\mu(\tau)$ est une mesure bornée, (au sens de Schwartz) et $\mu(\tau) - \lambda$ converge vers zéro à l'infini. $\tilde{u}(\tau) - \lambda\tau$ représente la différence entre le nombre moyen de points sur $[0, \tau]$, induit par la condition que l'origine coïncide avec t_i , et le nombre moyen sans condition, sur le même intervalle.

C - CAS DES PROCESSUS DE RENOUVELLEMENT

Ce cas éclaire parfaitement la nature de la mesure $\mu(\tau)$ (ou de $\tilde{u}(\tau)$). $\mu(\tau)$ est alors la densité de renouvellement et $\tilde{u}(\tau)$ a pour expression, selon Feller (F 2 p. 182) :

$$\tilde{u}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(\tau) \quad (32)$$

$F(\tau)$ étant la fonction de répartition des intervalles et $*$ désignant la convolution entre fonctions de répartition. Feller montre que la série (32) converge toujours, pour tout τ . (F 2, p. 183)

Ainsi :

$$\mu(\tau) = \delta + \sum_{n=1}^{\infty} h^{*n}(|\tau|) \quad (33)$$

où $h(\tau) = \frac{dF(\tau)}{d\tau}$ peut être une mesure, et cette série est toujours définie. On a ainsi $m'(|\tau|) = \mu(\tau) - \delta$

Ainsi $\tilde{u}(\tau)$ et $\mu(\tau)$ n'apparaissent que comme une extension de la densité de renouvellement à des processus ponctuels plus généraux. Pour souligner cette analogie nous avons d'ailleurs adopté les notations de Feller. Celui-ci montre également (F 2, p. 347) que (31) est satisfait (théorème de Blackwell) lorsque $F(\tau)$ n'est pas arithmétique (ce qui est vrai pour les processus stationnaires).

L'application des processus de renouvellement aux problèmes de comptage en physique nucléaire a été discutée en détail par Bharucha - Reid [15] sur la base des théories de Feller et de Takács, exposées en partie par ce dernier dans [16], Takács a aussi étudié [17] en détail les f.a. engendrées par un tel processus dès 1956. La covariance de ces processus peut être déduite de ses travaux.

Takács définit la f.a. non stationnaire

$$\eta(t) = \sum_{0 < t_n \leq t} \psi(t - t_n, z_n) \quad (34)$$

où $\psi(t, z)$ est une fonction nulle pour $t < 0$, où les t_n sont de



renouvellement avec pour fonction de répartition des intervalles $L, F(\ell)$, et où les z_n sont des v.a. équiréparties indépendantes des t_n et entre elles.

Il montre que pour $t \rightarrow \infty \eta(t) \rightarrow \eta^*(t)$ stationnaire

- à condition que
- $F(\ell)$ est non arithmétique
 - la moyenne $E[L] = \bar{L}$ est finie
 - $\int_0^{\infty} E_z [|\psi(t, z)|] dt < \infty$

en d'autres termes $\lambda = 1/\bar{L}$ est non nul et le filtre aléatoire $\psi(t, z_n)$ est sommable en moyenne. Takács démontre directement avec une grande rigueur, en utilisant le théorème de Blackwell, qu'on a (avec nos notations) :

$$E[\eta^*(t)] = \lambda \int_0^{\infty} E_z [\psi(t, z)] dt \quad (35 a)$$

et

$$C_{\eta^*}(\tau) = \lambda \left\{ \int_0^{\infty} E_z [\psi(t, z) \psi(t-\tau, z)] dt + E_z [\psi(\tau, z)] * E_z [\psi(-\tau, z)] * m'(|\tau|) - \left\{ E[\eta^*(t)] \right\}^2 \right\} \quad (35 b)$$

Pour $\psi(t, z) = \varphi(t)$ on a donc

$$E[\hat{X}(t)] = \lambda \int \varphi(t) dt$$

$$C_{\hat{X}}(\tau) = \lambda \left\{ \varphi(\tau) * \varphi(-\tau) * [\delta + m'(|\tau|) - \lambda] \right\}$$

car $1 * \varphi(\tau) * \varphi(-\tau) = \left[\int \varphi(t) dt \right]^2$

On a donc d'après (4) et (7)

$$\left. \begin{aligned} E[\hat{X}(t)] &= \bar{X} = \lambda \\ C_{\hat{X}}(\tau) &= \lambda (\mu(\tau) - \lambda) = \lambda (\delta + m'(|\tau|) - \lambda) \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Ce résultat fondamental montre que $[C_{\hat{X}}(\tau) + \lambda^2] \lambda^{-1}$ est identique avec la mesure conditionnelle $\mu(\tau)$. Une formule similaire a été établie par calcul formel par Bonnet [18], avant sa théorie générale [3], et utilisée pour étudier les propriétés spectrales des processus de renouvellement. Un corollaire de



(36) est que pour qu'un processus de renouvellement soit de Poisson il faut et il suffit qu'il soit à corrélation microscopique.

On peut tirer de (35) un résultat plus général :

Si D_i est un filtre distributif aléatoire limité à gauche, $D_i \in \mathcal{D}_L^1$, $\psi(t, z_i) = D_i * \varphi \in \mathcal{D}_L^1$ et les conditions de validité de (35) sont satisfaites. Alors

$$E[\hat{X}_A(t)] = \lambda \int E[D_i * \varphi] dt$$

D'après (4) on peut considérer D_i comme un d. a. et définir sa moyenne par

$$E[D_i] * \varphi = E[D_i * \varphi]$$

donc

$$\begin{aligned} E[\hat{X}_A(t)] &= \lambda \int E[D_i] * \varphi dt \\ &= \lambda \int \varphi dt \langle E[D_i], 1 \rangle \end{aligned}$$

Donc d'après (4 bis)

$$\bar{X}_A = \lambda \langle E[D_i], 1 \rangle \quad (37)$$

en analogie avec (17) ; l'intégrale du filtre moyen $E[D_i]$ existe puisque $D_i \in \mathcal{D}_L^1$

Pour la covariance, on a par un calcul analogue

$$C_{X_A}(\tau) = \lambda \left\{ E[D_i * \bar{D}_i] + E[D_i] * E[\bar{D}_i] * m'(|\tau|) \right\} - \bar{X}_A^2 \quad (38)$$

Appliquons ce résultat au filtre (25)

$$\text{Si } X_A(t) = \sum q_i \delta_{t_i} \quad E[D_i] = \delta E[q_i] = \delta \bar{q}_i$$

$$\langle E[D_i], 1 \rangle = \bar{q}_i \quad D_i * \bar{D}_i = \delta q_i^2 \quad E[D_i * \bar{D}_i] = \delta E[q_i^2] = \delta \bar{q}_i^2$$

$$\text{et } \bar{X}_A = \lambda \bar{q}_i$$

$$C_{X_A}(\tau) = \lambda \left\{ \bar{q}_i^2 \delta + \bar{q}_i^2 [m'(|\tau|) - \lambda] \right\} \quad (39)$$



Ce résultat généralise celui obtenu déjà en 1953 par Rice [19] dans un cas particulier.

Appliquons ce résultat au filtre (26). Ici $D_i = \delta_{a_i}$; soit $r(a)$ la densité de probabilité des a_i , une mesure.
 $E [D_i] * \varphi = E [\varphi(t - a_i)] = \varphi(t) * r(t)$ comme on peut le montrer aisément. Donc

$$E [(D_i)] = r(t) \text{ et comme } \langle r(t), 1 \rangle = 1 \text{ (} r(t) \text{ normée)}$$

$$\bar{X}_A = \lambda$$

Ceci était nécessaire puisque D_i ne change pas le nombre de points.

$$\text{De plus, } E [D_i * D_i^-] = E [\delta_{a_i} * \delta_{-a_i}] = \delta$$

Il vient

$$C_{X_A}(\tau) = \lambda \left\{ \delta + r(\tau) * r^-(\tau) * m'(|\tau|) \right\} - \bar{X}_A^2 \quad (40)$$

D'autres résultats peuvent être aisément tirés de (38)

Il faut ici faire 2 remarques :

a) $m'(\tau)$ se calcule aisément par transformation de Laplace mais l'inversion est en général difficile [14, 15, 16, 17, 18]. Son calcul est aisé cependant sur calculatrice électronique par la formule (33), comme somme des autoconvoluées de $h(\mathcal{L})$, la densité des intervalles. Nous avons élaboré un tel programme, qui est disponible. La signification intuitive de $m'(\tau)$ comme donnant la probabilité de trouver au voisinage de τ un point t , qui soit le 1er, le 2è etc... apparaîtra très clairement dans les mesures expérimentales.

b) Les formules (36), (39) et (40) sont d'une importance fondamentale pour l'étude des circuits de détection de particules, en particulier celle des phénomènes de temps mort. On illustrera expérimentalement ces notions.

D - CAS GENERAL: MOYENNE ET COVARIANCE

Nous allons montrer que les formules (36), (39) et (40) sont valables pour tout processus ponctuel, compte tenu des



définitions (30) et (31) de $\mu(\tau)$ et $m'(\tau)$. La rigueur de ces démonstrations n'égalera pas celle de Takacs et appelle probablement des justifications plus précises.

1ère démonstration

Ecrivons

$$\hat{X}(t) = \int \varphi(t - \theta) dN(\theta)$$

sous forme d'une intégrale de Stieltjes. On admettra qu'on peut permuter $E[\]$ avec \int dans les intégrales stochastiques qui suivent. On donne ce calcul succinctement, la 2ème démonstration étant plus instructive pour la suite.

$$a) E[\hat{X}(t)] = \int \varphi(t - \theta) E[dN(\theta)] = \lambda \int \varphi(t - \theta) d\theta$$

et d'après (4), on a comme dans (36) :

$$E[X(t)] = \lambda = \bar{X}$$

$$b) \hat{X}(t) \hat{X}(t + \tau) = \iint \varphi(t - \theta) \varphi(t + \tau - \theta - \ell) dN(\theta) dN(\theta + \ell)$$

En utilisant (28) et (29) on a :

$$\begin{aligned} E[\hat{X}(t) \hat{X}(t + \tau)] &= \iint \varphi(t - \theta) \varphi(t + \tau - \theta - \ell) \lambda d\theta d\hat{U}(\ell) \\ &= \lambda \int \varphi(t - \theta) d\theta (\varphi * \mu)_{t + \tau - \theta} \\ &= \lambda \varphi(-\tau) * \varphi(\tau) * \mu \end{aligned}$$

Donc

$$E[\hat{X}(t) \hat{X}(t + \tau)] - E[\hat{X}(t)]^2 = \lambda[\mu - \lambda] * \varphi(\tau) * \varphi(-\tau)$$

$$\text{et } C_X(\tau) = \lambda(\mu - \lambda) = \lambda(\delta + m'(|\tau|) - \lambda)$$

ce qui est bien identique à (36). Une formule similaire a été établie récemment par Bonnet [20] qui utilise la théorie exposée dans [3] et l'intégrale de Stieltjes.

2ème démonstration

Nous utiliserons ici le passage à la limite pour calculer C_X selon (22) et (23). Introduisons le processus $X_e(t)$ correspondant à la suite $\{t'_i\}$ extraite de $\{t_i\}$ par effacement à temps mort



fixe ϵ (on efface tout point prédédé d'un autre de moins de ϵ).
Comme $\{t_i\}$ est sans point d'accumulation :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} X_{\epsilon}(t) = X(t) \quad (41)$$

$X_{\epsilon}(t)$ a pour densité $\lambda - \epsilon$ et pour mesure conditionnelle d'arrivée U_{ϵ} , de densité μ_{ϵ} . (41) entraîne que $U_{\epsilon} \rightarrow U$ et $\mu_{\epsilon} \rightarrow \mu$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$.

$$\text{Considérons } Y_T^1 = X_{\epsilon}(t) * R_T(t)$$

$$Y_{T'}^2 = X_{\epsilon}(t) * R_{T'}(t)$$

où comme plus haut, $R_T(t)$ est le rectangle à droite normé de base T . On impose T et $T' < \epsilon$. Il ne peut donc y avoir empiètement des signaux et Y_T^1 ne peut prendre que les valeurs 0 et $\frac{1}{T}$; c'est une fonction binaire. Il en est de même pour $Y_{T'}^2$.

$$\begin{aligned} \text{a) } E \left[Y_T^1(t) \right] &= \frac{1}{T} \Pr \left[Y_T^1(t) = \frac{1}{T} \right] \\ &= \frac{1}{T} \Pr \left[\exists \text{ un } t_i \in (t, t - T) \right] \\ &= \frac{1}{T} (\lambda - \epsilon) T = \lambda - \epsilon \end{aligned}$$

Lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ $E \left[Y_T^1(t) \right] \rightarrow \lambda$ et puisque $R_T \rightarrow \delta$,

d'après (41) et (17), de façon similaire à (22) on a bien $\bar{X} = \lambda$.

b) Pour calculer la covariance considérons l'auto-inter-corrélation de $X_{\epsilon}(t)$, selon (20 ter) :

$$C_{Y_T^1 Y_{T'}^2} = E \left[Y_T^1(t) Y_{T'}^2(t + \tau) \right] - (\lambda - \epsilon)^2 = \Gamma - (\lambda - \epsilon)^2$$

Le produit entre crochets ne peut valoir ici que 0 ou $1/TT'$

$$\begin{aligned} \text{et } \Gamma &= \frac{1}{TT'} \Pr \left\{ \exists t_i \in [t, t - T] \text{ et } t_j \in [t + \tau, t + \tau - T'] \right\} \\ &= \frac{1}{TT'} \left[(\lambda - \epsilon) T U_{\epsilon}([\tau, \tau - T']) \right] \end{aligned}$$

d'après (28). L'égalité est stricte, car, vu le temps mort, il ne peut tomber qu'un seul point sur T et T' , même non infinitésimaux.



On peut faire tendre T vers zéro ($R_T \rightarrow \delta$) et on a

$$\Gamma = \frac{1}{T'} \left[(\lambda - e) U_e([\tau, \tau - T']) \right]$$

Or la mesure de l'intervalle $[\tau, \tau - T']$ peut s'exprimer par la convolution (par définition), τ étant pris comme variable.

$$U_e([\tau, \tau - T']) = \mu_e(\tau) * r_{T'}(\tau) \quad (42)$$

où $r_{T'}(\tau)$ est le rectangle à droite de base T' , de hauteur unité.

Or $R_{T'}(\tau) = \frac{1}{T'} r_{T'}(\tau)$; donc

$$\Gamma = (\lambda - e) \mu_e(\tau) * R_{T'}(\tau)$$

Si donc $T' \rightarrow 0$, $R_{T'} \rightarrow \delta$ et

$$\Gamma = (\lambda - e) \mu_e(\tau).$$

Si alors on fait tendre $e \rightarrow 0$, d'après (23 bis)

$$C_X = \lambda \mu(\tau) - \lambda^2 = \lambda(\mu(\tau) - \lambda)$$

prouvant la validité de (36). La même démonstration peut prouver la validité générale de (39), comme on peut le voir aisément.

Cette démonstration, contient, comme on le verra, tous les éléments pour la définition de la mesure expérimentale des covariances dans le domaine temporel.

E - CAS GÉNÉRAL : INTER - COVARIANCE

La caractérisation de l'interdépendance de 2 suites $\{t_i\}$ et $\{t'_i\}$ ou des mesures canoniques $X(t)$ et $Y(t)$ peut se faire par un procédé analogue à celui utilisé pour définir U , \hat{U} et μ . On utilisera ici la mesure $U_{X_i}(t, A)$ donnant la valeur moyenne du nombre de points de $Y(t)$ tombant dans l'intervalle A , lorsque t coïncide avec un point de $X(t)$. Définitions, propriétés et calculs sont analogues à ceux relatifs à la covariance, si ce n'est que :

- μ_{XY} n'a plus de composante δ à l'origine
(sauf si $Y(t)$ contient des points de $X(t)$)

- μ_{XY} n'est plus symétrique



Par un raisonnement analogue au précédent, on montre que l'on a

$$C_{XY} = \lambda_X (\mu_{XY} - \lambda_Y) \quad (43)$$

F - QUELQUES CALCULS EXPLICITES

1) Filtre de temps de vol : covariance

Le cas de renouvellement a été vu (formule 40). Calculons μ_{X_A} dans le cas général. Le filtre ne change pas la densité :

donc $C_{X_A} = \lambda (\delta - m'_A(|\tau|) - \lambda)$ et il suffit de calculer

$m'_A(|\tau|)$. Ceci a été fait dans le cas continu par Cox et Miller [13] (p. 363). Un point t'_i de X_A provient en fait d'un déplacement a_i d'un point t_i de X ; de même pour t'_j , le déplacement étant a_j . Leur distance originale est changée de $d = a_j - a_i$

Grâce à l'indépendance

$m'_A(\tau) = m'(\tau) * g(\tau)$ où $g(d)$ est la densité de d . Or $g(\tau) = \nu(\tau) * \bar{\nu}(\tau)$, $\nu(a)$ étant la densité des a_i .

Finalement

$$C_{X_A}(\tau) = \lambda (\delta - m'(|\tau|) * \nu(\tau) * \bar{\nu}(\tau)) - \bar{X}_A^2$$

identique à (40), qui a donc une validité générale.

2) Filtre de temps de vol : intercovariance

Un raisonnement identique montre qu'ici si $X_1 = \sum \delta_{t_i + a_i}$ et $X = \sum \delta_{t_i}$

$$X_2 = \sum \delta_{t_j + b_j} \quad \text{avec} \quad Y = \sum \delta_{t_j}$$

alors

$$\mu_{X_1 X_2} = \mu_{X Y} * \nu_a^-(\tau) * \nu_b(\tau) \quad (44)$$

ν_a et ν_b étant les densités des a_i et b_i



En particulier, si $X = X_1 = Y$ (donc $\tau_a = \delta$)

$$\mu_{XY_1} = \mu_X * \tau_b(\tau)$$

Cette formule est fondamentale pour les mesures de spectres de temps de vol, puisque, si $X(t)$ est de Poisson

$$\mu_{XY_1} = \tau_b(\tau) \quad (45)$$

et une mesure d'intercorrélacion donne directement le spectre des retards (voir plus bas). Ce résultat a été établi par Blanc-Lapierre et Dumontet [21] dans le cas poissonnien. Observons que tout se passe pour μ comme si les suites X et Y avaient été filtrées par un filtre dont la réponse est la densité des retards.

3) Processus de Poisson stratifiés

Ce sont des processus dont la densité $\lambda_0(t)$ est une f.a. $\gg 0$ stationnaire, ainsi dénommés par Feller. Nous établissons ici à titre d'illustration deux formules fondamentales bien connues qui jouent un grand rôle dans la théorie du comptage de photons isolés.

Supposons $\lambda_0(t) \in \mathcal{U}_e$. Alors

$$E[X(t) | \ell] = \ell \quad \text{donc}$$

$$E[X(t)] = E[\lambda_0(t)] = \bar{\lambda}_0$$

Par ailleurs, la probabilité conditionnelle, pour $\lambda_0(t_1) \in \mathcal{U}_{\ell_1}$ et $\lambda_0(t_2) \in \mathcal{U}_{\ell_2}$, pour qu'il existe $t_i \in \mathcal{U}_{t_1}$ et $t_j \in \mathcal{U}_{t_2}$ est $\ell_1 \ell_2 dt_1 dt_2$, puisque chaque réalisation est de Poisson et il y a indépendance pour les intervalles disjoints ($t_1 \neq t_2$). Moyennant, on a, d'après (26) et (31) :

$$\bar{\lambda}_0 m'(|\tau|) = E[\lambda_0(t_1) \lambda_0(t_2)]$$

finalement, $\lambda_0(t)$ étant stationnaire :

$$C_X = \bar{\lambda}_0 \delta + C_{\lambda_0}(\tau) \quad (46)$$

Si on intercorrèle deux suites X et Y indépendantes de même densité $\lambda_0(t)$, le raisonnement reste vrai, mais la composante δ à l'origine disparaît.



Alors

$$C_{X_1}(\tau) = C_{\lambda_0}(\tau) \quad (41)$$

Cette formule montre que la covariance reste invariante pour ce processus, si on fait la mesure par intercorrélation.

III - APPLICATIONS EXPERIMENTALES

A - MESURES EXPERIMENTALES

Nous ne pouvons ici exposer en détail l'aspect technique des méthodes de mesure faute de place ; nous en indiquerons les principes et la justification. La technique consiste essentiellement à utiliser de façon adéquate un dispositif rapide de moyennage digital, utilisé habituellement pour améliorer le rapport signal sur bruit. D'usage routinier dans le domaine lent, un tel dispositif n'a été développé que récemment dans le domaine rapide ; on en trouvera une description dans [22 et 23]. La figure (2) donne le schéma de principe de l'appareil. Un oscilloscope à échantillonnage examine la valeur du signal avec un délai τ par rapport au déclenchement. L'adresse du sélecteur est automatiquement positionnée sur un canal dont le rang est en relation linéaire avec τ . Si le signal à l'instant d'échantillonnage dépasse un certain seuil μ , le dispositif ajoute +1 dans le canal correspondant à τ . Le dispositif balaie séquentiellement tous les délais et recommence le cycle quand le nombre maximal de canaux est atteint. Il faut noter que l'échantillonnage ne dure, pour un appareil moderne, que 20 picosecondes et qu'ainsi des phénomènes évoluant en moins de 1 nanoseconde peuvent être étudiés en détail. La bande passante équivalente est de 12 GHz.

La mesure d'une covariance de processus ponctuel est effectuée de la façon suivante. Les instants t_i déclenchent un discriminateur (d'une façon ou d'une autre, il y en a bien un dans le système à examiner) qui émet un signal standard de forme fixe, dont la largeur au niveau μ est τ . Le discriminateur présente un temps mort e , qui définit la limite inférieure des intervalles séparant deux t_i que l'on pourra distinguer. Le signal est appliqué à l'oscilloscope, sur les deux entrées. Le déclenchement est pratiquement synchrone avec le front avant des signaux, donc donne la condition que l'origine des délais soit t_i . L'appareil comptera +1 à chaque fois que l'instant $t_i + \tau$ a été précédé, à moins de e , par un instant t_j . On relève donc un histogramme qui tend strictement vers

$$\mu_e(\tau) * \tau(\tau)$$

selon (42). En réalité on effectue ainsi "l'auto-intercorrélation" des t_i avec la f.a. engendrée par les t_i et le rectangle $\tau(\tau)$



(amplitude unité, donc + 1 en cas de présence de signal). On voit que la mesure suit exactement la 2ème démonstration exposée plus haut. Le temps mort du discriminateur introduit une limite inférieure de précision, qu'on peut surmonter dans certains cas par des mises en formes par circuit passif ; des intervalles de récurrence de l'ordre de la nanoseconde peuvent être facilement examinés. Quand à la largeur T du signal, donc de $\tau_T(\tau)$, elle peut être rendue aisément inférieure à la nanoseconde.

Notons que l'inter-covariance C_{XY} se mesure de la même façon: on applique $X(t)$ au déclenchement et $Y(t)$ à l'entrée signal et on obtient

$$\mu_{XY}(\tau) * \tau_T(\tau)$$

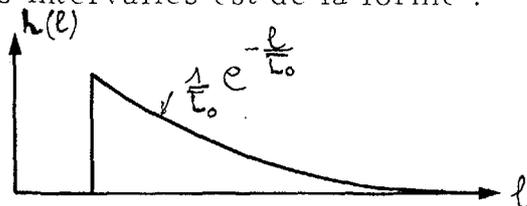
B - COINCIDENCES

Il est clair que la mesure $U_{XY}(t, A)$ décrit entièrement la "coincidence différée" classique. Celle-ci apparaît donc comme une simple intercorrélation et le dispositif ci-dessus ne fait qu'exécuter de façon automatique la variation des délais. Le "temps de résolution" est la largeur T de $\tau_T(\tau)$. Cependant la coïncidence est usuellement une opération symétrique. Ainsi dans une auto-coïncidence la courbe de délai est symétrique: c'est la symétrisée par rapport à l'origine de la branche positive de $\mu_X(\tau) * \tau_T(\tau)$.

C - ILLUSTRATIONS EXPERIMENTALES

a) Temps mort

Nous avons étudié le processus de renouvellement obtenu lorsqu'une suite de Poisson attaque un dispositif à temps mort. On sait que la loi des intervalles est de la forme :



La figure(3) montre $m'(\tau)$ calculé pour diverses valeurs de \bar{L}_0/e . On voit que lorsque ce rapport diminue $m'(\tau)$ devient violemment oscillant. $m'(\tau) \rightarrow \bar{L} = (\bar{L}_0 + e)$ à l'infini, mais cette limite n'est atteinte qu'assez lentement, sauf pour \bar{L}_0 e très grand. Ainsi dans les mesures de "fortuites" par coïncidence différée, on doit bien prendre garde à introduire un délai suffisant.



La figure(4) montre $\mu(\tau)$ pour un discriminateur attaqué par un processus de Poisson de densité 14 000 coups par seconde ; τ valait 15 ns. La composante δ de $\mu(\tau)$ se manifeste sous la forme de 2 canaux contenant un chiffre très élevé ; on a noté son emplacement par une flèche. La composante continue $m'(\tau)$ est ici un échelon ; le temps mort est, d'après la figure, de 325 ns. On a donc ici un $m'(\tau)$ presque idéal pour $\bar{L}_0/e \approx 200$. La figure (5) montre un résultat analogue pour un discriminateur plus lent, pour 32 000 coups/seconde. Le temps mort est ici de 16 μ s et les oscillations de $m'(\tau)$ apparaissent, puisque $\bar{L}_0/e \approx 2$. La figure (6 a) montre le résultat lorsque le même discriminateur est attaqué à raison de 450000 coups par seconde. Ici $\bar{L}_0/e \approx 1,8$ et les oscillations de $m'(\tau)$ apparaissent de façon frappante ; la figure(6 b) montre la courbe en échelle logarithmique.

Il faut observer que de telles mesures constituent un puissant outil d'étude des propriétés statistiques des discriminateurs rapides.

b) Echos

La figure(7) montre un phénomène typique d'écho provenant du filtrage par une ligne ouverte de 225 ns de temps de réflexion, d'un processus ponctuel rapide provenant d'un discriminateur non-idéal. Elle illustre la formule :

$$C'(\tau) = 2 C(\tau) + C(\tau + \Delta) + C(\tau - \Delta)$$

exprimant l'effet de l'écho. Les composantes δ apparaissent bien, mais leur amplitude n'est pas significative (saturation de la visualisation).

c) Temps de vol

Les phénomènes de temps de vol ont été simulés au moyen d'un convertisseur analogique digital : le début d'analyse fournit les instants t_i de $X(t)$, la fin, les instants t'_i de $Y(t)$. $Y(t)$ est le filtré de $X(t)$ par un "filtre de temps de vol" aléatoire. On sait que le temps d'analyse est en relation linéaire avec l'amplitude. Le temps d'analyse minimal est de 10 μ s ; ce retard minimal de t'_i par rapport à t_i simule bien la détection des rayons γ , qui arrivent groupés, avant les particules lourdes. La figure(8 a) montre un spectre d'amplitude provenant du codeur, stocké de la façon usuelle (scintillateur NaI(Tl) et source de Co^{60}) et la figure(8 b) l'intercorrélacion de $X(t)$ et $Y(t)$. On voit que celle-ci est une reconstitution fidèle du spectre original.



Le résultat de la figure (8 b) a été obtenu à un taux de comptage relativement bas, les seuls instants intervenant dans le canal signal ($Y(t)$) étant les t'_i . Dans les expériences réelles de nombreuses impulsions non corrélées avec les t'_i peuvent être fournies par les détecteur qui repère la fin des vols, i provenant du bruit de fond. La voie signal (fig. 2) véhicule alors un processus $Y'(t) = Y(t) + B(t)$ où $B(t)$ n'est pas corrélé avec $Y(t)$ (ni donc avec $X(t)$). L'intercorrrelation $C_{X'Y'}$ est identique à C_{XY} à cause de cette indépendance et la mesure n'est pas perturbée par $B(t)$ (sauf en ce qui concerne la rapidité d'acquisition des résultats avec une précision statistique donnée). La figure (9 a) montre un spectre analogue à (8 a) et la figure (9 b) un spectre analogue à (8 b) et correspondant à (9 a), mais obtenu ici en présence d'un taux de comptage de bruit de fond $B(t)$ de 500 000 coups par seconde. On voit que le spectre est bien extrait, superposé au fond continu, contribution de $B(t)$ à $\mu_{X'}$.

La procédure usuelle est non pas de faire l'intercorrrelation $C_{X'Y'}$ mais l'histogramme des intervalles $t'_i - t'_i$. Dans ce cas le bruit $B(t)$ peut distordre complètement le spectre original. La figure (10) illustre ce phénomène. Un convertisseur temps - amplitude a été utilisé pour une mesure analogue à celle de la figure (9 b) (une source de Cs^{137} ayant été utilisée ici). En l'absence de bruit on a un spectre correct (pic le plus haut); en présence de 230 000 coups par seconde de bruit le pic est atténué d'un facteur 3. On peut conclure que l'intercorrrelation serait préférable pour ce genre de mesure, comme l'ont montré par le calcul Blanc-Lapierre et Dumontet [21]. Les convertisseurs temps - amplitude s'imposent cependant, car ils ont une haute efficacité, alors qu'un corrélateur tel que celui décrit ici n'examine qu'un seul délai à la fois. Ce corrélateur est donc d'une grande utilité pour des études de processus stochastiques. Il ne peut pas servir directement dans son état actuel dans des expériences de physique nucléaire.

REMERCIEMENTS

Monsieur BLANC-LAPIERRE nous a prodigué tout au long de ce travail son soutien, ses encouragements et ses conseils. Nous l'en remercions ici très vivement. Nous remercions aussi Monsieur BONNET pour nous avoir communiqué les résultats de ses derniers travaux.



APPENDICES

On rappellera très brièvement quelques théorèmes sur les distributions exposés dans S 2 et S M.

1) a) $T * \varphi = \langle T_\theta, \varphi(t - \theta) \rangle$ et est indéfiniment dérivable donc $\langle T, \varphi \rangle = (T * \varphi^-)_{t=0} = T_2 (T * \varphi^-)$

Ainsi la connaissance de $T * \varphi^-$ donne par définition celle de T , par la trace ; de même $T * \varphi$, donne T^- donc aussi T (voir plus bas)..

b) Si $\varphi \longrightarrow S$ $T * \varphi \longrightarrow T$ pour la convergence de l'espace des distributions.

c) Si T décroît assez vite à l'infini, on a aussi pour une fonction $\alpha(t)$ à support non borné et indéfiniment dérivable :

$$T * \varphi = \langle T_\theta, \alpha(t - \theta) \rangle$$

Par exemple, si $T \in \mathcal{D}'_L 1$ et $\alpha(t)$ borné, la formule tient (voir plus bas). Donc :

$$T * 1 = \langle T, 1 \rangle$$

c'est l'intégrale de T sommable. Si $\alpha \in \mathcal{D}'_L 1$ et $\alpha \longrightarrow S$, $T * \alpha \longrightarrow T$.

II - COMPORTEMENT A L'INFINI DES DISTRIBUTIONS

a) Une distribution est bornée si $T * \varphi$ est bornée pour tout φ ; ceci montre bien que $E[X(t)]$ dans (4) est bornée.

b) $T \in \mathcal{D}'_L 1$ si $T * \varphi$ est sommable pour tout φ , ou si T est somme finie de dérivés de fonctions sommables. T opère alors sur les fonctions indéfiniment dérivables bornées. Pour $\mathcal{D}'_L 2$ même définition avec "carré sommable".

c) Si T est bornée et $K \in \mathcal{D}'_L 1$, $S * K$ existe et est bornée

d) $\alpha(t) \in \mathcal{D}'_L 1$ si c'est une fonction indéfiniment dérivable et si elle même et ses dérivées sont sommables.

e) Si T est bornée et $\alpha(t) \in \mathcal{D}'_L 1$ alors $T * \alpha(t)$ est bornée.

f) Si $T \in \mathcal{D}'_L 1$ et $\alpha(t) \in \mathcal{D}'_L 1$, $T * \alpha(t) \in \mathcal{D}'_L 1$; à fortiori $T * \varphi \in \mathcal{D}'_L 1$.



III - Par définition :

$$\langle D^-, \varphi(t) \rangle = \langle D, \varphi(-t) \rangle$$

On a : — $(T * K)^- = T^- * K^-$

$$-\langle \delta'_-, \varphi \rangle = \langle \delta', \varphi(-t) \rangle = \varphi'(t) = \langle -\delta', \varphi \rangle$$

$$\text{donc } \delta'_- = -\delta'$$

— Le support de D^- est symétrique de celui de D .

Le produit $D * D^-$ n'existe pas toujours.

Pour qu'il existe il suffit que $D \in \mathcal{D}'_L 1$. Alors $D * D^- \in \mathcal{D}'_L 1$. Il existe aussi pour $D \in \mathcal{D}'_L 2$; alors $D * D^-$ n'est que bornée.

REFERENCES

- 1) - MOURIER (E), Eléments aléatoires dans un espace de Banach, Ann. Inst. Henri Poincaré (1953) 13, 161
 FORTET (R), MOURIER (E) Convergence de la répartition empirique vers la répartition théorique, Annales Sci. Ecole Normale Supérieure Paris (1953) 70, 267
- 2) - GELFAND (I. M.) Processus aléatoires généralisés. Dokl. Akad. Nauk. U.R.S.S. (1955) 100, 853
- 3) - BONNET (G) Considérations sur la représentation et l'analyse harmonique des signaux déterministes ou aléatoires. Annales Télécom. (1968), 23, 62
- 4) - SCHWARTZ (L) Théorie des distributions - Tomes I et II, Hermann, Paris, (1957)
- 5) - SCHWARTZ (L) Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques, Hermann, Paris, (1961)
- 6) - BLANC-LAPIERRE (A), FORTET (R) Théorie des fonctions aléatoires, (1953) Masson, Paris p. 161 et p. 347
- 7) - AMSEL (G), BOSSHARD (R), ZAJDE (C), Processing of detector signals at very high counting rates for precision pulse - height analysis, (1967) IEEE Transactions NS - 14, n° 1, p. 1



- 8) - AMSEL (G) Noise theory for pulse amplifiers using time domain analysis and correlation techniques, Gattlinburg conference on particle detection, Mai 1967
- 9) - BONNET (G) Filtrés aléatoires et stationnarisation de signaux périodiques mêlés de bruit. Annales Télécom. (1968), 23, 271
- 10) - STRATONOVICH (R. L.) Topics in the theory of random noise I, (1963) Gordon and Breach, London, p. 150
- 11) - FORTET (R) Sur les répartitions ponctuelles aléatoires, en particulier de Poisson. Ann. Inst. Henri Poincaré B (1968), 4, 99
- 12) - BARTLETT (M. S.) Stochastic processes, (1955) University Press. Cambridge, p. 79 et 166
- 13) - COX (D. R.) et MILLER (H. D.) The theory of stochastic processes (1965) Methuen, London p. 368
- 14) - FELLER (W) An introduction to probability theory and its applications, II, (1966), John Wiley, New York
- 15) - BHARUCHA - REID (A. T.) Elements of the theory of Markov Processes (1960), Mc Grawhill, New-York, p. 299
- 16) - TAKÁCS (L) Stochastic processes (1960) Methuen, New-York et Processus stochastiques (1964), Dunod, Paris.
- 17) - TAKÁCS (L) On secondary stochastic processes generated by recurrent processes
Acta. Math. Acad. Sci. Hung (1956), 2, 17
- 18) - BONNET (G) Sur le spectre de certaines fonctions aléatoires associées à des processus de renouvellement C.R. Acad. Sci. Paris (1965), 261, 5307
- 19) - RICE (S. O.) "Mathematical analysis of random noise" dans Noise and stochastic processes, (1954) Dover, New-York, p. 156
- 20) - BONNET (G) Communication privée
- 21) - BLANG-LAPIERRE (A) et DUMONTET (P)
Etude d'un modèle statistique introduit par les techniques de temps de vol ou par l'étude des fluctuations de temps de transit. (1960)
C.R. Acad. Sci. Paris, 250, 1216



22) - BOSSHARD (R) Statistical analysis of fast fluctuating signals using sampling techniques, Cattlinburg conference on particle detection, Mai 1967

23) - AMSEL (G) et BOSSHARD (R) en rédaction

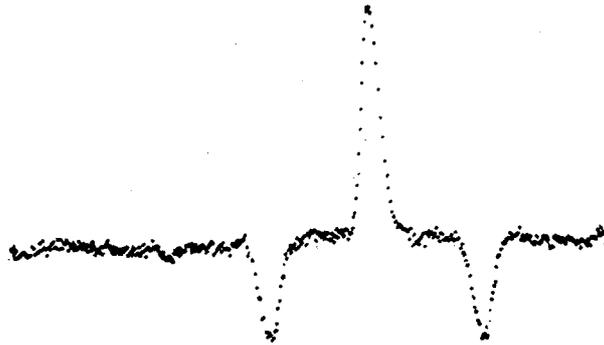


FIG. 1
 $H=1\text{ns}/\text{can.}$

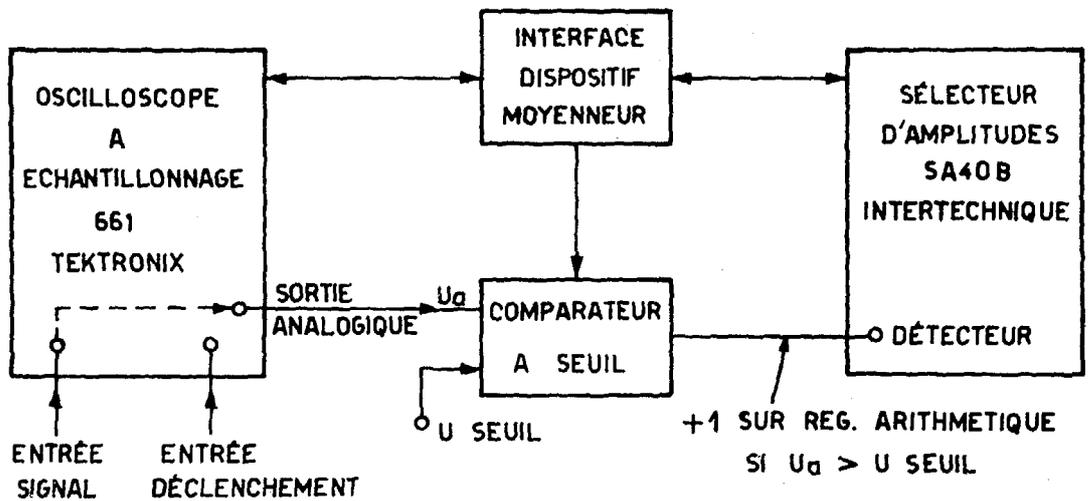


FIG. 2

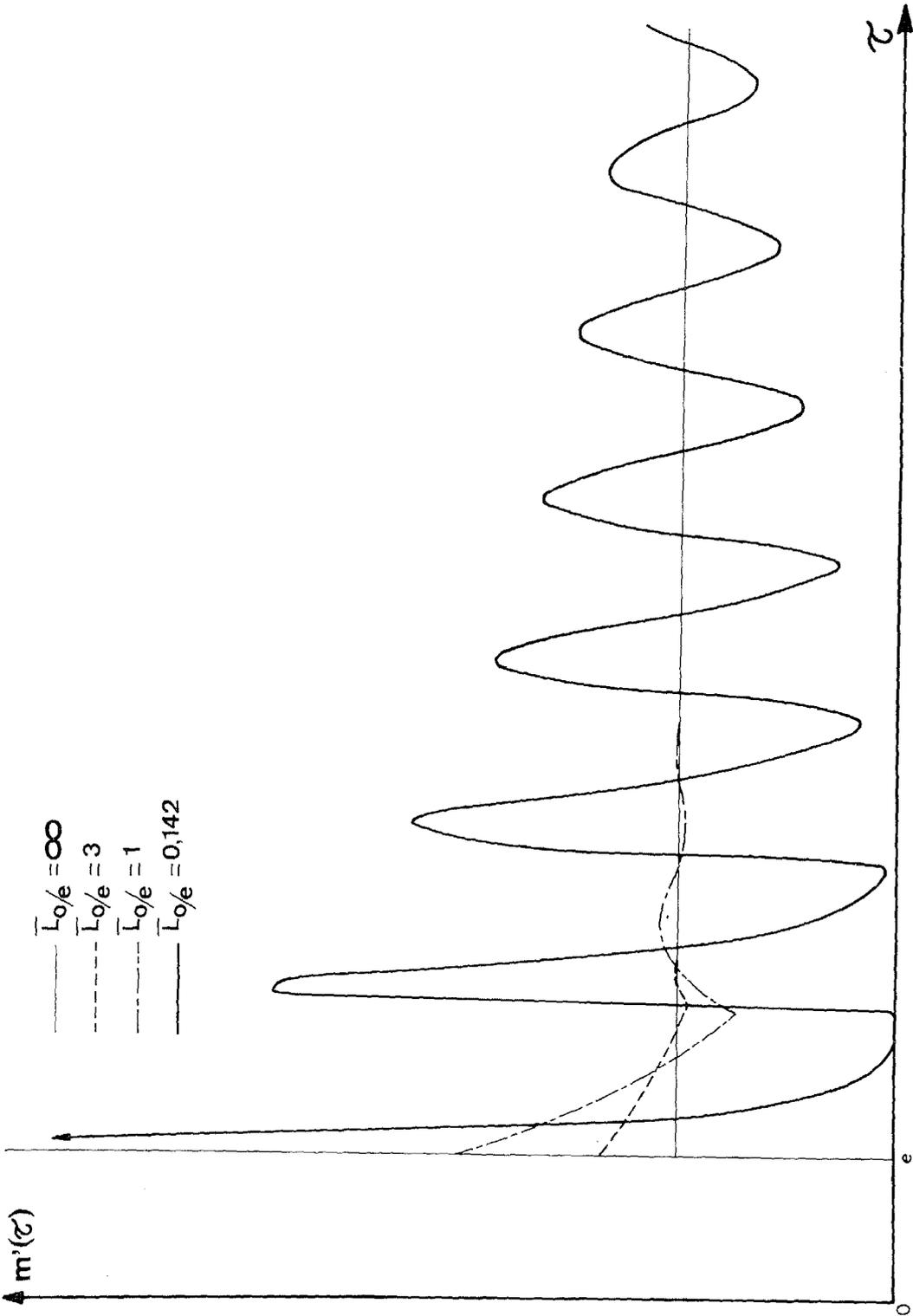


FIG. 3

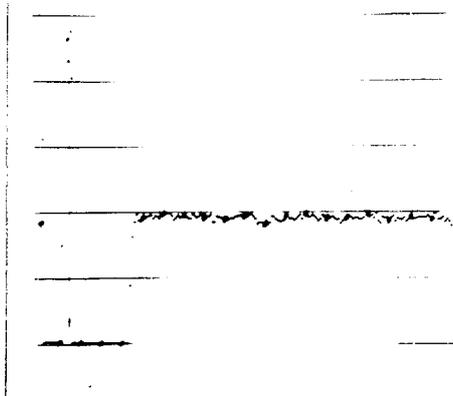


FIG. 4
 $H=100 \text{ ns}/10 \text{ canaux}$
 $V=200 \text{ cp./div.}$

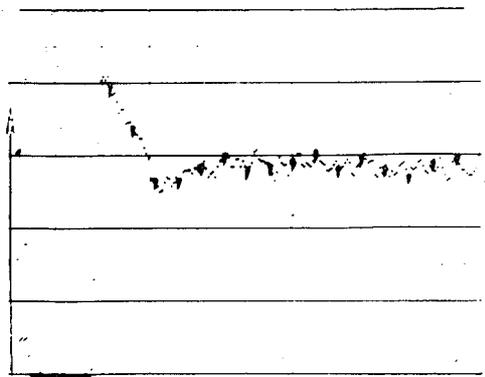


FIG. 5
 $H=5 \mu\text{s}/10 \text{ canaux}$
 $V=200 \text{ cp./div.}$

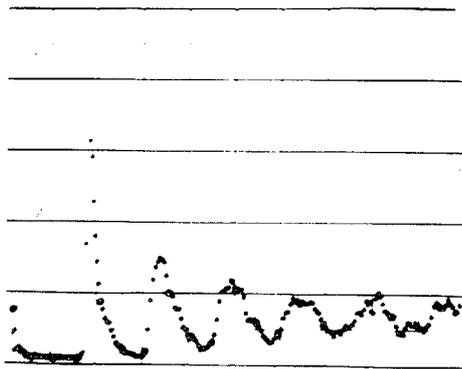


FIG. 6a
 $H=5 \mu\text{s}/10 \text{ canaux}$
 $V=100 \text{ cp./div.}$

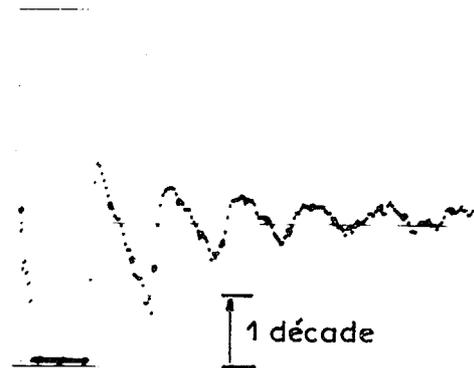


FIG. 6b
 $5 \mu\text{s}/10 \text{ canaux}$

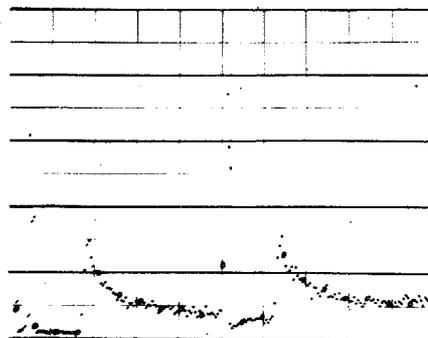


FIG. 7
 $H=25 \text{ ns}/10 \text{ canaux}$
 $V=100 \text{ cp./div.}$

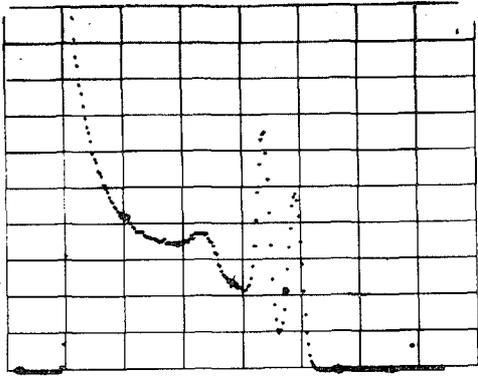


FIG. 8a

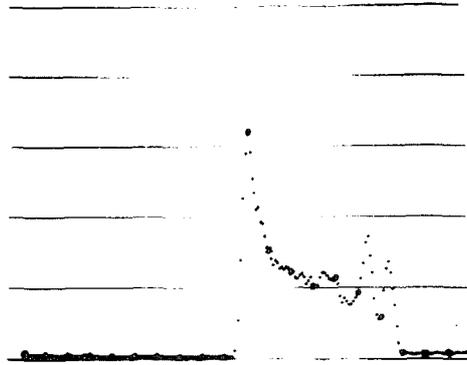


FIG. 8b

$H = 1 \mu s / 10 \text{ canaux}$

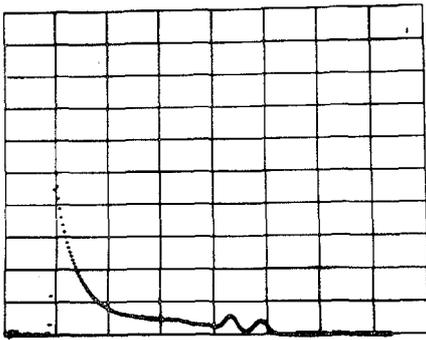


FIG. 9a

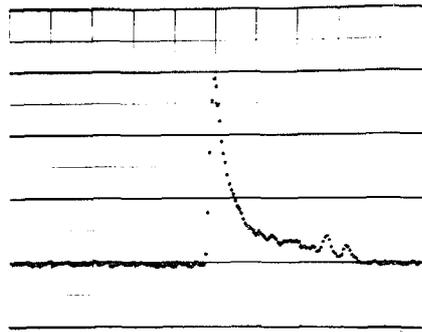


FIG. 9b

$H = 1 \mu s / 10 \text{ canaux}$

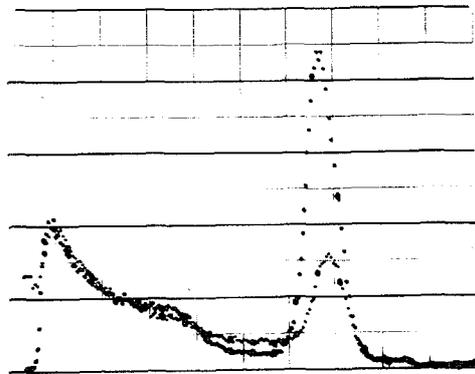


FIG. 10

$H = 500 \text{ ns} / 10 \text{ canaux}$

$V = 500 \text{ cp} / \text{div.}$