



8/1

**DEUXIÈME COLLOQUE  
SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL  
ET SES APPLICATIONS  
NICE - 5 AU 10 MAI 1969**

---

RELATION ENTRE L'EQUATION DE LA CHALEUR ET L'EQUATION DES ONDES.

Paul FILIPPI

Chargé de Recherches

CENTRE DE RECHERCHES PHYSIQUES  
31, Chemin Joseph Aiguier  
13 - MARSEILLE (9ème)

---

**RESUME** L'utilisation de la décomposition spectrale d'un opérateur autoadjoint négatif permet de montrer, qu'à partir de la solution de l'équation de la chaleur avec conditions aux limites de Neumann ou Dirichlet, on détermine explicitement la solution de l'équation des ondes en régime transitoire ou permanent (ou de l'équation de Schrödinger) avec les mêmes conditions aux limites pour toute valeur du temps ou de la fréquence (ou de l'énergie), et réciproquement. Une méthode numérique est proposée, illustrée par des exemples. Diverses applications sont envisagées.

Ce travail a été fait en collaboration avec Uriel FRISCH, Chargé de Recherche à l'Institut d'Astrophysique de Paris.

**SUMMARY**

Using the spectral decomposition of a negative self adjoint operator, it can be shown, from the solution of the heat equation with Neumann or Dirichlet boundary conditions, that the solution of the wave equation in transient or steady state (or of the Schrödinger equation) is explicitly determined with the same boundary conditions for any value of the time or of the frequency (or of the energy), and conversely. A numerical method is proposed, illustrated by examples. Possible applications are mentioned.

This work has been done with U. FRISCH (Institut d'Astrophysique de Paris).



**DEUXIÈME COLLOQUE**  
**SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL**  
**ET SES APPLICATIONS**  
**NICE - 5 AU 10 MAI 1969**

8/3

RELATION ENTRE L'EQUATION DE LA CHALEUR ET L'EQUATION DES ONDES.

Paul FILIPPI  
 Chargé de Recherches  
 CENTRE DE RECHERCHES PHYSIQUES  
 31, Chemin Joseph-Aiguier  
 13 - MARSEILLE (9ème)

INTRODUCTION -

=====

Il est bien connu que la solution des problèmes de conduction de la chaleur est facilement atteinte par les méthodes probabilistes alors qu'il n'en est pas de même pour les problèmes de propagation des ondes. En outre, il semble que les problèmes inverses soient plus faciles à résoudre pour l'équation de la chaleur que pour l'équation des ondes. Il nous a donc paru intéressant d'essayer de trouver une transformation mathématique permettant de déterminer une solution de l'équation des ondes à partir d'une solution de l'équation de la chaleur.

Considérons le problème de la chaleur suivant dans  $\mathbb{R}^n$  :

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial f(t)}{\partial t} = \Delta f(t) & t > 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = j & + \text{conditions aux limites} \end{cases}$$

dans laquelle  $t$  désigne le temps ; les variables d'espace sont sous-entendues, et les conditions aux limites envisagées sont celle de Neumann ou de Dirichlet sur la frontière  $\partial\Omega$  d'un ouvert borné  $\Omega$  . Nous cherchons à lui associer le problème d'onde en régime



RELATION ENTRE L'EQUATION DE LA CHALEUR ET L'EQUATION DES ONDES.  
par Paul FILIPPI

---

permanent :

$$(2) \begin{cases} (\Delta + k_0^2) \psi(k_0) = j \\ + \text{m\^emes conditions aux limites + condition de Sommerfeld} \end{cases} \quad k_0 = \text{nombre d'onde}$$

Formellement nous avons :

$$f(t) = e^{-\Delta t} j$$

$$\psi(k_0) = (\Delta + k_0^2)^{-1} = - \int_0^{\infty} f(t) e^{k_0^2 t} dt$$

Mais l'intégrale ci-dessus diverge sauf pour  $k_0 = 0$  et  $n \geq 3$  (cas connu de l'électrostatique { 1 }). Nous avons donc été amené à chercher une autre formulation de la relation entre  $f(t)$  et  $\psi(k_0)$ .

I.- RELATION ENTRE L'EQUATION DE LA CHALEUR ET L'EQUATION DE

---

HELMHOLTZ OU DES ONDES -

---

Nous allons montrer brièvement que la solution  $f(t)$  de l'équation de la chaleur (1) est reliée à la solution  $\psi(k_0)$  de l'équation de Helmholtz (2) par :

$$(3) \psi(k_0) = \text{v.p.} \int_0^{\infty} \frac{1}{k_0^2 - \tau} [\mathcal{L}^{-1} f(t)](\tau) d\tau - i\pi [\mathcal{L}^{-1} f(t)](k_0^2)$$

expression dans laquelle v.p. désigne une valeur principale de Cauchy,  $\mathcal{L}^{-1}$  la transformation de Laplace inverse, et  $\tau$  un paramètre (temps fictif).

Pour cela, remarquons que l'opérateur  $A = \Delta$  admet la décomposition spectrale { 2 }

$$(4) \quad A = \int_{-\infty}^0 \lambda dA_\lambda$$



RELATION ENTRE L'EQUATION DE LA CHALEUR ET L'EQUATION DES ONDES.  
par Paul FILIPPI

$g(\lambda)$  étant une fonction de la variable réelle  $\lambda$ , on peut définir sous réserve de convergence,  $g(A)$  par

$$(5) \quad g(A) = \int_{-\infty}^0 g(\lambda) dA_\lambda$$

Enfin, en posant  $\lambda = -\tau$  et  $-(dA_{-\tau})j = \chi(\tau)d\tau$  on peut écrire les solutions de (1) et de (2) sous les formes suivantes :

$$(6) \quad f(t) = \int_{-\infty}^0 e^{-t\lambda} dA_\lambda j = \int_0^\infty e^{-t\tau} \chi(\tau) d\tau = \mathcal{L} \chi(\tau)$$

$$(7) \quad \psi(k_0) = \lim_{\substack{\eta > 0 \\ \eta \rightarrow 0}} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\lambda + k_0^2 + i\eta} dA_\lambda j = \lim_{\substack{\eta > 0 \\ \eta \rightarrow 0}} \int_0^\infty \frac{1}{k_0^2 + i\eta - \tau} \chi(\tau) d\tau$$

La démonstration s'achève en rappelant que :

$$\lim_{\substack{\eta > 0 \\ \eta \rightarrow 0}} \frac{1}{k_0^2 + i\eta - \tau} = \text{v.p.} \frac{1}{k_0^2 - \tau} - i\pi \delta'(k_0^2 - \tau)$$

Si nous désignons maintenant par  $\varphi(t)$  la transformation de Fourier inverse de  $\psi(k_0)$ ,  $\varphi(t)$  vérifie l'équation des ondes suivante

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varphi(t)}{\partial t^2} = \Delta \varphi(t) \quad t > 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = j, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} = 0 \quad + \text{conditions aux limites} \end{array} \right.$$

Utilisant encore la décomposition spectrale de  $A = \Delta$ , un calcul élémentaire montre que l'on a :



RELATION ENTRE L'EQUATION DE LA CHALEUR ET L'EQUATION DES ONDES.  
par Paul FILIPPI

---

$$(9) \quad \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\mu}} \varphi(t) \frac{dt}{\mu} = \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\mu^2}} f(t) \frac{dt}{\mu^2}$$

En posant

$$t = e^{\eta} \quad \mu = e^{\xi} \quad K(\xi) = \exp[-e^{-\xi} - \xi]$$

(9) devient :

$$(10) \quad \begin{aligned} K(\xi) * \varphi(e^{\xi}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(e^{\eta}) \cdot K(\xi - \eta) d\eta = \\ &= 2 K(2\xi) * f(e^{2\xi}) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(e^{2\eta}) \cdot K(2\xi - 2\eta) d\eta \end{aligned}$$

Pour résoudre (10) on utilise une transformation de Fourier, valable si  $\varphi(e^{\xi})$  et  $f(e^{2\xi})$  sont "à croissance lente" à l'infini (3) ; il vient finalement :

$$(11) \quad \begin{aligned} \varphi(e^{\xi}) &= f(e^{2\xi}) * G(\xi) \\ G(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi\nu\xi} \frac{\Gamma(1+i\pi\nu)}{\Gamma(1+2i\pi\nu)} d\nu \end{aligned}$$

L'expression (11) permet d'associer un problème de chaleur à un problème de propagation d'onde.

Nous n'avons pas explicité les transformations inverses qui font passer de l'équation de Helmholtz ou des ondes à l'équation de la chaleur, car elles sont immédiates.

## II.- TRAITEMENT NUMERIQUE -

=====

L'expression (3) qui relie la solution de l'équation de la chaleur à la solution de l'équation de Helmholtz correspondante se prête très mal au traitement numérique. Il semble préférable d'utiliser la relation (11) pour déterminer la solution  $\varphi(t)$  de l'équation des ondes et de faire ensuite une transformation de Fourier.



RELATION ENTRE L'EQUATION DE LA CHALEUR ET L'EQUATION DES ONDES.  
par Paul FILIPPI

Nous avons donc porté notre effort sur la détermination approchée de l'opérateur  $G(\xi)$ . Nous nous sommes inspiré de la méthode proposée par Delache { 4 } pour l'inversion de la transformation de Laplace. L'opérateur  $G(\xi)$  est la transformée de Fourier inverse de

$$g(\nu) = \frac{\Gamma(1+i\pi\nu)}{\Gamma(1+2i\pi\nu)}$$

expression qui se développe sous forme de produit infini :

$$(12) \quad g(\nu) = e^{i\pi\nu\gamma} \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{i\pi\nu}{i\pi\nu+q}\right) e^{-\frac{i\pi\nu}{q}}$$

où  $\gamma$  est la constante d'Euler.

Le produit (12) suggère la décomposition suivante :

$$(13) \quad \begin{aligned} g(\nu) &= g_n(\nu) \cdot k_n^{-1}(\nu) \\ g_n(\nu) &= \prod_1^n \left[1 + \frac{i\pi\nu}{i\pi\nu+q}\right] e^{-i\pi\nu \log(n+1)} \\ k_n^{-1}(\nu) &= e^{-i\pi\nu\gamma} \prod_{n+1}^{\infty} \left[1 + \frac{i\pi\nu}{i\pi\nu+q}\right] e^{i\pi\nu \log(n+1)} \prod_1^{\infty} e^{-\frac{i\pi\nu}{q}} \end{aligned}$$

Il est aisé de voir que  $k_n^{-1}(\nu)$  tend vers 1 quand  $n$  croît indéfiniment, et par suite l'inverse  $K_n(\xi)$  de  $k_n(\nu)$  converge vers  $\delta(\xi)$ .

On en déduit alors une approximation  $G_n(\xi)$  de l'opérateur  $G(\xi)$  :

$$(14) \quad G_n(\xi) = \prod_1^n \left[2\delta(\xi) - 2qY(\xi) e^{-2q\xi}\right] * \delta(\xi - \log\sqrt{n+1})$$

en désignant par  $\prod_1^n$  un produit de convolution, et par  $Y(\xi)$  l'échelon de Heaviside. On peut construire une solution approchée  $\varphi_n(e^{\xi})$  :

$$(15) \quad \varphi_n(e^{\xi}) = \varphi(e^{\xi}) * K_n(\xi) = f(e^{2\xi}) * G_n(\xi)$$

$\varphi_n$  converge vers  $\varphi$  puisque  $K_n$ , inverse de  $k_n$ , converge vers  $\delta(\xi)$ .



RELATION ENTRE L'EQUATION DE LA CHALEUR ET L'EQUATION DES ONDES.  
par Paul FILIPPI

Revenons à la variable  $t$  ; les premières approximations de  $\varphi(t)$  sont données par :

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= 2 f\left(\frac{t^2}{2}\right) - 2 \int_0^\infty f\left(\frac{t^2}{2} e^{-2\eta}\right) e^{-2\eta} d\eta \\ &= 2 f\left(\frac{t^2}{2}\right) - \frac{2}{t^2} \int_0^t f\left(\frac{\tau^2}{2}\right) \tau d\tau \\ &= 2 f\left(\frac{t^2}{2}\right) - \frac{1}{t^2} \int_0^{t^2} f\left(\frac{\tau}{2}\right) d\tau\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2(t) &= 4 f\left(\frac{t^2}{3}\right) - 12 \int_0^\infty f\left(\frac{t^2}{3} e^{-2\eta}\right) e^{-4\eta} d\eta \\ &= 4 f\left(\frac{t^2}{3}\right) - \frac{12}{t^4} \int_0^t f\left(\frac{\tau^2}{3}\right) \tau^3 d\tau \\ &= 4 f\left(\frac{t^2}{3}\right) - \frac{6}{t^4} \int_0^{t^2} f\left(\frac{\tau}{3}\right) \tau d\tau\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_3(t) &= 8 f\left(\frac{t^2}{4}\right) + 12 \int_0^\infty f\left(\frac{t^2}{4} e^{-2\eta}\right) e^{-4\eta} d\eta - 60 \int_0^\infty f\left(\frac{t^2}{4} e^{-2\eta}\right) e^{-6\eta} d\eta \\ &= 8 f\left(\frac{t^2}{4}\right) + \frac{12}{t^4} \int_0^t f\left(\frac{\tau^2}{4}\right) \tau^3 d\tau - \frac{60}{t^6} \int_0^t f\left(\frac{\tau^2}{4}\right) \tau^5 d\tau \\ &= 8 f\left(\frac{t^2}{4}\right) + \frac{6}{t^4} \int_0^{t^2} f\left(\frac{\tau}{4}\right) \tau d\tau - \frac{30}{t^6} \int_0^{t^2} f\left(\frac{\tau}{4}\right) \tau^2 d\tau\end{aligned}$$

III.- EXEMPLES -

=====

Nous avons testé la méthode sur 2 exemples simples ; le milieu de propagation est infini et de dimension 1.

Dans le premier, la solution de l'équation de la chaleur est :

$$\varphi(t, x) = \text{Erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \quad x > 0$$

à laquelle correspond la solution de l'équation des ondes

$$\varphi(t, x) = \gamma(t - x) \quad x > 0$$



RELATION ENTRE L'EQUATION DE LA CHALEUR ET L'EQUATION DES ONDES.  
par Paul FILIPPI

---

Pour le deuxième exemple, nous avons pris

$$f(t, x) = \operatorname{Erfc}\left[\frac{x}{2\sqrt{t}}\right] - \operatorname{Erfc}\left[\frac{(x+a)}{2\sqrt{t}}\right]$$

qui correspond à la propagation d'un créneau

$$\varphi(t, x) = \gamma(t-x) - \gamma(t-x-a)$$

Les résultats sont donnés par les figures 1 à 6. Nous avons calculé les approximations d'ordre 1, 5 et 9 ; nous avons pris  $a = 0.05$ , et  $x = 0.02, 0.04, 0.06$ .

On constate que la qualité de l'approximation se détériore quand le temps  $t$  croît (ou quand  $x$  croît ce qui est équivalent). C'est là un inconvénient, et il est nécessaire de modifier la méthode de calcul pour obtenir une approximation dont la précision soit à peu près constante pour des valeurs de  $t$  allant jusqu'à quelques unités : c'est en effet suffisant puisque cela représente en acoustique aérienne des distances de propagation de plusieurs centaines de mètres, et en acoustique sous-marine de plusieurs kilomètres.

#### IV.- APPLICATION -

=====

1) La formule (3) peut se généraliser à d'autres équations. On peut, en particulier, appliquer cette méthode à l'équation de Schrödinger stationnaire

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V\psi = E\psi$$

lorsque le potentiel  $V$  est borné inférieurement.

2) Grâce à la formule (3) on peut ramener le comportement asymptotique ( $k_0 \rightarrow \infty$ ) de la solution de l'équation de



RELATION ENTRE L'EQUATION DE LA CHALEUR ET L'EQUATION DES ONDES.  
par Paul FILIPPI

---

Helmholtz au comportement de la solution de l'équation de la chaleur pour  $t \rightarrow 0$ . Ce qui est important puisqu'il existe des résultats rigoureux pour l'équation de la chaleur { 5 }, alors que les résultats concernant l'équation de Helmholtz sont formels { 6 }.

3) Les méthodes probabilistes, couramment utilisées pour l'équation de la chaleur, peuvent maintenant s'étendre aux problèmes de diffraction et de mécanique quantique. On peut ainsi atteindre d'une façon, semble-t-il simple, la réponse transitoire ou la réponse spectrale d'un système.

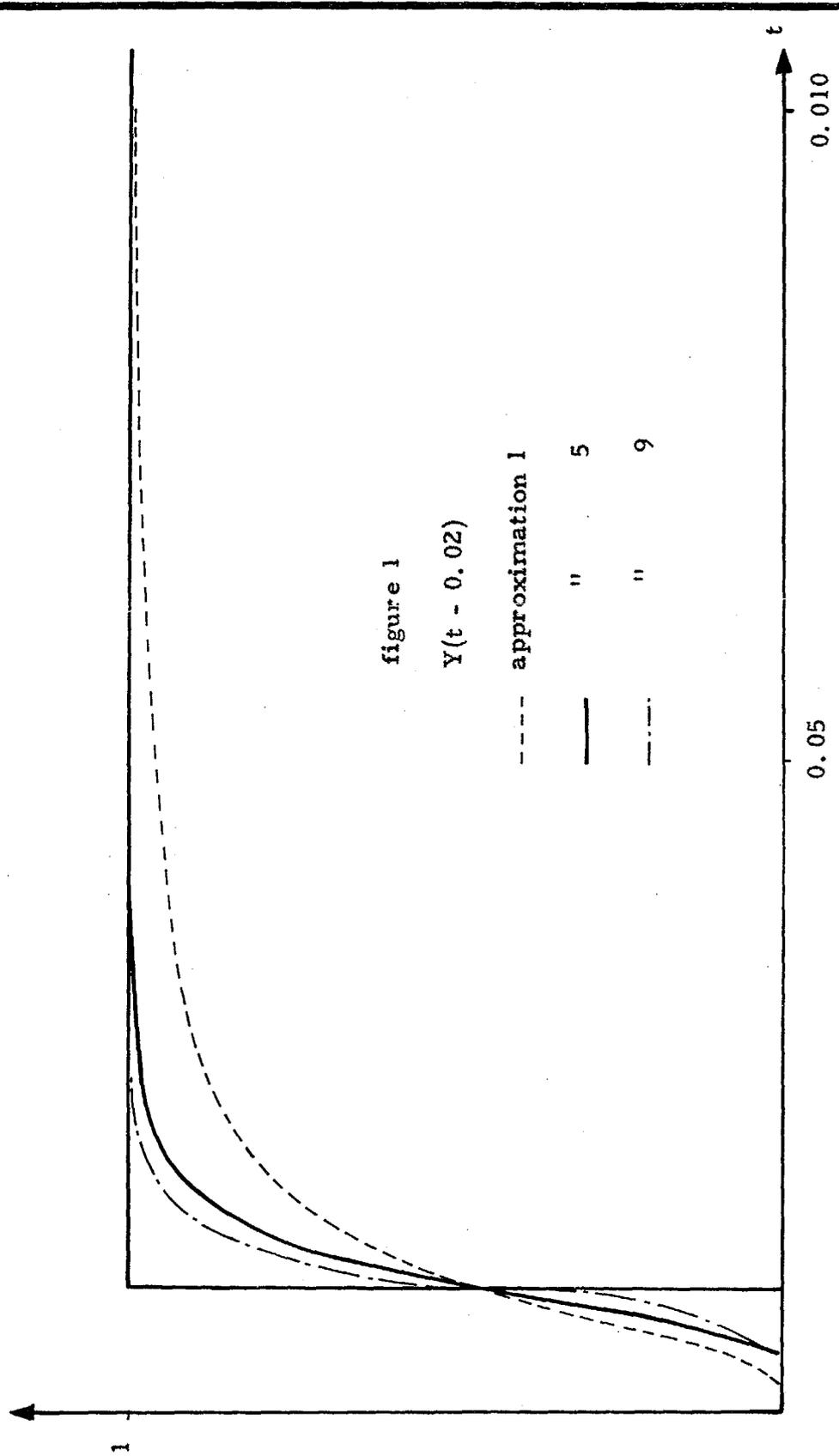
4) Enfin, on peut remplacer une expérience de conduction de la chaleur à 3 dimensions par une expérience de propagation d'onde plus simple à réaliser ; inversement on peut remplacer une expérience de propagation d'onde à 2 dimensions, toujours délicate à mettre en oeuvre, par une expérience de conduction de chaleur.

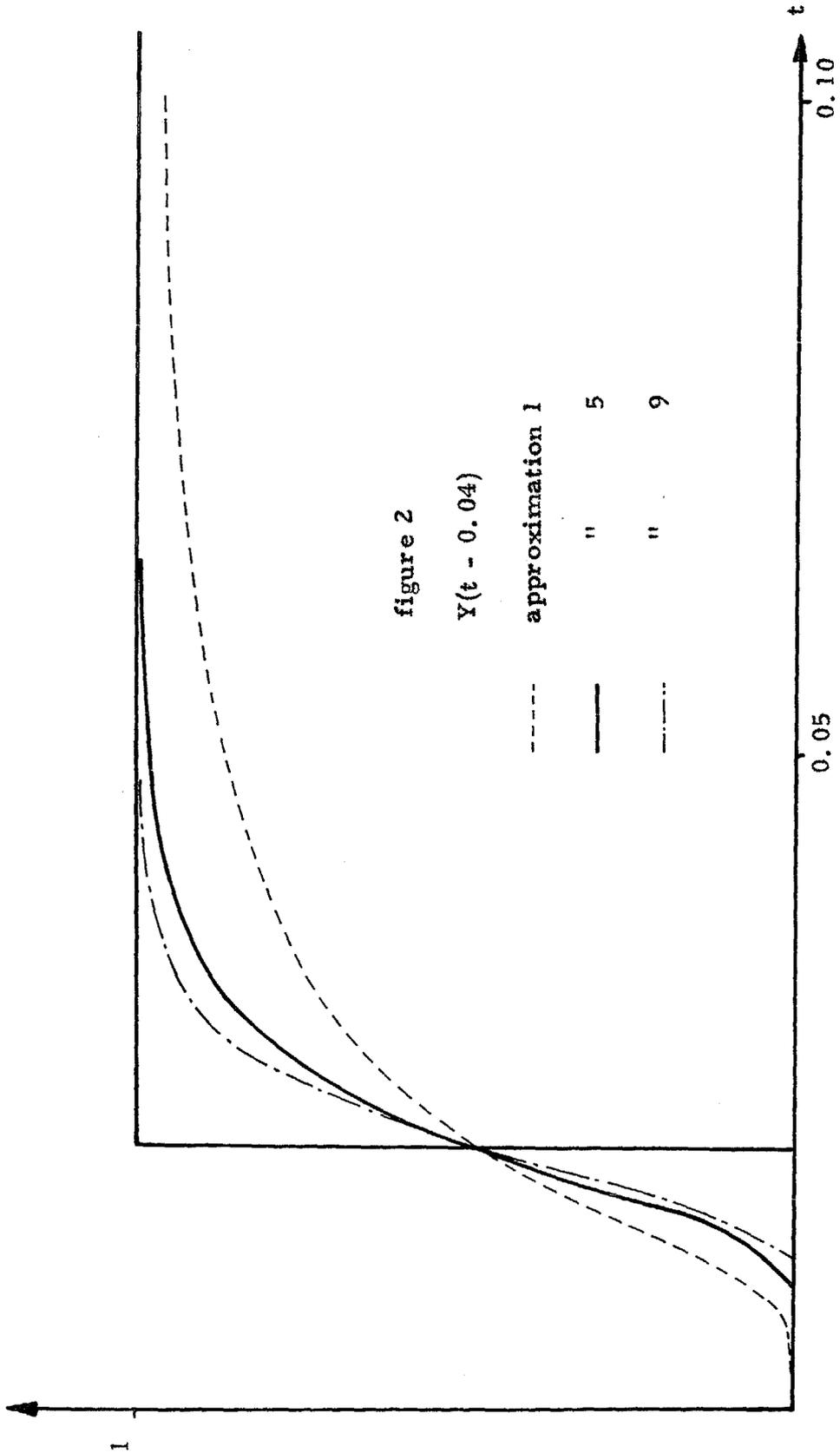
BIBLIOGRAPHIE -

=====

- { 1 } J.G. KEMENY, J.L. SNELL et A.W. KNAPP, "Denumerable Markov Chains" Chap. 7, Van Nostrand, 1966.
- { 2 } F. RIESZ et B.SZ. NAGY, "Leçons d'Analyse Fonctionnelle", Gauthier-Villars, 1953.
- { 3 } L. SCHWARTZ, "Théorie des Distributions", Hermann, Paris, 1966.
- { 4 } Ph. DELACHE, "Une généralisation de la formule de Barbier - Edington", Ann. d'Astrophysique, t. 28, n° 2, 1966.
- { 5 } S. VARADHAN, Commun. Pure Appl. Math., 20, 659-685, 1967.
- { 6 } R. COURANT et O. HILBERT, "Methods of Mathematical Physics", 2ème cd. vol. 2, Willy (Interscience), 1962.

-----





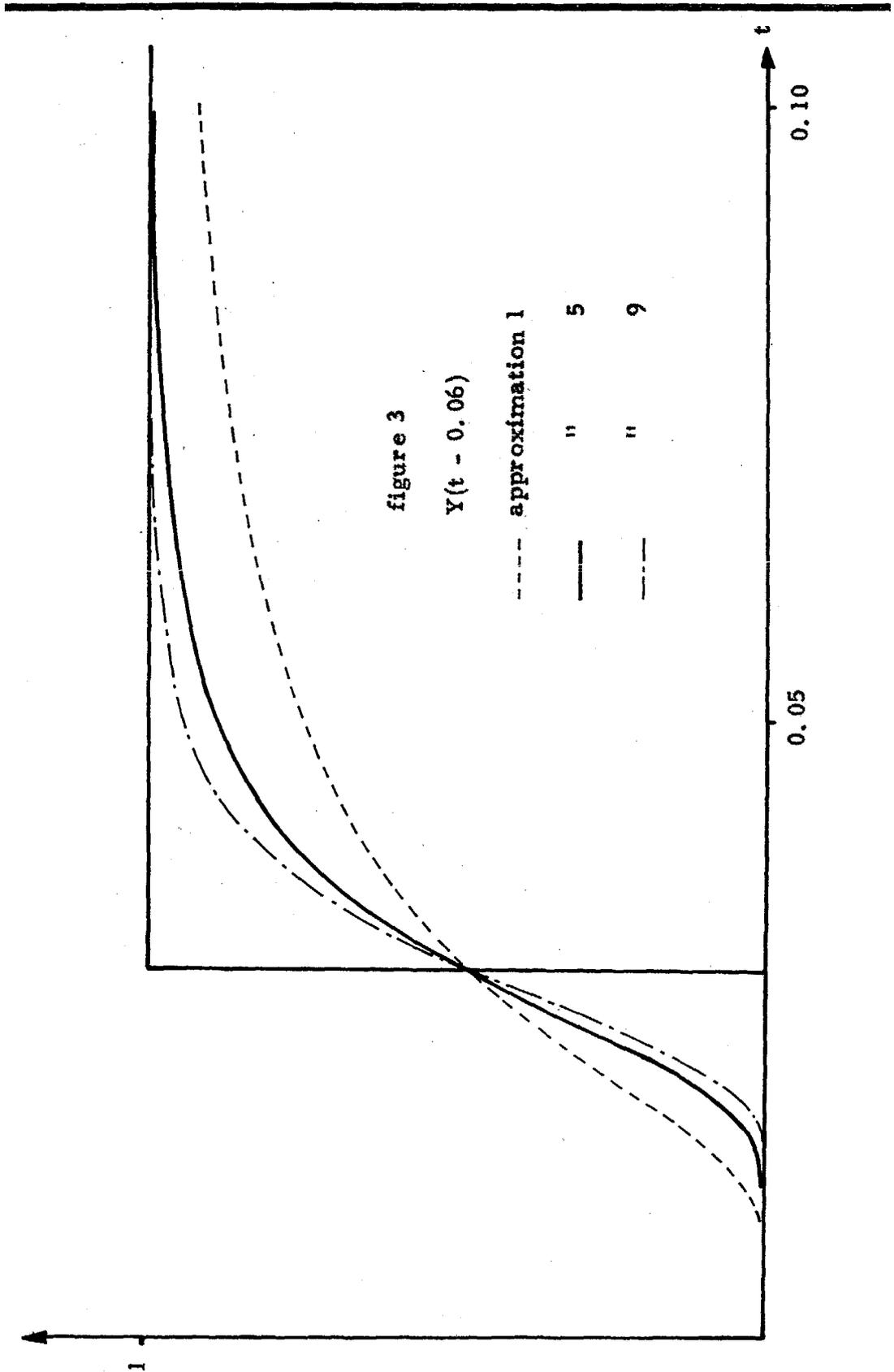


figure 3

$Y(t - 0.06)$

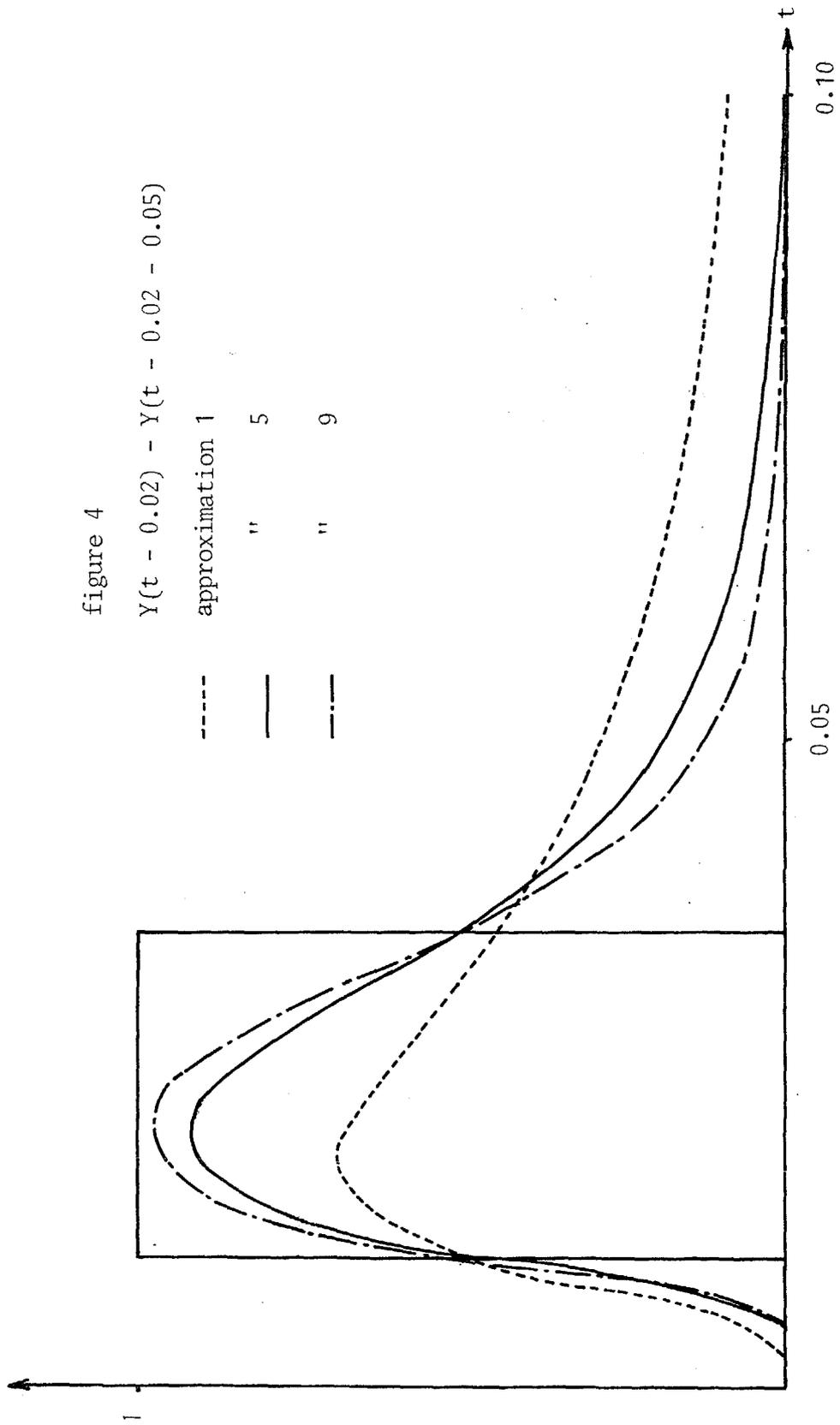




figure 5  
 $Y(t - 0.04) - Y(t - 0.04 - 0.05)$   
approximation 1  
" 5  
" 9

