



DEUXIÈME COLLOQUE
SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL
ET SES APPLICATIONS
NICE - 5 AU 10 MAI 1969

7/1

QUELQUES PROBLEMES MATHEMATIQUES ET
NUMERIQUES RELATIFS A LA PROPAGATION
DES ONDES ACOUSTIQUES

par Paul KREE
Professeur à la Faculté
des Sciences de NICE

SOMMAIRE :

Le but de cet exposé est de montrer quelques méthodes théoriques et quelques techniques numériques qui peuvent être utilisées pour l'étude de la propagation des ondes acoustiques dans les milieux stratifiés.

Some boundary value problems and inverse problems are considered for the reduced wave equations in media having planar stratification.



DEUXIÈME COLLOQUE
SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL
ET SES APPLICATIONS
NICE - 5 AU 10 MAI 1969

7/ 3

QUELQUES PROBLEMES MATHÉMATIQUES ET
NUMÉRIQUES RELATIFS A LA PROPAGATION
DES ONDES ACOUSTIQUES

par Paul KRÉE
Professeur à la Faculté
des Sciences de NICE

PLAN :

1. Les équations de propagation. Considérations théoriques.
2. Détermination théorique de la fonction de Green.
3. Approximation numérique de la fonction de Green.
4. Détermination théorique de la solution élémentaire.
5. Approximation numérique des solutions de l'équation d'évolution.
6. Quelques problèmes inverses.

On ne s'intéresse ici qu'à des phénomènes de propagation linéaires et déterministes. Le milieu est supposé isotrope et invariant par toute translation horizontale, mais les constantes physiques déterminant la propagation au voisinage d'un point peuvent dépendre de la cote de ce point. On s'intéresse surtout à la réponse d'un tel système à un signal périodique localisé en un point (cette réponse périodique est appelée fonction de Green) et à la réponse impulsionnelle (appelée solution élémentaire) à une détonation ayant lieu en un point donné du milieu, à l'époque $t=0$. On indique aussi quelques problèmes inverses liés à une telle situation : détermination du signal émis par la source connaissant le signal correspondant en un point du fluide, détermination des constantes de propagation du milieu connaissant la réponse impulsionnelle en plusieurs points de la surface. Certains de ces problèmes commencent à faire l'objet d'études au laboratoire d'étude mathématique des signaux (créé le 1.2.1969) de la Faculté des Sciences de Nice.



On s'intéresse chaque fois :

a) à la détermination théorique des inconnues (formules, développements asymptotiques...) dans les cas simplifiés où un calcul est possible.

b) à la recherche d'algorithmes numériques permettant d'approcher les inconnues. Dans ces conditions, la précision des algorithmes peut être d'abord contrôlée (en appliquant ces algorithmes dans les cas simplifiés). Puis ces méthodes peuvent être appliquées à des situations plus complexes (surfaces séparatrices non planes, indice aléatoire...).

1. LES EQUATIONS DE PROPAGATION. CONSIDERATIONS THEORIQUES ([13]).

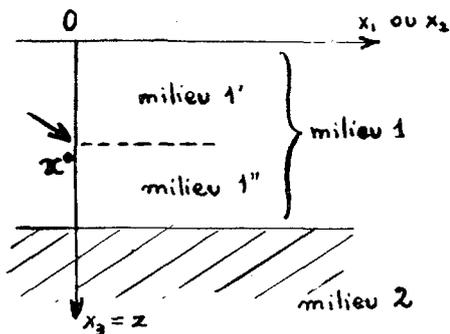


figure a : acoustique marine

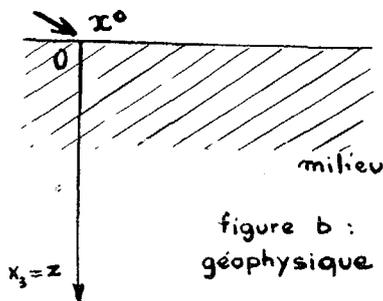


figure b : géophysique

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $Ox_1x_2x_3$. La direction de Ox_3 est verticale descendante. On pose

$$x_3 = z \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2$$

Le milieu de propagation est situé dans le demi espace où $z \geq 0$

(vide pour $z < 0$) et il est invariant par toute translation horizontale. Ce milieu est formé par

des fluides parfaits ou des corps

élastiques isotropes.

(1) exemples

a) cas de l'acoustique marine

(figure a) eau = milieu 1, corps élastique = milieu 2.

b) cas de la géophysique

(figure b) Un seul milieu élastique (les terrains).

Tout est au repos pour $t < 0$. Pour $t \geq 0$, on a une source $f(t)$ placée au point $x^0 = (0, 0, x_3^0)$

$$\text{Soit } u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$$



le déplacement du point $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ à l'époque t . On demande de déterminer les fonctions $u_j(\mathbf{x}, t)$. Notons que le problème est invariant par rotation et qu'il est commode d'utiliser les coordonnées cylindriques.

Equations de la dynamique des corps élastiques.

Soit $\sigma = \sigma(\mathbf{x}, t)$ le tenseur des contraintes au point \mathbf{x} et à l'époque t .

Notons σ_{ij} les composantes de ce tenseur - (i et $j = 1, 2, 3$).

Pour simplifier l'écriture, on utilisera les notations

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Le tenseur des déformations $\mathbf{e} = \mathbf{e}(\mathbf{x}, t)$ a pour composantes :

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i)$$

Notons λ et μ les constantes de Lamé d'un corps élastique (dans notre cas, λ et μ dépendent de $x_3 = z$, mais pas de x_1 et x_2)

Les contraintes s'expriment de la manière suivante en fonction des déformations :

$$(2) \quad \sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda \sum_{k=1}^3 e_{kk}$$

Si ρ (fonction de \mathbf{z}) désigne la masse spécifique du corps, la relation fondamentale de la dynamique donne (en négligeant les forces de volume)

$$(3) \quad \rho \partial_{tt} u_j = \sum_{k=1}^3 \partial_k \sigma_{jk}$$

Reportant dans ces relations les expressions des données par (2), on obtient

$$(4) \quad \rho \partial_{tt} u_j = (\lambda + \mu) \partial_j \left(\sum_k \partial_k u_k \right) + \mu \Delta u_j$$

Ces équations aux dérivées partielles, vérifiées par les fonctions constituent un système hyperbolique.

Ondes longitudinales et ondes transversales.

On sait (cours d'analyse vectoriel) que tout champ vectoriel sur l'espace euclidien \mathbf{E}^3 s'écrit

$$(5) \quad \mathbf{u} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \vec{\psi}$$



7/6

Où φ (resp $\vec{\psi}$) est un champ scalaire (resp vectoriel). Si un tel vérifie le système (4), alors ceci entraîne que

$$(6) \quad \alpha^2 \Delta \varphi = \partial_{tt} \varphi \quad ; \quad \beta^2 \Delta \vec{\psi} = \partial_{tt} \vec{\psi}$$

avec
$$\Delta = \partial_{11} + \partial_{22} + \partial_{33}$$

$$\alpha^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$$

$$\beta^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

On reconnaît l'équation des ondes. φ (resp $\vec{\psi}$) correspond à une déformation qui se propage localement à la vitesse α (resp β)

Le champ grad φ (resp rot $\vec{\psi}$) dont le rotationnel est nul (resp la divergence) correspond à une onde longitudinale (resp transversale).

Propagation des ondes dans les fluides parfaits.

Il existe une fonction $p = p(x, t)$, appelée pression telle que

$$(7) \quad \sigma_{ij} = -p \delta_{ij} \quad . \quad (\delta_{ij} = \text{symbole de Kronecker})$$

Il existe une fonction $k(z) = k(x_j)$ telle que

$$(8) \quad p = -k \sum_{j=1}^3 \partial_j u_j$$

Les équations (3) se réduisent à :

$$(9) \quad \rho \partial_{tt} u_j = -\partial_j p = \partial_j (k (\sum_i \partial_i u_i))$$

En négligeant la variation de densité due à l'onde, on obtient

$$(10) \quad \partial_{tt} p = \frac{k}{\rho} \Delta p$$

Dans le cas général, on obtient :

$$(11) \quad \Delta p - \frac{1}{c^2} \partial_{tt} p = \text{grad log } \rho \cdot \text{grad } p$$

Si le mouvement est irrotationnel, on a

$$u = \text{grad } \varphi \quad \text{soit} \quad u_i = \partial_i \varphi$$



$$-p = \sigma_{ii} = k \operatorname{div} u = k \Delta \varphi$$

(12) tandis que $\partial_{tt} \varphi = c^2 \Delta \varphi$

Conditions aux limites.

Les grandeurs caractéristiques de chaque milieu sont régies par des équations hyperboliques. (Par exemple (4) pour un corps élastique, (10), (11) ou (12) pour un fluide parfait). Pour déterminer ces grandeurs il faut encore connaître les conditions initiales (pour $t < 0$ et $t = 0$) et les conditions aux limites.

Ainsi :

- à la surface de séparation de deux milieux, il faut écrire que les composantes σ_{31} , σ_{32} , et σ_{33} sont égales.
- à la surface de séparation de deux corps élastiques, il y a égalité des déplacements.
- à la surface de séparation d'un fluide et d'un solide, la vitesse normale est nulle et $\sigma_{31} = \sigma_{32} = 0$

Lien entre l'analyse harmonique et l'analyse percussionnelle.

a) Notons $u(x, \omega)$ la solution du problème correspondant à l'excitation $e^{i\omega t} \delta(x-x_0)$. $u(x, \omega)$ est solution d'un problème aux limites elliptique, ω étant un paramètre. La réponse du système à l'excitation $f(t) \times \delta(x-x_0)$ sera

$$(13) \quad (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) u(x, \omega) d\omega$$

où \hat{f} est la transformée de Fourier de f .

b) Réciproquement, si l'on connaît la réponse $u(x, t)$ du système à la percussion $\delta(t) \times \delta(x-x_0)$, la réponse du système à l'excitation $f(t) \times \delta(x-x_0)$ sera, d'après le principe de Duhamel

$$(14) \quad g(t) = \int_0^t u(x, \theta) f(t-\theta) d\theta$$

c) Il apparaît donc deux méthodes d'approche du problème.

L'analyse harmonique conduit à la résolution d'un problème aux limites elliptique. L'analyse percussionnelle (réponse à une explosion effectuée à l'époque $t=0$) conduit à la résolution d'un



problème aux limites pour un opérateur hyperbolique

2. DETERMINATION THEORIQUE DE LA FONCTION DE GREEN.

Toutes les méthodes théoriques d'approche, font intervenir une transformation de Hankel d'ordre zéro 0 par rapport à r . Cette transformation ramène la résolution du problème à celle d'une équation différentielle ordinaire. Les hypothèses essentielles sont l'horizontalité des frontières séparant les différents milieux et la stratification horizontale. Pour exposer cette méthode, on considère un seul milieu d'indice $n(z)$ et l'on cherche une distribution $u(x, \omega)$, définie pour $x_3 \geq 0$, et telle que :

$$(15) \quad \begin{cases} c^2(x_3) \Delta u + \omega^2 u = \delta(x - x_0) & \text{pour } x_3 > 0 \\ u(x, \omega) = 0 & \text{pour } x_3 = 0 \\ u(x, \omega) \rightarrow 0 & \text{si } x_3 \rightarrow +\infty \end{cases}$$

u est appelée fonction de Green du problème.

Vue la symétrie, on a $u(x, \omega) = u(r, z, \omega)$

Et l'on a (vue l'expression du laplacien en coordonnées polaires):

$$(16) \quad c^2(x_3) (\partial_{zz} u + \partial_{rr} u + r^{-1} \partial_r u) + \omega^2 u = \delta(z - z_0) \times \delta(r)$$

Les conditions aux limites se transposent naturellement.

On effectue une transformation de Hankel H_0 d'ordre 0 par rapport à la variable r : $u(r, z, \omega)$ devient :

$$(17) \quad U(\rho, z, \omega) = 2\pi \int_0^\infty r J_0(r\rho) u(r, z, \omega) dr$$

et l'on a réciproquement :

$$(18) \quad u(r, z, \omega) = (2\pi)^{-1} \int_0^\infty \rho J_0(r\rho) U(\rho, z, \omega) d\rho$$

Habituellement, on suppose (pour que ces formules soient valables) que u et U sont des fonctions telles que ru et ρU soient intégrables sur $]0, +\infty[$. mais en fait, la transformation de Hankel s'étend aux distributions ([10]) et l'on a pour exemple :



$$\delta_0 \xrightarrow{H_0} 1$$

$$\partial_{rr} u + r^{-1} \partial_r u \xrightarrow{\quad} -\rho^2 U$$

En égalant les transformées de Hankel des deux membres de (16), on obtient :

$$(19) \quad \begin{cases} c^2(z) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \rho^2 U \right) + \omega^2 U = \delta(x-x_0) \\ U(\cdot, 0, \omega) = 0 \quad \text{et} \quad U(\cdot, z, \omega) \rightarrow 0 \text{ si } z \rightarrow \infty \end{cases}$$

On voit ainsi que ρ et ω étant fixés, $U(\rho, \cdot, \omega)$ est une fonction de Green d'une certaine équation différentielle. Par exemple, si $c(z)$ est constant, l'équation différentielle est à coefficients constants, et l'on retrouve les calculs de [13]

(20) développement asymptotique de la solution si ω est grand.

L'équation différentielle (19) dépend du paramètre réel ω . Lorsque ω est grand les solutions de (19) admettent des développements asymptotiques qui peuvent être déterminés par des méthodes standard (voir [7] et [9] par exemple). En reportant ces développements dans (18) et après quelques calculs, on peut obtenir le développement asymptotique partout, même dans les zones d'ombre. Le premier terme du développement dans les zones éclairées correspond à l'approximation de l'optique géométrique. Cette remarque et les calculs qui viennent d'être évoqués sont dûs à B.D. Seckler et J.B. Keller::

[14] et [15]

(21) Remarques.

- a) Un calcul analogue peut être fait pour l'équation (11) de Chernov, l'équation différentielle correspondant à (19) présente alors un terme de premier ordre.
- b) Dans le cas où il y a deux milieux de propagation, on simplifie les calculs en considérant uniquement un milieu et une condition aux limites simples sur la frontière commune avec le deuxième



milieu : voir [15] .

c) Brekhovskikh ([16]) a effectué un calcul analogue dans le cas géophysique, mais en supposant que les conditions aux limites sont telles qu'une seule onde (transversale ou longitudinale est non nulle). Il a effectué complètement les calculs dans le cas où α^2 et β^2 sont des fonctions linéaires de z , d'où une détermination précise de l'onde Rayleigh.

3. APPROXIMATION NUMERIQUE DE LA FONCTION DE GREEN.

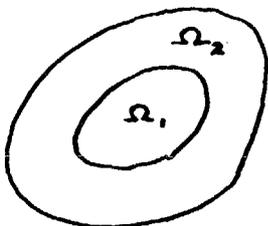
On s'intéresse ici à la recherche d'approximations numériques de la solution du problème (15).

(22) Dans le cas où ω est grand on peut utiliser le développement asymptotique donné au point précédent.

(23) Dans le cas général, on peut chercher $u(x, \omega)$ en deux étapes
Détermination d'abord de $U(\rho, z, \omega)$ en résolvant une équation différentielle : par exemple si $c(z) = c_1$ pour $z > K$ on est ramené à la résolution d'un problème de Sturm Liouville sur l'intervalle $]0, K[$. Ensuite, en inversant numériquement la transformation de Hankel, on détermine $u(r, z, \omega)$. On peut par exemple utiliser une formule du genre :

$$u\left(\frac{j}{N}, z, \omega\right) = (2\pi N)^{-1} \sum_{k=0}^{10N} \frac{k}{N} J_0\left(\frac{jk}{N^2}\right) U\left(\frac{k}{N}, z, \omega\right)$$

(24) Il faut signaler ici une lacune des études mathématiques et numériques concernant la méthode variationnelle. Dans le cas où



le domaine $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ est borné, des

méthodes énergétiques permettent de

prouver l'existence de la solution des

problèmes de transmission relatifs à

(ces méthodes permettent aussi l'approche numérique) : voir [12] .

Ce formalisme utilise les espaces de

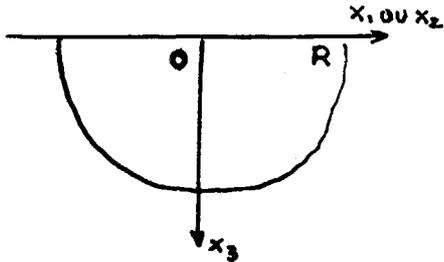
Sobolev, l'hypothèse " Ω borné" est essentielle. Malheureusement,

dans notre cas, Ω est un demi espace et une extension de la

théorie variationnelle serait nécessaire.



- (25) C'est pour cette raison qu'en pratique, on remplace le demi-espace formant le milieu de propagation par la demi boule de cet espace où $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2$ et l'on se donne des conditions aux limites approchées relatives à la demi-sphère où $\|x\| = R$ et $x_3 > 0$. Par exemple : déplacements nuls, ou condition de rayonnement....



4. DETERMINATION THEORIQUE DE LA SOLUTION ELEMENTAIRE.

On cherche à présent la réponse du système à la percussion

$\delta(x-x_0) \times \delta(t)$. La méthode de détermination des potentiels prolonge celle du § 2 :

on fait une transformation de Hankel par rapport à $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ et une transformation de Mellin par rapport au temps. On obtient alors le déplacement $\begin{pmatrix} u_r(x,t) \\ u_z(x,t) \end{pmatrix}$ sous la forme

$$(26) \quad \begin{pmatrix} u_r \\ u_z \end{pmatrix} = \int_0^\infty k dk \frac{1}{2\pi i} \int_M \begin{pmatrix} G_1(z, k, s) & J_1(kr) \\ G_2(z, k, s) & J_0(kr) \end{pmatrix} \frac{e^{kts}}{s} ds$$

où M est le contour de Mellin et où $\begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix}$ est solution d'un système différentiel. En remplaçant cette solution par un développement asymptotique, on obtient une représentation de la solution, valable partout (même dans les zones d'ombre). On peut faire une comparaison avec la théorie des rayons. Les calculs et ces raisonnements sont détaillés dans de nombreux articles théoriques russes :

cf [4], [5], etc...

5. APPROXIMATION NUMERIQUE DE SOLUTIONS DE L'EQUATION D'EVOLUTION.

Soit $p(x,t)$ la solution de l'équation hyperbolique



$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_{tt} p - c^2(x) \Delta p = \delta(t) * \delta(x-x_0) \\ p = 0 \quad \text{pour } t < 0 \\ p = 0 \quad \text{pour } z = 0 \end{array} \right.$$

Une méthode de discrétisation pour approcher la solution de ce problème consiste à choisir h et $k > 0$ (pas de discrétisation) et à chercher des approximations de

$$p(h_1, h_2, h_3, k_0)$$

où les h_i sont des entiers relatifs. Ces approximations s'obtiennent en exprimant les dérivées intervenant dans (27) à l'aide de quotients différentiels. Les algorithmes correspondants ont été définis par Friedrichs ([8]) et Kreiss. On peut simplifier les calculs à effectuer en remplaçant $p(x, t)$ par $p(r, z, t)$ ce qui réduit de 1 le nombre des variables indépendantes.

Notons que si l'excitation est $\delta(x-x_0) * \gamma(t) e^{i\omega t}$ pour tout x fixé, la réponse $u(x, \omega, t)$ tend (si $t \rightarrow \infty$) vers la solution $u(x, \omega) e^{i\omega t}$ du problème elliptique correspondant : principe de l'amplitude limite. On peut donc utiliser la solution numérique d'une équation d'évolution pour approcher la solution d'une équation elliptique.

6. PROBLEMES INVERSES ET IDENTIFICATION.

Jusqu'ici, nous supposons connus, le système et les conditions initiales et nous cherchions la réponse (déplacements ou pressions en fonction de x et t).

Dans certains problèmes inversés, on suppose connues la réponse et l'entrée; et l'on cherche à en déduire les grandeurs caractéristique du système. Par exemple, dans le cas de l'acoustique marine, on peut chercher à déterminer la fonction $c(z)$, la profondeur K du fonds, simplement à l'aide de mesures effectuées en surface. Ces problèmes font l'objet de nombreux travaux théoriques (voir [2], [6] et [11]). L'idée est de faire des intégrations par rapport à



x_1 et x_2 , de façon à se ramener au problème :

$v(x_3, t)$ étant définie pour $x_3 > 0$ et telle que

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_{tt} v = c(x_3) \partial_{33} v \\ \partial_t v(0, t) = \delta_0 \\ v(0, t) = f(t) \text{ pour } t > 0 \\ v(x_3, t) = 0 \text{ pour } t < 0 \end{array} \right.$$

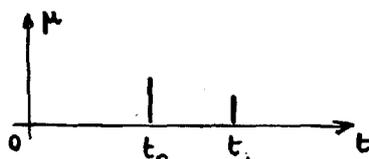
trouver c si l'on donne f . c est solution d'une équation de Volterra. D'autres problèmes inverses, on suppose connus le système et la réponse g en un point ; et l'on cherche à en déduire l'excitation f . L'équation (14) montre que f est la solution d'une équation de convolution.

$$f * \mu = g$$

où $\mu(t) = 0$ pour $t < 0$

(29) Exemples

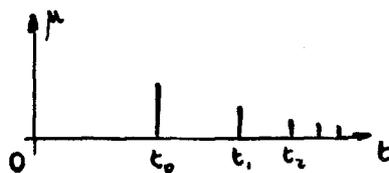
a) Dans le cas d'un seul milieu homogène, on a (les a_i sont constants)



$$\mu = a_0 \delta(t-t_0) + a_1 \delta(t-t_1)$$

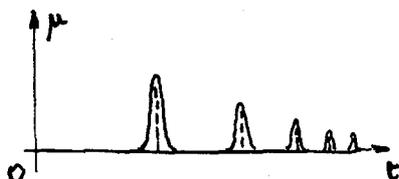
et la solution est évidente.

b) Dans le cas de deux milieux homogènes, on a



$$\mu = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \delta(t-t_j)$$

c) Dans le cas général, on a un μ qui est une somme de pics. Il



serait intéressant de mettre au point des algorithmes de déconvolution pour de tels noyaux.



BIBLIOGRAPHIE

- [1] A.S. Alekseev - Le problème de Lamb pour l'équation des ondes et un demi espace stratifié. Uch. Zap. Leningr. Gos Univ. 246 : 167-277 (1958).
- [2] A.S. Alekseev - Quelques problèmes inverses dans la théorie de la propagation des ondes parties 1 et 2. Izv Akad. Nauk. SSSR seriya geofiz 15 (11) 1514-1531 (1962).
- [3] A.G. Alenitsyn - The Lamb problem for an in homogeneous half space. Topics in Math. Physics (M. Sh. Birman editor n°1 - pp. 1-23 (1967).
- [4] V.M. Babich et A.S. Alekseev - La méthode des rayons pour le calcul des intensités de front d'onde. Izv. Akad. Nauk. SSSR seriya geofiz. 1 - 17-31 (1958).
- [5] V.M. Babich et N. Ya Rusakova - La propagation des ondes de Rayleigh à la surface d'un corps élastique. Zh. Vychis. Matem. i Mat. Fiz. 2 (4) 652-665 (1962).
- [6] A.S. Blagoveshchenskii - The inverse problem in the theory of seismic wave propagation. Topics in Math. Physics (M. Sh. Birman editor) n° 1 - pp. 55-67 (1967).
- [7] A. Erdélyi - Asymptotic expansions (Dovers Publications - New-York, 1956).
- [8] K.O. Friedrichs - Symetric hyperbolic linear differential equation. Comm. Pure Appl. Math. vol. 7 - pp. 345-392 (1954).
- [9] J. Heading - An Introduction to phase integral methods. John Wiley & Sons Inc (1962).
- [10] P. Krée - Sur la transformation de Hankel - à paraître. Journal d'Analyse Math. de Jérusalem.
- [11] M.G. Krein - La fonction de transition d'un problème aux limites du second ordre. Dokl. Akad. Nauk. SSSR 94 (6) - 987-990 (1954).
- [12] J.L. Lions et E. Magenes - Problèmes aux limites non homogènes et applications - vol. 1 - Dunod (1968).
- [13] C.B. Officer - Introduction to the theory of sound transmission



with application to the Ocean. Mac Graw Hill (1958).

- [14] B.D. Seckler & J.B. Keller - Geometrical theory of diffraction in inhomogeneous media. J. Acoust. Soc. Amer. vol. 31, n° 2 - p. 192-205 (1959).
- [15] B.D. Seckler & J.B. Keller - Asymptotic theory of diffraction in inhomogeneous media. J. Acoust. Soc. Amer. vol. 31, n° 2 - february (206-216 (1959).
- [16] L.M. Brekhovskikh. - Waveguide effects in solid layered media with continuously varying parameters - Soviet phys. Acoust. - vol. 14, n° 2 - (1968)