DEUXIÈME COLLOQUE
SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL
ET SES APPLICATIONS
NICE - 5 AU 10 MAI 1969

PROPAGATION DU SON EN MILIEU INHOMOGENE

par

M. BOUIX et E. PAWELA.

CETHEDEC, 5 bis, Avenue de la Porte de Sèvres -
75 - PARIS 15ème -

Après avoir déterminé la fonction de Green de l'équation scalaire de propagation en milieu inhomogène, nous l'avons appliquée au problème de la propagation d'une onde sonore. La solution est donnée sous forme d'équation intégrale. Celle-ci correspond à une généralisation du principe de Huygens .

A Green's function for the equation of scalar wave propagation in an inhomogeneous medium is found and used to study the sound wave propagation. The solution is given by an integral equation, which generalises the Huygens' principle .

DEUXIÈME COLLOQUE
SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL
ET SES APPLICATIONS
NICE - 5 AU 10 MAI 1969

Propagation du son en milieu inhomogène.

1) Equations générales : (Rappel)

Soient : $P(x,y,z,t)$ la pression dûe à l'onde sonore,

$\rho(x,y,z,t)$ la densité du milieu où se propage l'onde sonore,

$V(x,y,z,t)$ la vitesse d'une "particule" du fluide qui se trouverait au point (x,y,z) à l'instant t.

μ : le coefficient de compressibilité du fluide

c : la vitesse de propagation du son dans le fluide.

Les variables précédentes sont reliées par trois équations :

- équation de mouvement :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, P = -\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \tag{1}$$

- équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\,(\rho \vec{V}) = 0 \tag{2}$$

- équation d'état :

$$\mu = \frac{1}{\rho}\,\frac{d\rho}{dP} \tag{3}$$

Nous cherchons l'équation aux dérivées partielles que vérifie P.

Prenons la divergence de (1). Il vient :

Propagation du son en milieu inhomogène.

$$(4) \qquad \Delta P = - \operatorname{div} \left(\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}\right)$$

Pour obtenir le deuxième membre de (4), on prend la dérivée partielle par rapport au temps de l'équation (2)

$$(5) \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \operatorname{div} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \vec{V}\right) + \operatorname{div} \left(\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}\right) = 0$$

Reportons dans l'expression de $\operatorname{div}(\frac{\partial \rho}{\partial t} \vec{V})$ tirée de (5):

$$(6) \quad \Delta P = \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \operatorname{div} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \vec{V}\right)$$

On peut évrire (3) sous la forme :

$$(7) \quad \frac{dP}{dt} = \frac{1}{\rho\mu} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\rho\mu} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V}. \overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho \right].$$

$$= \frac{\partial P}{\partial t} + \vec{V}. \overrightarrow{\operatorname{grad}} P$$

De (7), on tire :

$$(8) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho\mu \left[\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{V}. \overrightarrow{\operatorname{grad}} P \right] - \vec{V}. \overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho$$

Prenons la dérivée partielle par rapport au temps de (8). Il vient :

$$(9) \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \left[\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} (\rho\mu) \left[\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{V}. \overrightarrow{\operatorname{grad}} P \right] - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{V}. \overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho) \\ + \rho\mu \left[\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{V}. \overrightarrow{\operatorname{grad}} P \right] \end{array} \right.$$

Reportons (9) dans (6). Il vient :

$$\Delta P = \rho\mu \left[\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{V}.\overrightarrow{\mathrm{grad}} P) \right] - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{V}.\overrightarrow{\mathrm{grad}} \rho)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t}(\rho\mu) \left[\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{V}.\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P \right] + \mathrm{div} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \vec{V}\right)$$

Or

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{V}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \rho) = (\frac{\partial}{\partial t} \vec{V}) . \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \rho + \vec{V}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$= - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \rho + \vec{V}.\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

d'après (1), d'où :

$$(10) \quad \Delta P - \rho\mu \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \rho.\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P = R$$

avec

$$R = \rho\mu \frac{\partial}{\partial t} (\vec{V}.\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P) - \vec{V}.\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \vec{V}\right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t} (\rho\mu) \left[\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{V}.\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P \right]$$

$$R = \frac{\partial \rho}{\partial t} - \mu \left| \overrightarrow{\text{grad}}\ P \right|^2 + \rho\mu\vec{V}.\ \overrightarrow{\text{grad}}\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{dP}{dt}\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mu)$$

On fait habituellement l'hypothèse que R est négligeable par rapport au premier membre de (10). On voit que cela revient à considérer en particulier que la densité du milieu varie très peu avec le temps.

L'équation de propagation est donc :

$$(11)\quad \Delta P - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \overrightarrow{\text{grad}}\ \text{Log}\ c^2.\ \overrightarrow{\text{grad}}\ P = 0$$

où l'on a posé

$$(12)\quad c^2 = \frac{1}{\rho\mu}$$

(le coefficient de compressibilité μ est constant).

Multiplions les 2 membres de 11 par c^2. On obtient :

$$c^2\ \text{div}\ (\overrightarrow{\text{grad}}\ P) + c^2\ \overrightarrow{\text{grad}}\ \text{Log}\ c^2.\ \overrightarrow{\text{grad}}\ P - \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0$$

Soit :

$$(13)\quad \text{div}\ (c^2\ \overrightarrow{\text{grad}}\ P) - \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0$$

II. Solution de l'équation de propagation

Nous allons chercher les solutions harmoniques de (13) c'est-à-dire des fonctions P telles que :

$$(x,y,z,t) = (x,y,z)\, e^{+i\omega t}$$

Reportons l'expression précedente dans (13). Il vient :

2 -

$$[\operatorname{div} (c^2\, \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, U) + \omega^2\, U]\, e^{+i\omega t} = 0$$

Puisque les variations de ρ, et donc de c^2, sont limitées au cours du temps, nous sommes ramenés à l'étude de :

2 - 2

$$\operatorname{div} (c^2\, \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, U) + \omega^2\, U = 0$$

Soient U_1 et U_2 des solutions de II - 2

En appliquant la formule de Green, on peut écrire

$$\int_V \operatorname{div} (c^2\, \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, U_1)\, dv = \int_S c^2\, \vec{n}.\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, U_1\, d\, S$$

2 - 3

$$\int_V \operatorname{div} (c^2\, \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, U_2)\, dv = \int_S c^2\, \vec{n}.\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, U_2\, d\, S$$

avec les notations habituelles.

D'autre part, on peut écrire :

2 - 4

$$U_2 \operatorname{div} (c^2\, \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, U_1) = \operatorname{div} (U_2 c^2\, \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, U_1) - c^2\, \overrightarrow{\operatorname{grad}} U_1 . \overrightarrow{\operatorname{grad}} U_2$$

2 - 5

$$U_1 \operatorname{div} (c^2 \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, U_2) = \operatorname{div}(U_1 c^2 \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, U_2) - c^2 \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, U_1 . \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, U_2$$

Retranchons la deuxième expression de la première pour former l'expression symétrique :

$$U_2 \operatorname{div}(c^2 \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, U_1) - U_1 \operatorname{div}(c^2\, \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, U_2) =$$

$$= \operatorname{div}(U_2 c^2 \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, U_1) - \operatorname{div}\, (U_1 c^2 \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, U_2)$$

Appliquons à 2 - 6 les relations 2 - 5. Il vient :

$$\int_V [U_2 \operatorname{div}(c^2 \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, U_1) - U_1 \operatorname{div}(c^2 \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, U_2)]\, dv$$

$$= \int_V [\operatorname{div}(U_2 c^2 \operatorname{grad} U_1) - \operatorname{div}(U_1 c^2 \operatorname{grad} U_2)]\, dv$$

$$\int_S c^2 [U_2\, \vec{n} \operatorname{grad} U_1 - U_1 \vec{n}. \operatorname{grad} U_2]\, dS$$

Nous obtenons ainsi une formule de Green généralisée :

2 - 7

$$\int_V [U_2 \operatorname{div}(c^2 \overrightarrow{\operatorname{grad}} U_1) - U_1 \operatorname{div}(c^2 \overrightarrow{\operatorname{grad}} U_2)]\, dv =$$

$$\int_S c^2 [U_2 \vec{n}.\operatorname{grad} U_1 - U_1 \vec{n}.\operatorname{grad} U_2]\, d\,S$$

($\vec{n}$ désigne la normale extérieure à la surface S qui entoure le volume V)

Nous sommes ramenés à la détermination d'une fonction de Green $G(M,M_o)$ vérifiant :

2 - 8

$$\operatorname{div}(c^2 \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, G) + \omega^2 G = -\delta(M - M_o)$$

En effet, on pourra écrire pour une solution U de 2-2, en utilisant 2-7 et 2-8

$$\int_V [U \operatorname{div}(c^2 \operatorname{grad} G) - G \operatorname{div}(c^2 \operatorname{grad} U)]\, dv =$$

$$= \int_V [U[-\omega^2 G - \delta) - G \operatorname{div} (c^2 \overrightarrow{\text{grad}}\, U)] \, dv$$

$$= \int_V [- U(M) \, \delta(M-M_o)] \, dv - \int_V G[\omega^2 U + \operatorname{div}(c^2 \overrightarrow{\text{grad}} U)] \, dv$$

$$= - \int_V [U(M) \, \delta(M-M_o)] \, dv$$

$$= \int_S c^2 \, [U \, \vec{n}.\overrightarrow{\text{grad}}_M G - G \, \vec{n}.\overrightarrow{\text{grad}}_M U \,] \, dS$$

$$\int_V \delta(M-M_o) \, U \, (M) \, dv = U(M_o) \quad \text{si } M_o \text{ appartient à } V$$
$$= o \text{ si } M_o \text{ n'appartient pas à } V$$

d'où,

2-9

$$\boxed{\int_S c^2 [G \, \vec{n}.\overrightarrow{\text{grad}}_M \, U - U \, \vec{n}.\overrightarrow{\text{grad}}_M \, G] dS = U(M_o) \text{ si } M_o \in V \quad =o \text{ si } M_o \notin V}$$

Si la surface S est à nappes infinies, ou si l'on considère un volume infini, on obtient encore la formule 2-8. Mais dans ce cas, on devra imposer une condition analogue à celle de rayonnement de Sommerfeld, c'est-à-dire que l'on doit avoir :

2 - 10

$$|\overrightarrow{OM}|^2 c^2 [G(M_o,M) \, \vec{n}.\overrightarrow{\text{grad}}_M U - U \, \vec{n}.\overrightarrow{\text{grad}}_M G_2(M_o M)] \longrightarrow o$$
$$\text{lorsque} \quad |\overrightarrow{OM}| \longrightarrow \infty$$

III DETERMINATION DE LA FONCTION DE GREEN

Il nous faut résoudre l'équation :

3 $\text{div}_M(c^2(M)\ \text{grad}_M G(M_o,M)) + \omega^2 G(M_o,M) = -\delta(M-M_o)$

Pour cela nous allons chercher une fonction de Green ayant une transformée de Fourier. Posons

3 - 1
$$G(M,M_o) = \int_K e^{-2\pi i\,\vec{K}.\overrightarrow{M_oM}}\, g(\vec{K})\,d^3K = F(g)$$

Nous pouvons écrire (3) sous la forme :

3 - 2
$$\text{div}[c^2 \int_K \overrightarrow{\text{grad}}_M (e^{-2\pi i\vec{K}.\overrightarrow{M_oM}})\ g(\vec{K})\ d^3K]$$
$$+\omega^2 \int_K e^{-2\pi i\ \vec{K}.\overrightarrow{M_oM}}\ g(\vec{K})\ d^3\,K = -\delta(M - M_o)$$

Nous allons introduire v_o la "vitesse moyenne" de propagation (v_o pourra être déterminée par des mesures) et w les fluctuations de c^2 par rapport à v_o^2. On aura :

$$c^2 - v_o^2 = w$$

(comme $c^2 > o$, on voit que l'on doit avoir $w > -v_o^2$; nous aurons $w \simeq 2\,v_o\ (c - v_o)$ si le milieu est faiblement perturbé)

Nous pouvons écrire 3 - 2 sous la forme :

$$\text{div}[(v_o^2 + w) \int_K \overrightarrow{\text{grad}}_M(e^{-2\pi i\vec{K}.\overrightarrow{M_oM}})\ g(\vec{K})\ d^3K\ ] +$$

3 - 3

$$+\omega^2 \int_K e^{-2\pi i \vec{K}.\vec{M_o M}} g(\vec{K})\, d^3K = -\delta(M - M_o)$$

Soit :

$$\int_K [\omega^2 - 4\pi^2 |\vec{K}|^2 v_o^2]\, e^{-2\pi i \vec{K}.\vec{M_o M}} g(\vec{K})\, d^3K =$$

3 - 4 $$+ \mathrm{div}_M [w \int_{\vec{K}} \vec{\mathrm{grad}}_M (e^{-2\pi i \vec{K}.\vec{M_o M}}) g(\vec{K}) d^3K] = -\delta(M-M_o)$$

or ;

$$\mathrm{div}_M [w \int_{\vec{K}} \vec{\mathrm{grad}}_M (e^{-2\pi i \vec{K}.\vec{M_o M}}) g(\vec{K}) d^3 K] =$$

3- 5 $$= \vec{\mathrm{grad}}\, w . [\int_{\vec{K}} -2\pi i \vec{K}\, e^{-2\pi i \vec{K}.\vec{M_o M}} g(\vec{K})\, d^3 K]$$

$$- 4\pi^2 w \int_{\vec{K}} |\vec{K}|^2 e^{-2\pi i \vec{K}.\vec{M_o M}} g(\vec{K})\, d^3 K$$

Prenons la transformée inverse de Fourier de 3-4
il vient :

$$[w^2 - 4\pi^2 |\vec{K}|^2 v_o^2]\, g(\vec{K}) - 4\pi^2 [F^{-1}(w)] * (|\vec{K'}|^2 g(\vec{K'}))$$

3 - 6 $$+ [F(\vec{\mathrm{grad}}\, w)] * [-2\pi i \vec{K'} g(\vec{K'})]$$

$$= - e^{-2\pi i \vec{K}.\vec{o M_o}}$$

Posons $F_1 = F^{-1}(w)$

$$\vec{F_2} = F^{-1}(\vec{\mathrm{grad}}\, w) = -2\pi i \vec{K}\, F(w) = -2\pi i \vec{K}\, F_1$$

3 - 6 s'écrit :

$$[w^2-4\pi^2 |\vec{K}|^2 \; v_o^2 \;]g(\vec{K})-4\pi^2 \; F_1 \; * \; [\,|\vec{K'}|^2 \; g(\vec{K'}) \;]$$

3 - 7 $$- \, 2\pi i \; \vec{F}_2 \; * \; (\vec{K'} g(\vec{K'}) \;) \; = \; - \; e^{-2\pi i \; \vec{K} . \; \vec{OM}_o}$$

Divisons les deux membres par

$$w^2-4\pi^2 |\vec{K}|^2 \; v_o^2 \; .$$

On aboutit à l'équation de convolution :

3-8 $$g(\vec{K}) = - \; \frac{e^{-2\pi i \; \vec{K}.\vec{OM}_o}}{\omega^2-4\pi^2 \; |\vec{K}|^2 \; v_o^2} + \frac{[4\pi^2 F_1 \; * \left(|\vec{K'}|^2 \; g(\vec{K'})\right) + 2\pi i F_2 * (\vec{K'} g(\vec{K'})\,)}{\omega^2-4\pi^2 \; |\vec{K}^2| \; v_o^2}$$

On peut résoudre formellement cette équation intégrale par approximations successives et obtenir la solution sous la forme d'une série :

3 - 9 $$g = \sum_{n=o}^{\infty} g_n$$

3-10 où $$g_o = - \; \frac{e^{-2\pi i \; \vec{K}. \; \vec{OM}_o}}{\omega^2- \; 4\pi^2 \, |\vec{K}|^2 v_o^2}$$

et

3-11 $$g_n = \frac{[4\pi^2 F_1 * \; \left(|K'|^2 g_{n-1}(\vec{K'})\right) + 2\pi i \; F_2 * \left(\vec{K'} g_{n-1}(\vec{K'})\right)}{\omega^2-4\pi^2 \, |\vec{K}|^2 v_o^2}$$

Sous réserve de convergence de la série, on obtient G en inversant 3-9 par transformation de Fourier :

3-12 $$G = \sum_{n=o}^{\infty} G_n$$

avec

3-13 $$G_n(M_oM) = \int_{\vec{K}} g_n(\vec{K})\, e^{-2\pi i\, \vec{K}.\vec{OM}}\, d^3 K$$

On retrouve $$G_o = \frac{e^{\pm \frac{i\omega}{v_o} |\vec{M_oM}|}}{4\pi\, |\vec{M_o M}|} \times \frac{1}{v_o^2}$$

qui est la fonction de Green du milieu, supposé homogène et infini, correspondant à la densité moyenne $\rho_o = \frac{1}{c_o\mu}$

Dans la suite nous ne considérerons que

$$G_o = \frac{e^{ik_o |\vec{M_oM}|}}{4\pi |\vec{M_o M}|} \times \frac{1}{v_o^2} \;,\; k_o = \frac{\omega}{v_o}$$

qui correspond à une onde qui s'éloigne du point M_o, en raison de la dépendance par rapport au temps par le facteur $e^{+i\omega t}$

Les G_n sont donnés par la formule de récurrence :

$$G_n = - \{F^{-1}[(\omega^2 - 4\pi^2 |\vec{K}|^2 v_o^2)^{-1}]\} * \{div\,(\omega\, \vec{grad}\, G_{n-1})\}$$

$$G_1 = \{F^{-1}[(\omega^2 - 4\pi^2 |\vec{K}|^2 v_o^2)^{-1}]\} * \{div(\omega\, \vec{grad}\, G_o)\}$$

$$= \{F^{-1}[(\omega^2-4\pi^2|\vec{K}|^2v_o^2)^{-1}]\} * \{-\frac{w}{v_o^2}(G_o+\delta)+\overrightarrow{grad}\, w.\, \overrightarrow{grad}\, G_o\}$$

$$= \{ F^{-1}[(\omega^2-4\pi^2|\vec{K}|^2v_o^2)^{-1}]\}$$

$$+ \{[F^{-1}(\omega^2-4\pi^2|\vec{K}|^2 v_o^2)^{-1}]\} * \{-\frac{w}{v_o^2} G_o+ \overrightarrow{grad}\, w.\overrightarrow{grad}\, G_o\}$$

Dans les problèmes physiques w est une fonction bornée. Nous avons :

$$0 < |w| < M.$$

Alors :

$$|G_j| \leqslant M \int_S \frac{1}{|\vec{OM}|} \left| \frac{\partial}{\partial n} G_o \right| dS \leqslant$$

$$\left| \frac{\partial G_1}{\partial x_o}(M_o) \right| \leqslant M \int_S \frac{1}{|\vec{OM}|} \left| \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial G}{\partial x_o}(M,M_o) \right| dS$$

D'où $|\overrightarrow{grad}\, G_1 (M_o,M)| \leqslant M \left[\left(\int_S \frac{1}{|\vec{OM}|} \left|\frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial G}{\partial x_o}\right| dS\right)^2 + \right.$

$$\left. +\left(\int_S \frac{1}{|\vec{OM}|} \left|\frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial G}{\partial y_o}\right| dS\right)^2+\left(\int_S \frac{1}{|\vec{OM}|} \left|\frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial G}{\partial z_o}\right| dS\right)^2\right]^{1/2}$$

Posons :

$$\alpha^2=\left(\int_S \frac{1}{|\vec{OM}|} \left| \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial G}{\partial x_o}\right| dS\right)^2 +$$

$$+\left(\int_S \frac{1}{|\vec{OM}|} \left|\frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial G}{\partial y_o} \right|dS\right)^2+\left(\int_S \frac{1}{|\vec{OM}|} \left|\frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial G}{\partial z_o}\right|dS\right)^2$$

On trouve finalement que :

$$| G_j | \leqslant M^n \alpha$$

On peut vérifier aisément que α est finie sauf peut être lorsque M vient en M_o . Il faudrait faire une étude directe des discontinuités de l'intégrale donnant G_j en l'appliquant à une fonction test .

Si M est assez petit, la série

$$G = \sum_{n=o}^{\infty} G_n$$

sera convergente .

On pourra écrire alors U sous la forme d'une série :

3-14 $$U(M_O) = \sum_{j=o}^{\infty} U_j = \int_S [G(M,M_o)\frac{\partial U}{\partial n}(M) - U(M)\frac{\partial G}{\partial n}(M,M_o)]dS$$

avec :

$$U_j(M_o) = \int_S c^2[U \vec{n}.\overrightarrow{grad}_M G_j - G_j \vec{n}.\overrightarrow{grad} U] dS$$

$$= \int_S v_o{}^2[U(M)\vec{n}.\overrightarrow{grad}_M G_j(M,M_o) - G_j(M,M_o) \vec{n}.\overrightarrow{grad} U] dS$$

$$+ \int_S w [U(M) \vec{n}. \overrightarrow{grad}_M G_j(M.M_o) - G_j(M,M_o) \vec{n}.\overrightarrow{grad} U]dS$$

Chaque U_j est donc la somme de deux termes : l'un correspondant à la propagation dans un milieu homogène de densité ρ_o et l'autre décrivant les fluctuations de ce terme .

On retrouve en particulier que

$$U_o(M_o) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \left[U(M) \frac{\partial e^{-ik_o|\vec{M M_o}|}}{\partial n \, |\vec{M M_o}|} - \frac{\partial U}{\partial n} \frac{e^{-ik_o|\vec{MM_o}|}}{|\vec{M M_o}|} \right] dS$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{w}{v_o^2} \left[\frac{\partial U}{\partial n} (M) \frac{e^{-ik_o|\vec{M_o M}|}}{|\vec{M M_o}|} - U(M) \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-ik_o|\vec{M_o M}|}}{|\vec{M_o M}|} \right. dS$$

est le terme prépondérant lorsque M_o s'éloigne indéfiniment.

Si $\left|\frac{w}{v_o^2}\right|$ n'est pas plus petit que 1, on peut "stratifier" le milieu et appliquer la méthode précédente dans chaque couche l , de telle sorte que $\frac{|w_l|}{v_{o,l}^2}$ reste petit. On peut appliquer alors une méthode semblable à celle décrite dans [1] pour étudier la propagation du son en milieu stratifié.

Il faut remarquer que la méthode précédente appliquée à $\mathrm{div}\,[c^2\, \vec{\mathrm{grad}}\, G\,(M_1 M_o)] + \omega^2\, G(M_1\, M_o) = -\,\delta(M - M_o)$ conduit à une série qui donne G comme combinaison linéaire infinie de distributions de Dirac et de ses dérivées, si l'on ne considère pas les fluctuations de c^2 autour de v_o^2 .

L'étude de la convergence de la série est plus difficile. D'autre part, on ne met pas en évidence les grandeurs opérationnelles (v_o^2).

Conclusion :

Après avoir déterminé la fonction de Green de l'équation scalaire de propagation en milieu inhomogène, nous l'avons appliquée au problème de la propagation d'une onde sonore . La solution est donnée implicitement par l'équation intégrale 3 - 14 . Celle-ci correspond à une généralisation du principe de Huygens . On peut étendre ces résultats aux problèmes vectoriels. L'équation 3-14 semble également adaptée à l'étude du rayonnement de sources aléatoires . [3]

Bibliographie :

I - M. BOUIX : Solution de l'équation du son avec des sources à distance finie et dans un espace formé de deux ou plusieurs milieux - Faculté des Sciences de Rouen -

2 - M. MECHLER : Extension du principe de Huygens à la propagation dans des milieux de densité variable- C.R.A.S - 8 Mai 1967, t.264 n°19, pp.830-833

3 - PAPOULIS : Systems and transforms with applications in optics.
Mc. Graw-Hill.