



4/1

**DEUXIÈME COLLOQUE  
SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL  
ET SES APPLICATIONS  
NICE - 5 AU 10 MAI 1969**

---

COMMENTAIRES SUR LES DEUX METHODES CLASSIQUES DE CALCUL  
DE PROPAGATION : THEORIE DES RAYONS ET THEORIE DES MODES

COMMENTS ON THE TWO CLASSICAL METHODS USED IN WAVE PROPAGATION  
STUDIES : RAY THEORY AND MODE THEORY

C. LEROY

---

On rappelle brièvement la genèse de deux orientations différentes des calculs de propagation, l'une conduisant au tracé de rayons géométriques, et l'autre à la recherche de solutions à l'équation des ondes par superposition de modes. On passe alors en revue l'application de ces méthodes à l'acoustique sous marine.

On suppose tout d'abord le milieu stratifié. On examine les différentes solutions pour approximer le profil de célérité par des segments de courbes qui correspondent à des cas intégrables de l'équation des rayons. La recherche de solutions donnant l'état vibratoire du milieu par un développement en modes normaux est illustrée dans le cas du modèle de PEKERIS. On cite ensuite différents modèles plus élaborés résolus depuis et appliqués au cas des eaux peu profondes ou des chenaux soneux.

Dans un dernier chapitre on indique succinctement l'orientation de calculs pour tenir compte de différents types d'imperfections dans la stratification.

---

The foundations of two different methods for studying wave propagation (geometrical rays and modes) are briefly recalled, and the various applications of these methods to underwater acoustics are reviewed.

The medium is first assumed to be perfectly stratified. The various solutions to approximate the velocity profile by segments of curves leading to an exact solution are examined. The search for a development in terms of normal modes is then illustrated in the case of PEKERIS' model. More recent and more sophisticated models are considered, that can be applied to shallow-water or sound-channel propagation problems.

The last section summarizes various developments towards the treatment of imperfectly stratified media.



COMMENTAIRES SUR LES DEUX METHODES CLASSIQUES DE CALCUL DE  
PROPAGATION : THEORIE DES RAYONS ET THEORIE DES MODES

C. LEROY

---

1. - GENERALITES

1.1. - La propagation des ondes sonores est gouvernée par l'équation

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

où  $c$  est la célérité du son et où  $\Phi(x, y, z, t)$  peut désigner au choix une des différentes quantités caractérisant l'état vibratoire du milieu (déplacement de particule, vitesse de particule, densité ou pression instantanée) ou encore une fonction potentielle de ces quantités.

Dans la pratique, c'est la pression qui est la quantité mesurée. Cependant, pour des raisons de facilité mathématique lors de l'écriture des conditions aux limites, la fonction  $\Phi$  considérée est la plupart du temps le potentiel des déplacements ou des vitesses. Nous adoptons cette dernière convention dans tout ce qui suit.

Avant d'entrer dans les différentes méthodes pratiques de résolution de l'équation (1), il est nécessaire de faire un certain nombre de remarques :



---

L'équation (1) est obtenue par la combinaison de trois équations (conservation de la masse, conservation des quantités de mouvement, équation d'état). Or d'une part, celles-ci comportent déjà des approximations (petits mouvements, fluide au repos, milieu sans pertes, adiabaticisme) et d'autre part, lors de la combinaison conduisant à (1), il a fallu admettre que les paramètres élastiques du milieu ne dépendent pas de l'espace autour du point considéré, ce qui revient à dire que les variations de la célérité du son ne sont pas trop abruptes. Il y a donc dès le départ une première série de limitations sur le domaine de validité de (1). Ce problème est traité spécialement dans une autre conférence de ce colloque.

Si l'on classe à part le cas important des signaux de très forte amplitude (acoustique non linéaire, amplitudes finies), les restrictions ci-dessus sont en général peu importantes comparées à celles qu'imposeront les simplifications admises pour faciliter la résolution mathématique de (1). Le problème de l'amortissement mérite cependant une attention spéciale. On peut en considérer certaines causes dès les équations de base (réf. 1), mais il se trouve que l'amortissement observé (de causes très multiples), peut être introduit à posteriori par un facteur correctif. Nous réservant cette possibilité pour la suite dans les calculs pratiques, nous envisagerons donc tout d'abord le problème de la résolution de (1).

- 1.2. - Soit donc à résoudre (1) où nous admettrons que  $c$  est une fonction de l'espace :  $c = c(x, y, z)$ . Le traitement mathématique s'oriente vers deux directions bien distinctes selon l'importance que l'on donne à priori au fait que le milieu a nécessairement des frontières. Si ce fait est considéré comme essentiel avant tout développement ultérieur (et en pratique si les frontières jouent un rôle capital) le problème peut s'énoncer ainsi :



## RAYONS et MODES

" Etant donné d'une part l'équation (1) et les conditions imposées à  $\Phi$  sur certaines surfaces (limites du milieu, surfaces de séparation entre tranches de caractéristiques différentes), et d'autre part les conditions initiales, trouver la fonction donnant  $\Phi$  en tout point et tout instant". (A)

Si par contre on laisse provisoirement de côté cette préoccupation, on remarque que (1) est une équation aux dérivées partielles linéaires, du second ordre, du type hyperbolique. L'équation des caractéristiques (\*) en est  $(\nabla\Phi)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial c}{\partial t}\right)^2 = 0$ . On peut à partir de là, développer une solution qui prend en considération les caractéristiques des caractéristiques (ou bicaractéristiques), qui ne sont autres que les rayons au sens généralisé. Nous préférons cependant introduire ceux-ci à partir de concepts moins abstraits et pour ce faire, nous revenons à l'équation (1).

La variable temps y joue évidemment un rôle à part et il est indiqué pour l'étude de la forme du signal acoustique en fonction du temps en un point donné x y z, de faire intervenir la transformée de FOURIER.

Soit donc, suivant la notation complexe classique :

$$\Phi(x y z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x y z, \omega) e^{j \omega t} d \omega \quad (2)$$

Substituant (2) en (1) conduit à :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \nabla^2 G + \frac{\omega^2}{c^2} G \right] e^{j \omega t} d \omega = 0 \quad (3)$$

équation identiquement vérifiée quand le terme entre crochets s'annule.

(\*) Voir par exemple réf. g.



## RAYONS ET MODES

On convient de poser  $\frac{\omega}{c} = k =$  nombre d'onde, (en introduisant la longueur d'onde  $\lambda$ , on a aussi  $k = \frac{2\pi c}{\lambda}$ ) et (3) s'écrit :  $\nabla^2 G + k^2 G = 0$ .

On trouverait de même, dans le cas monochromatique, posant  $\Phi(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z) e^{j\omega t}$  :

$$\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = 0 \quad (4)$$

Dans ce cas, on vérifie également que  $\nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = 0$  en sorte que  $\Phi$  et  $\varphi$  obéissent à la même équation.

Le problème de la propagation peut donc se ramener à la résolution de l'équation (4).

Posons alors :

$$\varphi(x, y, z) = A(x, y, z) e^{j S(x, y, z)} \quad (5)$$

$S$  représente la phase de l'état vibratoire au point  $x, y, z$ . Les surfaces  $S = \text{Cte}$  sont des surfaces d'égale phase ou surfaces d'onde et l'on peut développer une théorie généralisée des rayons en considérant les courbes orthogonales à ces surfaces. Jusqu'ici aucune hypothèse simplificatrice n'a été faite. Essayons alors de résoudre (4) en  $A$  et  $S$ . En substituant (5) dans (4) et en séparant les parties réelle et imaginaire, on trouve :

$$\nabla^2 A - A (\nabla S)^2 + k^2 A = 0 \quad (6a)$$

$$2 \nabla A \cdot \nabla S + A \nabla^2 S = 0 \quad (6b)$$

La résolution du système (6) pose de sérieux problèmes et se trouve grandement facilitée si l'on peut négliger  $\nabla^2 A$  devant



## RAYONS et MODES

les autres termes de (6a) qui se réduit alors à :

$$(\nabla S)^2 = k^2 \quad (7)$$

Cette équation est dite équation de l'iconale.

Un changement de coordonnées tel que  $d\xi = k dx$   
 $d\eta = k dy$   $d\zeta = k dz$  transforme (7) en  $(\nabla S)^2 = 1$ , d'où  
 $S = \alpha^2 x + \beta^2 y + \gamma^2 z$  avec  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ .

Dans l'espace  $\xi, \eta, \zeta$  les surfaces  $S = Cte$  sont des plans parallèles, leurs courbes orthogonales des droites, qui sont les géodésiques dans cet espace.

On démontre à partir de là, (\*) en revenant dans l'espace  $x, y, z$  que les courbes orthogonales aux  $S = Cte$ , appelées rayons géométriques, ont les propriétés suivantes (cf. en optique géométrique) :

- ils sont stationnaires dans le temps : entre deux points  $P_1$  et  $P_2$  sur un même rayon, l'intégrale  $\int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{c}$  est un extrémum (principe de FERMAT).
- ils suivent une loi de Descartes généralisée
- ils définissent la direction du flux d'énergie.

Cette dernière propriété est fondamentale : le problème posé par l'étude du milieu soumis au phénomène sonore est vu sous un nouvel angle :

" Recherche des trajectoires selon lesquelles se propage l'énergie, et étude de l'évolution des signaux en suivant ces trajectoires " } (B)

Ce point de vue est à opposer à celui spécifié plus haut en (A).

(\*) Voir par exemple réf. a.b.f



La condition qui doit être remplie pour pouvoir simplifier (6a) en (7), peut s'écrire :

$$\frac{\nabla_A^2}{A} \ll k^2 \quad (8)$$

On démontrerait (Cf. par exemple réf.a page 39, réf. b page 50 etc...) que cette condition se réduit, en théorie des rayons géométriques pour des fréquences suffisantes, à admettre que la valeur absolue de la variation du gradient de célérité sur une longueur d'onde est très petite par rapport à la célérité divisée par la longueur d'onde (  $\delta c' \ll \frac{c}{\lambda}$  ).

La condition (8) a néanmoins une valeur plus générale. Si elle est réalisée, il est possible de poursuivre le problème posé sous la forme "A" et rechercher  $\varphi = Ae^{jS}$  à l'aide d'équations plus simples. C'est la méthode dite de l'approximation W K B (des noms de WENZEL, KRAMER et BRILLOUIN).

La recherche de la résolution de l'équation (4) lorsque l'on se donne les conditions aux limites et les conditions initiales (point de vue "A" où  $\Phi$  est à remplacer par  $\varphi$ ) débouche sur une méthode de superposition de solutions particulières liées, que l'on appelle des modes.

Soit, pour illustrer la méthode, l'équation (4) en coordonnées cartésiennes. On va chercher des solutions  $\varphi$  de la forme  $\varphi(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z)$  produit de LAPLACE).

(4) devient alors :

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 = 0$$

Cette équation peut être remplacée par le système



## RAYONS et MODES

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + q^2 X &= 0 \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + r^2 Y &= 0 \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + s^2 Z &= 0 \\ q^2 + r^2 + s^2 &= k^2 \end{aligned} \tag{9}$$

où  $q$ ,  $r$  et  $s$  sont réels ou imaginaires et seraient dans le cas le plus général des fonctions de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Les conditions aux limites vont imposer de nouvelles relations à remplir par  $q$ ,  $r$  et  $s$ . Si l'on conçoit  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$  comme des opérateurs appliqués à  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ , on constate l'analogie du problème posé par chacune des 3 premières équations de (9) avec un problème de valeurs propres. Les  $q$ ,  $r$ ,  $s$  où l'ensemble du problème est résolu, seront des valeurs propres, ils seront solution d'équations caractéristiques. Les fonctions  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  seront des fonctions propres, et les solutions  $\varphi_{qrs}$  seront des modes de vibration du système à la fréquence  $\omega = kc$ .

## 2. - TRAITEMENT DES PROBLEMES D'ACOUSTIQUE SOUS MARINE PAR LES RAYONS GEOMETRIQUES EN MILIEU STRATIFIE

2.1.- Examinons maintenant le cas particulier de l'acoustique sous-marine. Contrairement à de nombreux problèmes de guide d'onde en radioélectricité, ou des problèmes d'enceintes résonnantes et acoustique générale, etc..., il est très rare que l'on puisse se satisfaire d'un modèle où la célérité  $c$  est constante dans l'eau. Cependant, la mer forme un milieu quasi-stratifié et dans la plupart des cas, on peut prendre  $c$  fonction de  $z$  seul. Cette hypothèse ne présente pas de désavantage en théorie des rayons, les phénomènes



aux frontières étant traités à part (problèmes de la réflexion). Par contre, elle est gênante en théorie des modes car le milieu ne peut plus être formellement considéré comme stratifié dès que le fond n'est pas plat. Nous envisagerons en dernière partie quelques extensions aux milieux imparfaitement stratifiés.

Dans ce chapitre majeur, nous supposons  $c = c(z)$  et le problème est donc de révolution autour de l'axe vertical passant par la source.

Si  $c = c(z)$ , la loi de DESCARTES généralisée montre que :

- les rayons sont toujours contenus dans un plan vertical
- tout le long de chaque rayon, on a : (voir les conventions en fig. 1).

$$\frac{\cos \theta}{c} = \text{constante} \quad (10)$$

La constante de (10) est exprimée soit en fonction des conditions à la source :

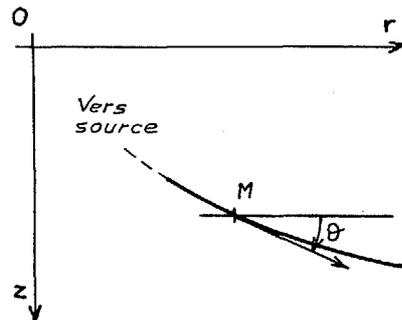
$$\frac{\cos \theta}{c} = \frac{\cos \theta_0}{c_0} \quad (10\text{bis})$$

soit (mieux dans certains cas), sous la forme

$$\frac{\cos \theta}{c} = \frac{1}{c_m} \quad (10\text{ter})$$

$c_m$  désigne alors la célérité maximale atteinte durant le trajet du rayon, lorsque celui-ci est horizontal. (\*)

Fig. 1



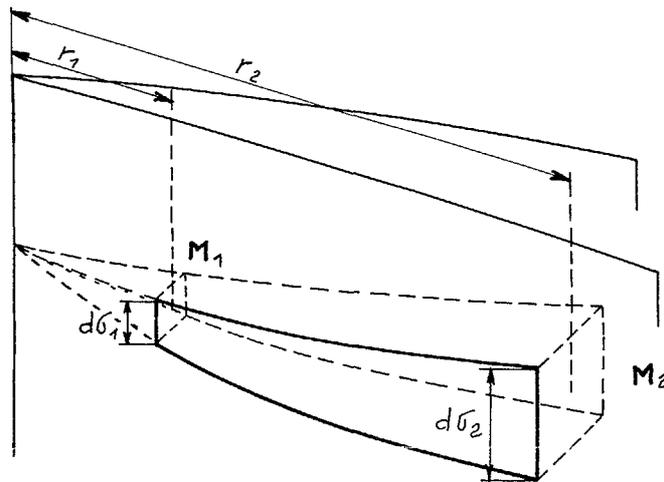
Le fait que les rayons soient contenus dans un plan vertical permet d'exprimer la perte d'énergie par divergence entre deux

(\*) Cette formulation est dénommée dans le jargon des acousticiens de langue anglaise "V<sub>x</sub> method" (célérité au vertex).



points, en fonction des distances horizontales de ces points à la source et des écarts en ces points entre deux rayons du plan infiniment voisins, autrement dit de ramener le problème à un problème plan. On a (Cf. fig. 2) : perte énergétique de  $M_1$  à  $M_2 = \frac{r_2 d\sigma_2}{r_1 d\sigma_1}$

Fig. 2



Ce calcul cesse d'être applicable près des "croisements" de rayons (caustiques). Ceci marque la différence essentielle entre les possibilités de la théorie des rayons géométriques et celles de l'approximation W K B, toutes deux, répétons-le, basées sur les mêmes hypothèses simplificatrices.

Le problème de la propagation a donc été ramené à trouver des trajectoires  $r(z)$ . On verrait immédiatement en combinant (10ter) et  $dr = ds \cos \theta$ ,  $dz = ds \sin \theta$

$$r = \int \frac{c(z)}{\sqrt{c_m^2 - c^2(z)}} dz \quad (11)$$

et on trouverait de même que la perte par rapport à la distance unité peut s'exprimer, parmi différentes formes par :

$$\text{Perte énergétique} = \frac{c}{c_o} \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \theta_o c_m r \frac{dr}{dc_m} \quad (12)$$

Enfin, une dernière quantité intéressante que permet de calculer la théorie des rayons est le temps de parcours  $t = \int c(z) ds$  le long d'un rayon. On trouverait :



$$t = \int_{c_m}^c \frac{dz}{\sqrt{c_m^2 - c^2}} \quad (13)$$

Dans la quasi-totalité des cas, le profil de célérité  $c(z)$  est une courbe compliquée non représentable par des fonctions classiques et (11) n'est pas intégrable.

## 2.2. - Intégration de l'équation des ondes

On pourrait théoriquement résoudre (11) par ordinateur. Cependant la durée du calcul pour chaque rayon rend cette méthode prohibitive et l'on cherche à découper le profil de célérité en tranches où  $c(z)$  peut être approximé par des fonctions telles que (11) soit intégrable.

Pour étudier les cas d'intégrabilité de (11) il peut être parfois avantageux d'inverser le rôle des variables  $c$  et  $z$  et d'écrire :  $z = z(c)$

d'où

$$r = \int \frac{c}{\sqrt{c_m^2 - c^2}} \frac{dz}{dc} dc \quad (14)$$

formulation qui présente l'intérêt de rejeter la fonction cherchée hors du radical.

### 2.2.1. Profil rectiligne

L'équation (14) est immédiatement intégrable si  $\frac{dz}{dc} = \text{cte}$ . C'est la solution élémentaire d'une relation linéaire entre  $z$  et  $c$  (gradient constant). Les détails de résolution ont déjà été exposés dans le précédent colloque : On trouve dans chaque couche des arcs de cercle pour rayons; la méthode est largement utilisée par ordinateur, voire par calculateur de bureau. Cette solution est simple et utile mais elle conduit à des anomalies dans



les calculs de pertes par divergence, anomalies étudiées en détail par PEDERSEN (réf. 2). On trouve en effet que la formulation générale de  $\frac{dr}{dc_m}$  fait intervenir la quantité

$$\sum_i \frac{\left[ \frac{dz_i}{dc} - \frac{dz_{i-1}}{dc} \right] c_i}{\sqrt{c_m^2 - c_i^2}} \quad \text{où } z_i(c) \text{ désigne la fonction représentative de } z(c) \text{ dans la couche } (z_{i-1} - z_i).$$

Cette quantité devient infinie chaque fois que  $c_m \rightarrow c_i$  si les dérivées de part et d'autre de l'intercouche sont différentes, ce qui est nécessairement le cas pour une approximation par segments linéaires.

Les figures 3 et 4 (d'après PEDERSEN) illustrent ce fait pour un profil intégrable approximé par 84 couches linéaires.

Fig. 3

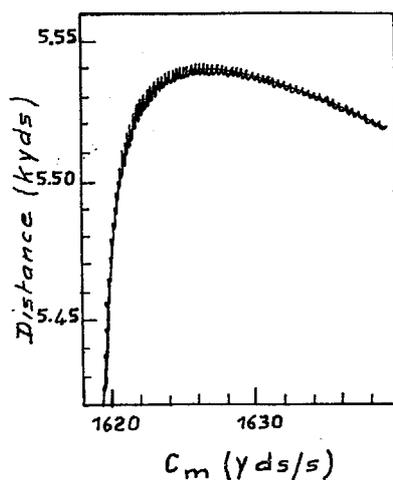
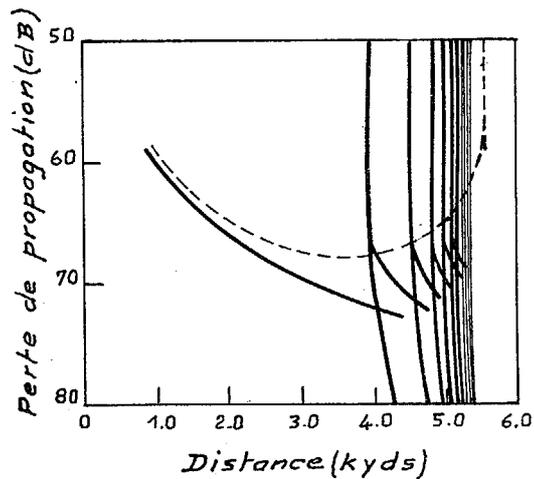


Fig. 4





On note que la courbe  $r(c_m)$  obtenue peut être facilement assimilée, après lissage, à la courbe exacte, alors que la perte par divergence n'est absolument pas représentative de la vérité. Une méthode possible apparaît immédiatement : le calcul de la perte à partir de la courbe  $r(c_m)$  lissée. Dans la pratique néanmoins le problème n'est pas simple, vu de l'ordinateur, et l'on s'est efforcé, et s'efforce encore, de trouver d'autres méthodes par l'emploi de fonctions  $f(c, z)$  de degré supérieur, pour lesquelles (11) - (14) sont intégrables et qu'on pourra employer en certain nombre (le plus petit possible) pour approcher le profil vrai, en évitant les discontinuités aux jonctions.

Notons enfin, qu'en plus de l'inconvénient ci-dessus, le profil par segments rectilignes est impropre à faire ressortir la vraie caustique qui se produit pour un maximum relatif de la distance  $r = r(c_m)$ .

### 2.2.2. Profils curvilignes

D'une façon générale, l'intégrande de (11) et (13) contient un radical. Il est donc utile de se rappeler que si  $X$  est une forme polynomiale en  $x$ , on sait exprimer par récurrence les intégrales  $I_m = \int \frac{x^m}{\sqrt{X}} dx$  en fonction d'un certain nombre d'intégrales irréductibles, dépendant du degré de  $X$  et du nombre de racines nulles éventuelles de  $X = 0$ .

Ces intégrales sont exprimables par des fonctions élémentaires si  $X$  est quadratique et  $m$  entier, et par des fonctions elliptiques si,  $m$  restant entier,  $X$  est du 3<sup>e</sup> ou du 4<sup>e</sup> degré, ou bien si,  $X$  restant quadratique,  $m$  est multiple de  $\frac{1}{2}$ .

#### 1er exemple de profil intégrable :

Sur la forme (11), on voit immédiatement apparaître le cas intégrale  $\frac{1}{c^2} = Az^2 + Bz + C$ , suggéré en premier par

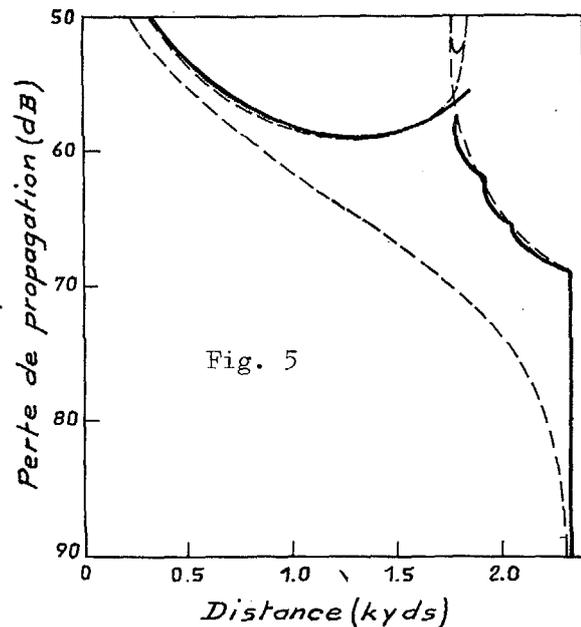


## RAYONS et MODES

PEDERSEN (réf. 2) et WATSON (réf. 3). Les détails des calculs pratiques se trouvent précisés par STEWART (réf. 4) et surtout par PEDERSEN et GORDON (réf. 5). La méthode a été employée au NEL (actuel NUWC) de SAN DIEGO. Plusieurs techniques sont employées pour approcher le profil complet par une suite de portions de courbes :

a) utilisation de la méthode des moindres carrés pour ajuster des groupes de points par quelques courbes, ceci tant que l'écart maximal n'est pas prohibitif, puis raccordement des courbes obtenues par des ensembles de deux courbes assurant la continuité des tangentes aux branches à raccorder, b) ajustement par sections successives avec deux points et une tangente donnés, et c) combinaison de a) et b).

Dans toute cette méthode, le fait que les courbes  $c(z)$  ne dépendent que de 3 paramètres permet d'assurer seulement la continuité des tangentes, mais pas celle des courbures. PEDERSEN et GORDON montrent alors que la perte par divergence calculée ne présente plus d'anomalie du premier ordre (perte infinie) mais que la variation de la perte en fonction de la distance présente des discontinuités. La figure 5 donne un exemple. Pour éviter ces discontinuités, on est donc amené à considérer des développements différents.





2<sup>e</sup> exemple : Considérant maintenant le problème posé sous la forme (14), on trouve d'après les remarques préliminaires formulées plus haut que l'on peut intégrer les expressions  $z - z_0 = A (c - c_0)^m$  où  $m$  est multiple de  $\frac{1}{2}$ , et  $z - z_0 = A \text{Log} (c - c_0)$ .

PEDERSEN préconise alors (réf. 6) des développements de la forme :

$$z - z_0 = \sum_n A_n (c - c_0)^{\frac{n}{2}} \quad (15)$$

qui permettent théoriquement d'ajuster aux jonctions entre sections de courbes, un nombre quelconque de dérivées. Cette méthode permet en outre d'utiliser une technique différente de la précédente: l'approximation d'un petit nombre de grandes sections du profil par des fonctions à nombreux coefficients au lieu d'une division en un grand nombre de sections. Cependant, la méthode exige l'inversion du profil qui est donné en principe sous forme  $c(z)$  et certaines précautions sont nécessaires pour éviter des valeurs multiples en  $z$ .

Notons en passant quelques cas particuliers intégrables rentrant dans les catégories ci-dessus :

le profil parabolique  $c = c_0 + g (z - z_0)^2$

le profil exponentiel  $c = c_0 e^{K (z - z_0)}$

le profil à index linéaire  $\frac{1}{c} = \frac{1}{c_0} + b (z - z_0)$

3<sup>e</sup> exemple : Il existe enfin un profil intégrable qui a attiré l'attention des spécialistes: c'est le profil d'EPSTEIN qui possède la très intéressante propriété de conduire à des expressions intégrables également en théorie des modes. C'est un profil à 5 paramètres défini par :



## RAYONS et MODES

$$\frac{1}{c^2} = \frac{A}{\text{ch}^2 \zeta} + B \text{th} \zeta + D \quad (16)$$

avec 
$$\zeta = \frac{z - z_0}{H}$$

(on vérifierait son intégrabilité en posant  $u = e^{2\zeta}$ )

Le profil d'EPSTEIN est d'une grande souplesse et les formes que l'on peut en obtenir s'adaptent bien aux situations trouvées en pratique dans la mer (\*). Il est utilisé (voir réf. 7) pour contrôler les résultats obtenus par différents types d'approximations, comme ceux vus précédemment, mais on peut aussi envisager d'approcher un profil compliqué par des sections de profils d'EPSTEIN.

On vient donc de voir que l'on dispose à présent de tout un arsenal de fonctions permettant de résoudre par ordinateur, sans introduire de fausses anomalies, les problèmes de propagation sous-marine relevant de la théorie des rayons géométriques en milieu stratifié. Les méthodes ne sont cependant pas encore au point complètement et diffèrent selon les problèmes à résoudre et les laboratoires, mais les solutions les plus appropriées à chaque cas devraient se dégager dans un avenir proche.

---

(\*) NOTE - Le cas particulier  $B = D = 0$  est le profil en cosinus hyperbolique connu depuis longtemps et qui possède l'intéressante propriété que tous les rayons émis par un point sur l'axe se concentrent en un foyer.



3. - TRAITEMENT PAR LES MODES DES PROBLEMES D'ACOUSTIQUE SOUS-MARINE  
EN MILIEU STRATIFIE

3.1. - Examinons maintenant le traitement par les modes des problèmes de propagation en milieu marin stratifié. On est ramené à un problème cylindrique à deux coordonnées  $r$  et  $z$  et à chercher des solutions  $\varphi$  de l'équation (4) ayant la forme

$$\varphi(r, z) = R(r) Z(z)$$

Vu l'expression du Laplacien en coordonnées cylindriques, (4) devient après division par  $R Z$  :

$$\frac{\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr}}{R} + \frac{\frac{d^2 Z}{dz^2}}{Z} + k^2 = 0 \quad (17)$$

Des solutions de cette équation peuvent être obtenues pour tout couple de fonctions  $R$  et  $Z$  vérifiant

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \kappa^2 R = 0 \quad (18a)$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \gamma^2 Z = 0 \quad (18b)$$

pourvu que la liaison suivante soit vérifiée :

$$\gamma^2 + \kappa^2 = k^2 = \frac{\omega^2}{c^2(z)} \quad (19)$$

On conçoit qu'il faut d'abord intégrer (18a) avec  $\kappa = \text{constante}$  et laisser  $\gamma$  fonction de  $z$  par (19). Il vient immédiatement  $R = J_0(\kappa r)$  ( $J_0$  fonction de BESSEL) et il reste à intégrer (18b) selon la forme de  $\gamma^2(z)$ . Les conditions aux limites exigeront que certaines solutions soient vérifiées pour



## RAYONS et MODES

tout  $r$  à certaines valeurs de  $z$ .

La solution générale se présente alors sous la forme de l'intégrale par rapport à la variable d'intégration  $\kappa$  :

$$\varphi = \int_0^{\infty} A(\kappa) J_0(\kappa r) Z(z, \kappa) d\kappa \quad (20)$$

où  $A(\kappa)$  est une fonction arbitraire de  $\kappa$  seul, que les conditions à l'origine (source) spécifient.

Le problème à résoudre est fort complexe et la grande simplification apportée par la symétrie de révolution dans la solution par rayons géométriques ne se retrouve pas. On est amené à intégrer (20) en fonction de la solution de (18b), des conditions à l'origine et des conditions aux limites qui imposeront des modes.

La classe de la fonction  $\gamma(z)$  détermine la complexité de  $Z$  et partant le plus ou moins de facilité à résoudre (20). Le cas  $\gamma = \text{constante}$  conduit immédiatement à

$$Z = A e^{j\gamma z} + B e^{-j\gamma z} \quad (21)$$

mais il correspond à  $c = \text{constante}$ .

Le cas suivant le plus simple en rayons géométriques était  $c = \text{forme linéaire en } z$ . Une telle forme pour  $c(z)$  dans (18b) conduit à des fonctions de BESSEL dont l'ordre dépend de  $\omega$ , ce qui rend les calculs ultérieurs inextricables. Par contre, on trouverait que le cas de l'indice linéaire :  $\frac{1}{c^2} = \frac{1}{c_0^2} + b(z - z_0)$ , conduit à des fonctions de BESSEL d'ordre  $\pm \frac{1}{3}$ . On voit immédiatement la complexité que peut prendre le problème dès le départ et il n'est pas étonnant que la plupart des études initiales portent sur des modèles où le milieu est divisé en couches de célérité constante. Cette simplification peut être justifiée dans de nombreux cas d'une classe de problèmes dont le traitement par modes offre un avantage, à savoir les problèmes de propagation en eau peu profonde.



3.2. - Mettant à part le cas élémentaire du guide d'onde parfait, non réaliste, le modèle classique de base pour la propagation en eau peu profonde est le modèle de PEKERIS (\*) (réf.8). Illustrons brièvement sur ce modèle un processus standard pour le déroulement des calculs. Le milieu à 2 couches (eau et fond fluide) est en fait souvent subdivisé par l'adjonction d'une frontière artificielle au niveau de la source (Cf. fig.6).

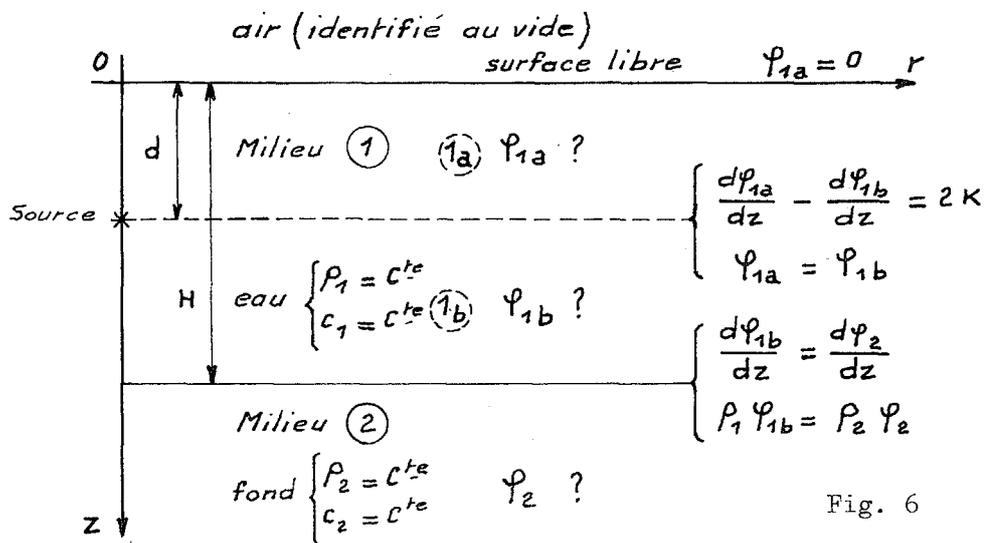


Fig. 6

On démontre en effet que l'introduction de celle-ci moyennant la condition artificielle à l'interface  $\frac{d\psi_{1a}}{dz} - \frac{d\psi_{1b}}{dz} = 2K$  associée à la condition physique  $\psi_{1a} = \psi_{1b}$  permet de satisfaire automatiquement les conditions initiales lorsque l'on intégrera la forme finale de zéro à l'infini.

On explicite alors dans les 3 domaines les solutions (21) avec des constantes d'intégration. Ces solutions font intervenir respectivement dans les milieux 1 et 2 les quantités  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  définies par  $\gamma_1^2 = \left(\frac{\omega}{c_1}\right)^2 - K^2$   $\gamma_2^2 = \left(\frac{\omega}{c_2}\right)^2 - K^2$

Les conditions à l'intercouche artificielle indiquée précédemment et les conditions à la surface et à la séparation eau-fond (voir figure) réduisent (23) à des formes

(\*) Ce modèle à 2 couches a été étendu au cas de 3 couches par PEKERIS lui-même.



## RAYONS et MODES

$$\varphi = 2 \int_0^{\infty} J_0(\kappa r) F(\gamma_1, \gamma_2) \kappa d\kappa \quad (22)$$

On trouverait par exemple dans le domaine 1b

$$F_{1b}(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{\sin \gamma_1 d}{\gamma_1} \frac{\rho_2 \gamma_1 \cos \gamma_1 (H-z) + j \rho_1 \gamma_2 \sin \gamma_1 (H-z)}{\rho_2 \gamma_1 \cos \gamma_1 H + j \rho_1 \gamma_2 \sin \gamma_1 H} \quad (23)$$

Décomposant (22) en deux intégrales, par  $2 J_0 = H_0^{(1)} + H_0^{(2)}$  on vérifie que les conditions pour  $\kappa$  infini permettent de calculer (22) par intégration dans le plan complexe. Les  $F(\gamma_1, \gamma_2)$  possèdent deux points de branchement ( $\kappa_1 = \frac{\omega}{c_1}$ ,  $\kappa_2 = \frac{\omega}{c_2}$ ) et une suite de poles définis par

$$\gamma_2 = \frac{j \rho_2 \gamma_1}{\rho_1 \operatorname{tg} \gamma_1 H} \quad (24)$$

équation obtenue en annulant le dénominateur de (23).

En prenant des coupures appropriées dans le choix du contour d'intégration, on trouverait finalement que (22) se réduit à des formes

$$\varphi = \int_{\mathcal{L}} + 2 \pi j \sum \text{résidus} \quad (25)$$

où  $\int_{\mathcal{L}}$  est une intégrale le long d'une branche.

Jusqu'ici le calcul est rigoureux, mais arrivé à ce stade, il est nécessaire de faire appel à des simplifications pour aboutir à des résultats facilement exploitables. Le calcul de  $\int_{\mathcal{L}}$  étant complexe, et la contribution de cette intégrale étant négligeable dans de nombreux cas, on considère comme solution principale la forme:

$$\varphi = 2 \pi j \sum \text{résidus pour } \kappa_n \quad (26)$$

Les  $\kappa_n$  sont les solutions réelles en  $\kappa$  de l'équation (24) qui est l'équation caractéristique déterminant par ses racines réelles, ce que l'on appelle les modes normaux de propagation, et



la forme (26) est la représentation de  $\varphi$  par la sommation des modes normaux. Elle est valable à moyenne et grande distance de la source. Elle néglige la contribution de l'intégrale  $\int_0^d$  et ne considère pas les modes donnés par les racines imaginaires de (24) (modes évanescents). On verrait qu'à chaque mode est associée une fréquence de coupure basse. Les modes évanescents correspondent à une fréquence de coupure plus élevée que la fréquence du signal. On trouverait en explicitant les solutions, et en remplaçant  $H_0^{(2)}(\kappa r)$  par sa valeur asymptotique pour  $r$  grand :

$$\varphi_{1b} = \sqrt{\frac{8\pi}{Hr}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{(-j\kappa_n r - \frac{\pi}{4})} G_n(\kappa_n) \sin \gamma_1 d \sin \gamma_1 z \quad (27)$$

$$\text{avec } G_n(\kappa_n) = \frac{1}{\sqrt{\kappa_n}} \frac{\gamma_1 H}{\gamma_1 H - \sin \gamma_1 H \cos \gamma_1 H - \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2 \sin^2 \gamma_1 H \operatorname{tg} \gamma_1 H} \quad (28)$$

Réintroduisant la variable temps ( $\Phi = \varphi e^{j\omega t}$ ) on voit immédiatement que la fonction  $\Phi$  est représentée par une sommation d'expressions qui correspondent à une propagation dans le sens radial à la vitesse  $V_n = \frac{\omega}{\kappa_n}$ . Cette vitesse de phase est fonction de  $\omega$  et la propagation est dispersive.

On trouverait que les  $V_n$  vérifient l'équation en  $V$  :

$$\operatorname{tg} = \left( \frac{\omega_n H}{V} \sqrt{\frac{V^2}{c_1^2} - 1} \right) = - \frac{\rho_2 \sqrt{\frac{V^2}{c_1^2} - 1}}{\rho_1 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c_1^2}}} \quad (29)$$

Si maintenant on considère un signal à large bande (impulsion fournie par une source explosive par exemple) on est conduit à une intégrale de la forme (2) que l'on évalue par la méthode des phases stationnaires. Le résultat de cette intégration et de la sommation des modes fait qu'en chaque point de l'espace, à un instant donné, il existe une fréquence prédominante. Si l'on désire suivre une fréquence particulière du spectre on la trouvera prédominante pour une autre combinaison espace-temps et la vitesse correspondante



## RAYONS et MODES

---

ou vitesse de groupe est liée à la première par  $U = V + \kappa \frac{dV}{d\kappa}$

3.3.- Une solution telle qu'il vient d'être développé permet d'étudier le comportement de  $\varphi$  (donc de la pression sonore etc...) en fonction de l'emplacement des récepteurs et de la fréquence. Elle offre de l'intérêt, en dépit de sa complexité mathématique, si, ne cherchant pas à tirer parti des trajets par lesquels arrive l'énergie (rayons) on est intéressé par l'aspect global résultant de l'interférence des arrivées, ou encore si le problème n'est pratiquement résolvable que sous cet aspect. Le calcul par les rayons géométriques peut en effet conduire dans certains cas à une sommation de rayons trop nombreux alors que, les modes supérieurs s'affaiblissant, un calcul par modes peut devenir plus avantageux. C'est ce qui se produit couramment dans la propagation en eau peu profonde et spécialement dans les problèmes de dragage. On estime généralement (réf. 9) que la distance à laquelle un traitement par rayons est plus rentable se situe autour de  $\frac{H}{\lambda^2}$  pour une profondeur  $H$  et une longueur d'onde  $\lambda$ . A des distances inférieures, le nombre de modes à additionner devient trop important et par contre le nombre de rayons correspondant à un transport d'énergie valable est fortement réduit. Il convient bien entendu d'ajouter qu'un traitement par modes peut fournir une image plus exacte de l'intensité dans les cas où les conditions d'applicabilité de la théorie des rayons sont marginales.

D'une façon générale, on trouvera peu de calculs par modes en eau profonde, sauf pour le cas des chenaux sonores où de nouveau, la multiplicité des rayons est un obstacle au traitement. Cependant les chenaux n'existent que si la célérité est fonction de la profondeur. Le modèle de PEKERIS est donc trop schématique pour de nombreux cas et l'on a développé depuis, des modèles plus élaborés.

Le processus de calcul est en général du même genre qu'exposé plus haut : On obtiendra d'abord la solution de (18b), puis on introduira les conditions aux limites et on sera amené à un intégrale de la forme (22) à évaluer dans le plan complexe, et à une équation



caractéristique définissant les modes normaux. La résolution de cette équation et la recherche des modes est souvent ardue. Signalons qu'elle peut être facilitée par un calcul préalable de rayons. Ceci se conçoit lorsque l'on essaie d'exprimer (22) - (23) sous forme d'un développement en une série infinie d'intégrales. D'autre part, l'énergie acoustique reçue en un point quelconque d'un guide d'onde du type de PEKERIS par exemple, peut être considérée comme provenant de directions privilégiées qui sont les directions d'ondes planes bâtissant une interférence constructive. Un raisonnement simple (Cf. par ex. réf. a) montre que de telles directions vérifient, si l'on pose  $V = \frac{c_1}{\cos \theta}$ , où  $\theta$  est l'angle avec l'horizontale, une relation qui s'identifie à (29).

Signalons enfin que l'on peut trouver des approximations aux modes en utilisant la méthode W K B, (voir par exemple à titre introductif réf. b p. 87 -95) si la condition (8) est vérifiée. On est conduit à une forme simplifiée d'équation caractéristique (BOHR - SOMMERFELD).

Les recherches pour résoudre des problèmes d'acoustique sous marine par la méthode des modes normaux ont porté, depuis PEKERIS, dans deux directions principales :

- 1) Etude de modèles multicouches : Le modèle à 2 et 3 couches fluides a d'abord été généralisé à n couches. (par exemple réf. 10). Le fond "fluide" étant une hypothèse souvent peu réaliste, on a développé (réf. 11) des méthodes de résolution pour un modèle à une couche fluide (eau) d'une couche élastique (fond), qui a depuis été généralisé au cas de n couches élastiques (réf. 12) (\*)
- 2) Etude de cas non isocélères intégrables, spécialement pour l'interprétation des phénomènes de propagation en chenal sonore : On sait maintenant traiter complètement les cas  $\frac{1}{c^2} = \frac{1}{c_0^2} + b (z - z_0)$

(\*) Signalons à ce sujet l'intérêt de la méthode que CAGNIARD avait développée en sismologie dès 1939 (réf. 13)



RAYONS et MODES

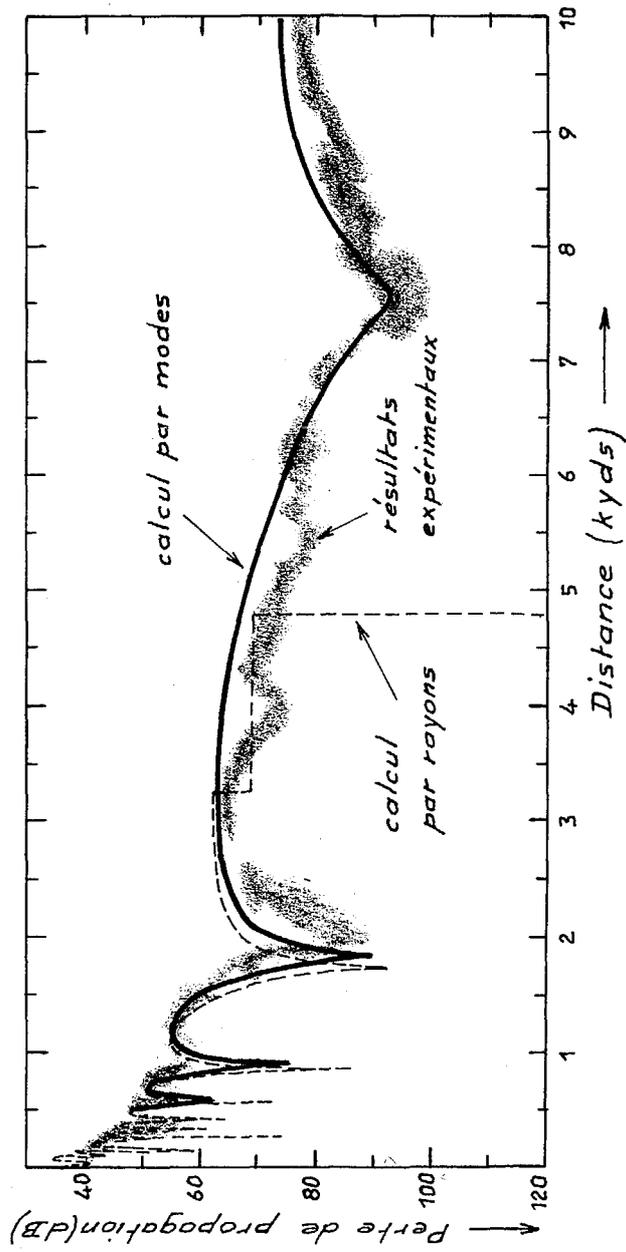


Figure 7  
(d'après Bucker et Morris)



---

(réf. 14),  $\frac{1}{c^2} = \frac{1}{c_0^2} - a^2 z^2$ , ainsi que le profil d'EPSTEIN (p. ex. réf.15).

Nombre de ces études restent encore très théoriques. On a cependant programmé sur ordinateur la résolution de certains modèles et effectué la comparaison avec des résultats expérimentaux. Un exemple est donné en figure 7 (hors texte) : La courbe pleine provient de la sommation des 25 premiers modes et rend bien compte des valeurs observées alors que la courbe obtenue par la théorie des rayons (tirets) est impropre à représenter l'intensité sonore à grande distance.

#### 4.- EXTENSION DES METHODES PRECEDENTES - MILIEU IMPARFAITEMENT STRATIFIE. AMORTISSEMENT

Les chapîtres 2 et 3 traitaient exclusivement le cas du milieu parfaitement stratifié sans amortissement. Nous allons brièvement décrire les prolongements des méthodes précédentes, propres à l'acoustique sous marine pour tenir compte de facteurs supplémentaires.

##### 4.1. - Extensions déterministes

Fond non plat : Le problème n'est plus de révolution

En rayons géométriques, la solution est simple si l'on considère un fond orthogonal au plan vertical source-récepteur. Le problème reste plan. On fait intervenir le profil du fond dans ce plan. La complexité des autres calculs conduit cependant à se contenter en pratique d'une approximation de ce profil par segments linéaires. La perte par divergence est alors calculée en considérant une réflexion spéculaire des rayons. On multiplie cette perte par un coefficient de perte sur le fond, calculé la plupart du temps à partir du coefficient associé à une onde plane incidente sur un fond plan avec l'angle correspondant.



## RAYONS et MODES

---

Un développement sous la forme de modes pour un fond non plat ne peut être fait que moyennant une approximation qui s'avère légitime si le fond "ne varie pas trop". On suppose alors qu'il existe des familles de modes sans couplage entre eux. Le cas est traité pour un fond cylindrique (i.e. variant dans une seule direction). Comme il fallait s'y attendre, le fond plan incliné ne permet pas de trouver des solutions. PIERCE par exemple (réf. 16) considère le cas intégrable où la profondeur H est donnée par

$$\frac{1}{H^2} = \frac{1}{H_0^2} (1 + ax)$$

Il est bien évident que tout fond non "cylindrique", ou encore le cas où source et récepteur ne sont pas dans un plan vertical orthogonal au fond, conduit à un problème à trois dimensions dont les méthodes de résolution ne sont pas encore fixées.

Cas particulier : Terre ronde. La rotondité de la terre entraîne automatiquement l'impossibilité d'avoir des frontières planes et de plus, introduit une "pseudo stratification" sphérique. Ce fait, absolument négligeable pour tout problème ordinaire, peut devenir important pour des propagations à très grande distance (plusieurs milliers de kilomètres). On peut l'introduire de façon approchée tant en théorie des rayons (PEDERSEN par exemple) qu'en théorie des modes (voir par exemple la propagation des ondes herziennes autour de la terre).

Milieu marin imparfaitement stratifié

Dans ce cas, la célérité du son dans l'eau est fonction des trois coordonnées x y et z mais la variation en z est prépondérante et les variations en x et y sont petites et lentes. Le cas des 3 dimensions est très difficile à traiter. Par contre, la variation sur une seule des directions, soit x constitue un cas particulier d'intérêt pratique. On le trouve notamment dans les problèmes d'ondes internes où les isothermes sont assimilables à des surfaces cylindriques à génératrices horizontales se déplaçant



---

lentement, et où les anomalies de propagation sont maximales suivant le plan vertical qui leur est perpendiculaire.

Les ondes internes font l'objet d'études actuelles. On est ramené pratiquement à un problème plan où le profil de célérité  $c(z)$  varie lentement avec  $x$ . La solution qui consisterait à découper le plan en secteurs où la célérité est constante aboutit, à cause des discontinuités entre secteurs, à des anomalies fictives du même genre que celles observées dans l'approximation par segments linéaires d'un profil. Des méthodes plus complètes sont donc nécessaires. L'université de MONTEREY (par exemple) a développé un procédé de calcul progressif par rayons géométriques programmé sur ordinateur. Les rayons sont calculés par petites sections, les données de célérité à introduire pour la section suivante étant à chaque fois recalculées par l'interpolation des données de célérité dont on dispose aux environs du point atteint par la section précédente.

#### Problèmes relatifs aux cas marginaux des rayons géométriques

Dans de nombreux cas limites, les rayons géométriques sont impropres à l'évaluation de la perte par divergence: voisinage des caustiques, zones d'ombre. Il est possible d'améliorer cet état de chose par des facteurs correctifs approchés. Une conférence de ce colloque traite du sujet. Une autre catégorie de problèmes marginaux se rencontre lorsque l'on fait intervenir les petites fluctuations du profil de célérité. Celles-ci étant essentiellement variables d'un point à un autre et seulement évaluables statistiquement, le traitement correspondant relève des méthodes d'étude de la propagation en milieu aléatoire.

#### 4.2. - Extensions non déterministes

Dans de nombreux problèmes on est amené à étudier la déformation des signaux et ceux-ci se trouvent affectés par les



---

petites irrégularités du milieu.

C'est le domaine de la propagation en milieu hétérogène à petites fluctuations de l'indice de réfraction. Elle se traite en superposant à la propagation "macroscopique" (qui donne par exemple les pertes énergétiques moyennes par divergence), une composante aléatoire. Nous ne pouvons entrer ici en détail dans ce domaine.

Pour ce qui est du milieu marin même, ces fluctuations s'introduisent dans la formulation de l'équation des ondes et il est nécessaire de faire des hypothèses simplificatrices pour aboutir à des formes traitables mathématiquement. D'une façon générale, le problème est traité par analogie avec les rayons géométriques, c'est à dire que l'on examine la déformation dans l'espace et le temps d'un signal qui sans hétérogénéités aurait suivi un trajet simple. Nous citerons simplement les travaux de CHERNOV pour le cas monochromatique et ceux de LAVAL pour le cas plus général d'un signal impulsionnel.

Signalons enfin les problèmes de frontières irrégulières, traitables par extension des trajets multiples en rayons géométriques, mais aussi d'un certain intérêt dans la solution par modes (travaux de KIBBLEWHITE et DENHAM, BUCKER et MORRIS, etc...).

#### 4.3. - Introduction de l'amortissement

Les développements précédents supposaient un milieu sans pertes, or diverses causes concourent à un amortissement du son dans le milieu même, qui dépend de la fréquence. On trouve, en suivant un trajet acoustique simple et unique reliant A à B, de longueur  $s$ , que la perte énergétique totale de A à B prend une forme : perte totale = perte par divergence  $\times e^{-a(\omega)s}$  (l'étude de  $a(\omega)$  est encore en cours mais cette fonction ne présente plus d'incertitude qu'aux basses fréquences).



---

L'amortissement peut donc être introduit à posteriori dans un traitement par rayons. Par contre, lors de la recherche de  $\varphi$  dans un traitement par modes, l'introduction de l'amortissement complique les calculs. En général, vu les problèmes traités par modes, on ne tiendra pas compte de l'amortissement dans l'eau mais seulement de celui dans les sédiments. Le développement introduit en ASM par KORNHAUSER et RANEY puis EBY, WILLIAMS, RYAN, TAMARKIN, etc... consiste à prendre un nombre d'onde complexe de la forme  $\frac{\omega}{c} = k + j l$ , avec  $l \ll k$ . On trouve que cette prise en considération de l'amortissement ne change pas trop l'allure générale des résultats obtenus sans amortissement.

#### 5. - CONCLUSION

La résolution des problèmes de propagation en acoustique sous marine peut dans de très nombreux cas être obtenue par des tracés de rayons. Cette solution est de loin préférable lorsque l'on peut isoler les différents trajets ou que l'on cherche à les exploiter dans un système. Elle peut au contraire être insuffisante dans certains cas marginaux (caustiques, phénomènes de diffraction), ou encore lorsqu'ayant affaire à un très grand nombre de rayons interférants on est principalement intéressé par l'énergie globale reçue en un point. Dans le premier cas, des facteurs correctifs plus ou moins approchés peuvent améliorer les résultats. Dans le second cas, (rencontré spécialement en propagation en eau peu profonde et dans les problèmes de chenaux sonores), il peut être utile de faire appel à la théorie des modes.

Du point de vue pratique, les calculs par rayons sont les plus simples, surtout si l'on emploie l'approximation du profil par segments linéaires. Cette méthode donne des résultats suffisants pour la visualisation du champ sonore. Elle peut être sérieusement en défaut dans les calculs d'intensité, les méthodes plus élaborées d'approximation par profils curvilignes permettent d'obtenir d'excellents résultats mais elles aboutissent vite à une grande complexité de programmation, surtout en ce qui concerne les calculs d'ajustement du profil.



## RAYONS et MODES

---

Les calculs par modes, au contraire, sont toujours beaucoup plus laborieux. Les expressions mathématiques à manipuler sont infiniment plus complexes et la résolution d'un problème par modes nécessite deux étapes ardues : la recherche des modes normaux et la sommation d'un nombre suffisant de solutions (parfois 150). Ces calculs, encore prohibitifs il y a une quinzaine d'années deviennent néanmoins possibles sur ordinateur.

REFERENCES

## I - Références générales

- a Introduction to the Theory of Sound Transmission  
C.B. OFFICER - Mc Graw Hill, New York, 1958
- b Ocean Acoustics  
I. TOLSTOY et C.S. CLAY - Mc Graw Hill, New York, 1966
- c Elastic Waves in Layered Media  
W.M. EWING, W.S. JARDETSKY et F. PRESS -  
Mc Graw Hill, New York, 1958
- d Waves in Layered Media  
L.M. BREKHOVSKIKH - Academic Press, New York, 1960
- e The Wave Guide Mode Theory of Wave Propagation  
K.G. BUDDEN - Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962
- f Principles of Optics  
M. BORN et E. WOLF - Pergamon Press, Oxford etc. , 1965
- g Methods of Mathematical Physics  
R. COURANT et D. HILBERT  
Interscience Publishers, New York, 1953

## II - Bibliographie

- 1 L'amortissement du son en milieu marin  
B. GRANDVAUX - Rapport technique n° 18495 DSM/B
- 2 Acoustic Intensity Anomalies introduced by Constant Velocity Gradients.  
Melvin A. PEDERSEN - J.A.S.A., Avril 1961
- 3 Model Sound Channel with Sinusoïdal Rays  
A.G.D. WATSON - J.A.S.A., Nov. 1966



- 
- 4 Ray Acoustical Model of the Ocean Using a Depth/Sound-Speed Profile with a Continuous First Derivative  
Kenneth R. STEWART - J.A.S.A., Août 1965
  - 5 Comparison of Curvilinear and Linear Profiles Approximation in the Calculation of Underwater Sound Intensities by Ray Theory  
Melvin A. PEDERSEN et David F. GORDON  
J.A.S.A., Février 1967
  - 6 Ray Theory Applied to a Wide Class of Velocity Functions  
Melvin A. PEDERSEN - J.A.S.A., Mars 1968
  - 7 Ray Theory of the General Epstein Profile  
Melvin A. PEDERSEN - J.A.S.A., Septembre 1968
  - 8 Theory of Propagation of Explosive Sound in Shallow Water  
C.L. PEKERIS - Geol.Soc.Am., Memo. 27, 1948
  - 9 Propagation of Sound in Shallow Water  
D.E. WESTON - J. Brit. IRE Vol. 26 p. 329, 1963
  - 10 Resonant Frequencies and High Modes in Layered Wave Guides  
I. TOLSTOY - J.A.S.A., p. 1182, 1956
  - 11 Guided Waves in a Fluid with Continuously Variable Velocity Overlying an Elastic Solid : Theory and Experiment.  
I. TOLSTOY - J.A.S.A., Janvier 1960
  - 12 Propagation at Short Ranges of Elastic Waves from an Impulsive Source in a Shallow Fluid Overlying a Layered Elastic Solid  
A.S. VICTOR, F.R. SPITZNOGLE et E.G. Mc LEROY  
J.A.S.A., Mai 1965
  - 13 Réflexion et réfraction des ondes sismiques progressives  
L. GAGNIARD - Gauthiers-Villars, PARIS, 1939
  - 14 Normal-Mode Theory Applied to Short-Range Propagation in an Underwater Acoustic Surface Duct  
Melvin A. PEDERSEN et David F. GORDON - J.A.S.A. Janvier 1965
  - 15 Epstein Normal-Mode Model of a Surface Duct  
H.P. BUCKER and Halcyon E. MORRIS - J.A.S.A., Juin 1967
  - 16 Extension of the Method of Normal Modes to Sound Propagation in an Almost-Stratified Medium  
Allan D. PIERCE - J.A.S.A. Janvier 1965